M3121 Pravděpodobnost a statistika I

4. Náhodná veličina

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Motivační příklad

Příklad 1

Házíme opakovaně mincí. Ze 100 náhodných pokusů: 56 × „hlava“ a 44 × „orel“.
Otázka: *je tato mince „spravedlivá“?*

prostor elementárních jevů: $\Omega = \{$„hlava“;„orel“$\}$
elementární jevy: $\omega_1 =$„hlava“, $\omega_2 =$„orel“
jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_1, \omega_2, \Omega\}$

Nás však zajímá např. **počet hlav ve 100 pokusech**

$$\{\text{„hlava“}\} \in \Omega \overset{X}{\mapsto} 1 \in \mathbb{R}$$

$$\{\text{„orel“}\} \in \Omega \overset{X}{\mapsto} 0 \in \mathbb{R}$$

X je **zobrazení**, číslo 1 se nazývá jeho **realizace**
Otázka: Jaké jsou pravděpodobnosti jednotlivých hodnot zobrazení X?

Náhodná veličina

Definice 1

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je takové zobrazení, že pro $\forall\, x \in \mathbb{R}$ platí

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x\rangle) \in \mathcal{A}$$

Pak X nazýváme **náhodnou veličinou** (random variable) (vzhledem k jevovému poli $(\Omega, \mathcal{A})$).

Poznámka 2

X je náhodná veličina $\Leftrightarrow \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ pro $\forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pro $\forall$ borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$.

Poznámka 3

Jestliže pro každou borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$ platí $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, říkáme, že X je **borelovsky měřitelná** *vzhledem k $\mathcal{A}$. Tento fakt se značí $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.*

Náhodná veličina

Příklad 2

Uvažujme experiment, při kterém házíme homogenní hrací kostkou. Experiment má 6 různých stejně pravděpodobných výsledků, takže $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$.
Uvažujme jevové pole $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}\}$.
Pro dále definované funkce $X(\omega)$ *a* $Y(\omega)$ *zjistíme, zda jde o náhodné veličiny na daném jevovém poli* $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$X = \begin{cases} 1 & \textit{padne číslo } > 3, \\ 0 & \textit{padne číslo } \leq 3 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \textit{padne sudé číslo,} \\ 0 & \textit{padne liché číslo.} \end{cases}$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} & x < 0, \\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \mathcal{A} & 0 \leq x < 1 \\ \Omega \in \mathcal{A} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} & x < 0, \\ \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \notin \mathcal{A} & 0 \leq x < 1 \\ \Omega \in \mathcal{A} & x \geq 1 \end{cases}$$

X **je** náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A})$

Y **není** náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A})$

Náhodná veličina

Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny lze popsat pomocí distribuční funkce.

Definice 4

Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak funkci $F(x) = P(X \leq x)$, kde $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **distribuční funkcí** (**cumulative distribution function**) náhodné veličiny X.

Poznámka 5 (Zjednodušené značení)

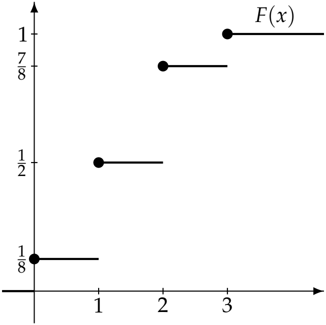
$$
\begin{aligned}
\{X \leq x\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \\
P(X \leq x) &= P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\right) \\
P(X \in B) &= P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}\right) \\
P(X \in B_1 \cap B_2) &= P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_1\} \cap \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_2\}\right)
\end{aligned}
$$

Distribuční funkce

Příklad 3 (3 nezávislé hody mincí)

$\Omega = \{\omega_1 = (H,H,H), \omega_2 = (H,H,O), \omega_3 = (H,O,H), \omega_4 = (O,H,H), \omega_5 = (O,O,H), \omega_6 = (O,H,O), \omega_7 = (H,O,O), \omega_8 = (O,O,O)\}$.
Jevová σ-algebra: $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.
X … *„počet hlav ve třech hodech"* $\Rightarrow X \in \{0,1,2,3\}$.

Distribuční funkce:



$$F(x) = P(X \le x)$$

$F(x) = P(\emptyset) = 0$	$x < 0$
$= P(X=0) = \frac{1}{8}$	$0 \le x < 1$
$= P(X=0 \vee 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$	$1 \le x < 2$
$= P(X=0 \vee 1 \vee 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = +\frac{7}{8}$	$2 \le x < 3$
$= P(X=0 \vee 1 \vee 2 \vee 3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$	$x \ge 3$

Distribuční funkce

Věta 6 (Vlastnosti distribuční funkce)

Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak

- *F je neklesající.*
- *F je zprava spojitá.*
- $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
- $0 \leq F(x) \leq 1$ *pro* $x \in \mathbb{R}$.
- $P(X = x) = F(x) - \lim\limits_{y\to x^-} F(y)$.
- *F má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.*
- $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ *pro* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$.

Distribuční funkce

Poznámka 7 (Lebesgueova – Stieltjesova míra)

Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* (a) *neklesající,*
(b) *zprava spojitá.*

- *Označme* $\mathcal{R}$ *množinu všech konečných sjednocení po dvou disjunktních polouzavřených intervalů typu* $\langle a, b \rangle$, *kde* $a, b \in \mathbb{R}$ *a* $a < b$. *Jde o množinový* **okruh**.
- *Na tomto množinovém okruhu se definuje* **aditivní míra** $\mu_F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *pro každé* $A \in \mathcal{R}$, *kde*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i \rangle,\ a_i < b_i \text{ a } \langle a_i, b_i \rangle \cap \langle a_j, b_j \rangle = \emptyset \text{ pro } i \neq j$$

předpisem

$$\mu_F(A) = \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i \rangle \right) = \sum_{i=1}^{n} [F(b_i) - F(a_i)].$$

Distribuční funkce

Poznámka - pokračování

- *Dále uvažujme* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{R})$ *minimální množinový* σ-**okruh** *generovaný okruhem* $\mathcal{R}$.
- *Rozšíříme aditivní míru* μ_F *definovanou na okruhu* $\mathcal{R}$ *na množinový* σ*-okruh* $\mathcal{B}$ *tak, že pro každý prvek* $A \in \mathcal{B}$
$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i\rangle,\ a_i < b_i \text{ a } (a_i, b_i\rangle \cap (a_j, b_j\rangle = \emptyset \text{ pro } i \neq j$$
definujeme σ*-aditivní míru* $\mu_F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ *předpisem*
$$\mu_F(A) = \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{\infty} [F(b_i) - F(a_i)].$$
- *Takto získaná* σ*-aditivní míra* μ_F *na borelovském* σ*-okruhu* $\mathcal{B}$ *se nazývá* **Lebesgueova – Stieltjesova míra** *indukovaná funkcí* F*. Jestliže* $F(x) = x$*, jde o* **Lebesgueovu míru***.*

Distribuční funkce

Shrnutí

$$(\Omega, \mathcal{A}) \xrightarrow{X(\omega), F(x)} (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

$$P \overset{?}{\longleftrightarrow} \mu_F \ (\leftarrow F)$$

Věta 8

Nechť $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je*
- (a) *neklesající,*
- (b) *zprava spojitá.*
- (c) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0.$

Pak μ_F *je pravděpodobnost na* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, *tj.* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_F)$ *je pravděpodobnostní prostor.*

Definice 9 (Rozdělení pravděpodobností)

Nechť X je náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a F je její distribuční funkce. Pak množinová funkce P_X definovaná vztahem $P_X(B) = P(X \in B)$, kde $B \in \mathcal{B}$, nazýváme **rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny** X.

Distribuční funkce

Poznámka 10 (Značení)

- *Mějme polouzavřený interval* $B = (a, b\rangle$, *kde* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Pak*

$$P_X(B) = P(X \in B) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \mu_F((a, b\rangle).$$

- *Dále uvažujme borelovskou množinu* $A \in \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i\rangle$, *tvořenou disjunktními polouzavřenými intervaly, pak*

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} [F(b_i) - F(a_i)] = \mu_F(A).$$

Tedy $P_X \leftrightarrow \mu_F \leftrightarrow F$, *takže pomocí distribuční funkce lze jednoznačně popsat rozdělení pravděpodobností* $P_X(B) = P(X \in B)$ *pro každou* $B \in \mathcal{B}$. *Z teorie integrálu pak pro každou* $B \in \mathcal{B}$ *lze psát*

$$P_X(B) = \mu_F(B) = \int_B d\mu_F \quad \cdots \quad \textbf{Lebesgueův – Stieltjesův integrál}$$

$$= \int_B dF(x) \quad \cdots \quad \textit{jiné značení}$$

Distribuční funkce

Věta 11

Nechť $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je neklesající, zprava spojitá funkce, pro kterou platí* $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = 1$ *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$*. Pak existuje pravděpodobnostní prostor a na něm náhodná veličina* X *taková, že* $G(x)$ *je její distribuční funkce.*