Obsah

Následující text je zápisem části přednášky předmětu M5858 Diferenciální rovnice a jejich užití. Má sloužit především k tomu, aby studentky/studenti nebyly/i nuceny/i si během přednášky dělat podrobné písemné poznámky, ale raději se soustředily/i na pochopení výkladu. Dále může být pomůckou k rychlému připomenutí toho, co člověk již zná. V žádném případě nemůže být považován za základní zdroj nahrazující standardní učební texty, z něhož by bylo možné se naučit problematice obyčejných diferenciálních rovnic a jejich aplikací. Představuje pouze podrobnou osnovu předmětu M5858 nebo poznámky z přednášky; sám o sobě bez komentářů během přednášky je málo srozumitelný až nesrozumitelný (aby byl s komentáři srozumitelný, je mým přáním a bude mou snahou).

Budu vděčný každému, kdo mě upozorní na nedůslednosti, formulační nedostatky, překlepy nebo dokonce chyby.

Září 2021 Zdeněk Pospíšil

Jako základní studijní literaturu k předmětu M5858 lze používat:

1. J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001 (druhé vydání), 212 stran.
   Teorie obyčejných diferenciálních rovnic probraná důkladněji, než je v sylabu předmětu M5858.

2. J. Diblík, M. Růžičková: *Obyčajné diferenciálne rovnice.* EDIS, 2008.
   Úvod do studia základů teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Podrobně jsou probírány zejména lineární rovnice a systémy.

3. M. Ráb: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* MU, Brno 1998, 96 stran.
   Popis některých elementárních metod řešení explicitních obyčejných diferenciálních rovnic.

4. R. Plch: *Příklady z matematické analýzy. Diferenciální rovnice.* MU, Brno 1995, 29 stran.
   Sbírka úloh z elementárních metod řešení explicitních i implicitních obyčejných diferenciálních rovnic. Je doplněna stručným popisem potřebných metod.

Jako doplňující literaturu lze doporučit

- P. Hartman: *Ordinary Differential Equations.* John Willey&Sons, New York-London-Sydney, 1964.
  Klasická monografie o teorii obyčejných diferenciálních rovnic.

- L. Perko: *Differential Equations and Dynamical systems.* Springer, New York-Berlin-Hedelberg, 2001.
  Moderněji pojatá monografie o teorii obyčejných diferenciálních rovnic.

- J. R. Brannan, W. E. Boyce: *Differential Equations. An Introduction to Modern Methods and Applications.* Wiley&Sons, 2015.
  Moderní učebnice s mnoha řešenými příklady.

- J. Kaucký: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* Nakladatelství ČSAV, Praha 1952.
  Popis elementárních metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Je obsáhlejší než skripta 3

- E. Kamke: *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Band I, Gewöhliche Differentialgleichungen.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1951.
  Důkladná příručka všech rovnic řešitelných elementárními metodami.

- J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii.* MU, Brno 2001, 265 stran.
  Doplňky k teorii autonomních systémů, aplikace diferenciálních rovnic především v populační dynamice a teorii šíření epidemií.

- P. N. V. Tu; *Dynamical Systems: An Introduction with Applications in Economics and Biology.* Springer, 1995.
  Monografie o dynamických systémech (autonomní diferenciální a diferenční rovnice) s aplikacemi.

- N. F. Britton: *Essential Mathematical Biology.* Springer, London-Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-Milan-Paris-Tokio, 2003 (second printing).
  Učebnice deterministických modelů v biologii; první tři kapitoly obsahují aplikace probírané v rámci předmětu M5858.
- G. Gandolfo: *Economic Dynamic.* Springer, 2010.
  Obsahuje rozmanité matematické metody použitelné v teorii ekonomické dynamiky, nejen diferenciální rovnice.
- R. J. Barro, X. Sala-i-Martin: *Economic growth.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts-London, England, 1999.
  Aplikace obyčejných diferenciálních rovnic v ekonomii vykládané jiným způsobem než v předchozí monografii.

Prolog

Nejprve se podíváme na několik zjednodušených modelů nějakých reálných procesů. Na nich potom ukážeme, čím se tento text, a tedy předmět M5858, zabývá.

Samočištění jezera

Představme si jezero, do kterého přitéká a ze kterého odtéká voda tak, že se jeho objem nemění. Přitom proudění je dostatečně rychlé, aby voda byla stále dokonale promíchaná. Odpařování vody z jezera a déšť mají na množství vody v jezeře zanedbatelný vliv.

V jistém okamžiku se do jezera dostane nějaké znečištění. Znečisťující látka (polutant) je ve vodě rozpustná nebo je tvořena malými částicemi, které mají zhruba stejnou hustotu jako voda. Za takové situace se látka v jezeře rovnoměrně rozptýlí, její koncentrace bude v každém okamžiku konstantní a postupně se z jezera odplaví. Chceme tento proces popsat kvantitativně.

Označme V objem jezera a v rychlost přítoku a odtoku vody; objem V budeme vyjadřovat v objemových jednotkách (např. m^3), rychlost v v objemových jednotkách za jednotku času (např. $\mathrm{m}^3\,/\,\mathrm{den}$). Předpokládejme, že na počátku, tj. v čase $t = 0$, se do jezera dostal polutant o celkové hmotnosti m; vyjádříme ji v nějakých jednotkách hmotnosti (např. g).

Dále označme $x(t)$ koncentraci polutantu v jezeře v čase t od okamžiku znečištění; koncentraci budeme vyjadřovat v jednotkách hmotnosti na jednotku objemu vody (tedy např. $\mathrm{g}\,/\,\mathrm{m}^3$), čas vyjadřujeme ve stejných jednotkách, k nimž je vztažena rychlost v (tedy např. ve dnech).

Chceme znát koncentraci polutantu v libovolném čase od vzniku znečištění, hledáme tedy neznámou funkci x nezávisle proměnné t. Koncentrace polutantu na počátku procesu je rovna

$$x(0) = \frac{m}{V}. \tag{1}$$

Zvolme časový interval tak krátký, že se během něho koncentrace polutantu prakticky nezmění. Označme délku tohoto časového intervalu Δt. Za čas Δt od okamžiku t bude množství polutantu v jezeře rovno $Vx(t + \Delta t)$. Toto množství se rovná množství polutantu, které, které bylo v jezeře v čase t, tj. $Vx(t)$, zmenšené o množství, které za časový interval délky Δt odteklo. Za tento interval z jezera odteče voda o objemu $v\Delta t$ a v něm bylo zhruba $(v\Delta t)x(t)$ polutantu. Celkem dostáváme

$$Vx(t + \Delta t) = Vx(t) - vx(t)\Delta t, \tag{2}$$

nebo po snadné úpravě

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -\frac{v}{V}x(t).$$

Za předpokladu, že funkce x je diferencovatelná, můžeme v této rovnosti provést limitní přechod $\Delta t \to 0$ a dostaneme

$$x'(t) = -\frac{v}{V}x(t). \tag{3}$$

Hledaná funkce x tedy splňuje rovnici (3), v níž je vázána hodnota neznámé funkce a její derivace. Dále funkce splňuje podmínku (1), v níž je dána hodnota funkce x na počátku procesu. Nyní můžeme snadno přímým výpočtem ověřit, že funkce daná předpisem

$$x(t) = \frac{m}{V}\mathrm{e}^{-\frac{v}{V}t}$$

splňuje rovnici (3) i podmínku (1). Je to klesající funkce, pro kterou platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Koncentrace znečisťující látky v jezeře tedy exponenciálně klesá; v libovolném konečném čase od znečištění je však polutant v jezeře stále přítomný.

Růst populace

Představme si populaci nějakých organismů. Všechny jedince budeme považovat za stejné; je tedy přiměřenější si představovat bakterie než například obratlovce. Tyto organismy jednak umírají, jednak dávají vznik novým jedincům. Velikost populace v nějakém okamžiku – na začátku popisovaného děje – považujeme za známou. Budeme se snažit popsat, jak se tato velikost vyvíjí v průběhu času.

Označme tedy $x(t)$ velikost populace v čase t. Tuto velikost můžeme vyjadřovat třeba v počtu jedinců, v počtu jedinců vztaženém k jednotkové ploše nebo objemu živného média (tedy jako populační hustotu) a podobně. Časová jednotka může být libovolná, je však vhodné ji volit tak, aby byla menší než délka života jedince z uvažované populace, ale řádově s ní srovnatelná. Zvolme nyní časový interval délky Δt tak krátký, že jedinec, který během něho vznikl (narodil se, oddělil se od jedince rodičovského), přežije jeho konec; dobu Δt tedy považujeme za mnohem kratší, než je doba života jedince. Velikost populace $x(t + \Delta t)$ za časový interval délky Δt od okamžiku t bude rovna velikosti populace v čase t zmenšené o uhynulé jedince a zvětšené o jedince nově vzniklé.

Je přirozené předpokládat, že že množství uhynulých jedinců za jednotku času je úměrné velikosti populace. Koeficient úměrnosti označíme d a nazveme ho úmrtnost (death rate). Tento koeficient lze také interpretovat, jako klasickou pravděpodobnost, že jedinec během jednotkového intervalu zemře; platí tedy $0 < d \leq 1$. Za časový interval délky Δt uhyne část populace o velikosti $dx(t)\Delta t$.

Poněvadž všechny jedince považujeme za stejné, předpokládáme také, že každý jedinec během jednotkového času vyprodukuje stejný počet potomků. To znamená, že množství nově vzniklých jedinců za jednotku času je úměrné velikosti populace. Příslušný koeficient úměrnosti označíme b a nazveme porodnost (birth rate). V živé populaci nějací noví jedinci vznikají, proto je $b > 0$. Velikost části populace tvořené jedinci, kteří nově vznikli v časovém intervalu délky Δt, vyjádříme tedy součinem $bx(t)\Delta t$.

Provedenými úvahami jsme dospěli k rovnosti

$$x(t + \Delta t) = x(t) + bx(t)\Delta t - dx(t)\Delta t,$$

kterou můžeme upravit na tvar

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = (b-d)x(t).$$

Budeme předpokládat, že funkce x je diferencovatelná. Tento předpoklad není realistický, funkce x nabývá hodnot celočíselných (pokud je velikost populace vyjádřena v počtech jedinců) nebo racionálních (pokud je velikost populace vyjádřena jako populační hustota). Pokud je ale populace „dostatečně velká“, lze diferencovatelnou funkci považovat za přijatelnou aproximaci velikosti populace měnící se v čase. Za tohoto předpokladu v předchozí rovnosti provedeme limitní přechod $\Delta t \to 0$ a dostaneme rovnici

$$x'(t) = (b-d)x(t). \tag{4}$$

Hledaná funkce tedy opět splňuje rovnici, v níž je vázána její hodnota a hodnota její derivace. Na počátku, v čase $t = 0$, můžeme velikost populace považovat za známou; označíme ji x_0, tj.

$$x(0) = x_0. \tag{5}$$

Opět se snadno přímým výpočtem přesvědčíme, že funkce daná předpisem

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{(b-d)t}$$

splňuje rovnici (4) i podmínku (5). Tato funkce je pro $b > d$ (porodnost větší než úmrtnost) rostoucí, pro $b < d$ klesající a pro $b = d$ konstantní. Dále platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} \infty, & b > d, \\ x_0, & b = d, \\ 0, & b < d. \end{cases}$$

To znamená, že v případě $b > d$ velikost populace exponenciálně roste nade všechny meze[1]. Pokud je $b < d$, populace vymírá a jedině v mezním případě $b = d$ se velikost populace nemění, zůstává (dynamicky) stálá.

Růst populace v omezeném prostředí

Model růstu populace (4) má v případě $b > d$ (porodnost větší než úmrtnost) řešení, které exponenciálně roste do nekonečna. To není v konečném světě možné, populace musí narazit na nějaké „meze růstu“. Tyto meze si však nemusíme představovat jako nějakou tvrdou hranici, na kterou populace při svém růstu narazí. Spíše se jedná o vliv prostředí, o dostupnost zdrojů, které v něm jsou a podobně. Růst populace se tomuto prostředí nějak přizpůsobuje.

Rovnice (4) přepíšeme ve tvaru

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = b - d. \tag{6}$$

Poněvadž derivace funkce x (velikosti populace) vyjadřuje její změnu, můžeme levou stranu předchozí rovnosti interpretovat jako relativní změnu velikosti populace. A ta je rovna rozdílu

[1]Tento výsledek zpopularizoval Thomas Malthus ve své slavné Eseji o principu populace z roku 1798. Nezískal ho však předvedeným výpočtem, ale empiricky — vyhodnocením údajů o velikosti osídlení nových území v Severní Americe.

porodnosti a úmrtnosti. V prostředí, které považujeme za neomezené, tj. v němž má každý jedinec dostatek zdrojů pro svůj život a reprodukci, jsou porodnost i úmrtnost konstantní, jedná se o vnitřní fyziologické charakteristiky populace.

V prostředí, v němž jsou některé zdroje vzácné, mohou porodnost i úmrtnost záviset na dostupnosti těchto zdrojů. A dostupnost zdrojů závisí na velikosti populace — čím je populace větší, tím je pravděpodobnost, že se jedinec dostane ke zdroji menší. Porodnost a úmrtnost populace budou tedy záviset na její velikosti, $b = b(x)$, $d = d(x)$. Označme $g(x) = b(x) - d(x)$. Pak rovnice (6) přejde na tvar

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = g\big(x(t)\big),$$

neboli

$$x'(t) = x(t)g\big(x(t)\big). \tag{7}$$

Výraz $g(x)$ vyjadřuje relativní přírůstek populace o velikosti x. Nazývá se růstový koeficient (growth rate).

Je-li populace malá, zdrojů prostředí připadajících na jedince je dostatek a jedinec má dost energie pro reprodukci; porodnost je tedy velká. Je-li populace velká, zdrojů na jedince je málo a ten je proto schopen vyprodukovat jen málo potomků, pokud vůbec nějaké; porodnost je malá. Navíc velká populace produkuje mnoho zplodin svého metabolismu, tyto odpadní produkty bývají pro jedince toxické, proto je úmrtnost velká, může být i větší než porodnost. Z těchto úvah můžeme učinit závěr, že růstový koeficient velké populace je malý, dokonce záporný. Přesněji řečeno, funkce g definovaná na intervalu $[0, \infty)$ by měla mít vlastnosti

$$g(0) = r > 0, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) < 0.$$

Budeme-li funkci g navíc považovat za spojitou a monotonní, bude existovat taková hodnota $K > 0$, že $g(K) = 0$ a $(x - K)g(x) < 0$ (funkce g je na intervalu $[0, K)$ kladná a na intervalu (K, ∞) záporná).

Nejjednodušší funkce, která má tyto vlastnosti je funkce lineární

$$g(x) = r\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Obecná rovnice (7) tak získá konkrétní tvar

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right). \tag{8}$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že funkce x daná předpisem

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)\mathrm{e}^{-rt}}$$

vyhovuje rovnici (8) i podmínce (5). Pokud je $x_0 < \frac{1}{2}K$, pak funkce x v pravém okolí nuly roste a je konvexní. V jistém čase t_1 populace dosáhne velikosti $\frac{1}{2}K$ a její růst se zpomalí, tj. funkce x bude na intervalu (t_1, ∞) konkávní.

Pokud je $x_0 > K$, pak funkce x je konvexní a klesající. V případě $x_0 = K$ je funkce x konstantní. V každém případě platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)\mathrm{e}^{-rt}} = K;$$

velikost populace se v průběhu času ustálí na hodnotě K, pokud tuto hodnotu nemá již od začátku. Veličinu K můžeme nazvat kapacita nebo úživnost prostředí.

Růst majetku

Představme si naivního člověka, který má nějaký majetek v penězích. Jeho naivita se projevuje představou, že v bance se budou jeho peníze nějak samovolně množit, proto je uloží. Úrok (podle reklamních materiálů výhodný) je stanovován podle aktuálního ceníku banky. Budeme chtít popsat, jak se v průběhu času hodnota uvažovaného majetku mění.

Označme proto $x = x(t)$ velikost majetku v čase t. Ta je vyjádřena v nějaké peněžní jednotce, čas budeme udávat v rocích. Počáteční velikost majetku označíme x_0, tedy

$$x(0) = x_0. \tag{9}$$

K uložené částce banka připisuje úrok. Jeho nominální velikost se mění, je určena aktuální situací na trhu bankovních služeb a úrokovou sazbou centrální banky, tedy výkonností ekonomiky. Reálná velikost úroku je oproti nominální menší o inflaci a bankovní poplatky. Označme reálnou úrokovou míru v čase t symbolem $p(t)$. Tato veličina bývá vyjádřena v procentech za rok. Úroková míra se nemění plynule, k její změně dochází jen v určitých časových okamžicích. Proto budeme funkci p nezávisle proměnné t považovat za funkci po částech konstantní. V bodech skoku funkce r nemusí být definována, z technických důvodů ji však budeme definovat tak, aby byla spojitá zprava v každém bodě svého definičního oboru, tj. intervalu $[0, \infty)$.

Po uplynutí časového intervalu s levým krajním bodem t, který má délku Δt tak malou, že se v jeho průběhu úroková míra nezmění, bude hodnota majetku rovna její hodnotě na začátku tohoto intervalu změněná o hodnotu reálného (nikoliv připsaného) úroku za tento časový interval, tj.

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{p(t)}{100} x(t) \Delta t.$$

Tuto rovnost upravíme na tvar

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \tfrac{1}{100} p(t) x(t)$$

a provedeme limitní přechod $\Delta t \to 0$. Dostaneme rovnici

$$x'(t) = \tfrac{1}{100} p(t) x(t), \tag{10}$$

v níž je vázána hodnota derivace hledané funkce x a hodnota této funkce.

Přímým výpočtem se snadno přesvědčíme, že funkce x splňující rovnici (10) a podmínku (9) je dána výrazem

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\frac{1}{100} \int_0^t p(\tau) \mathrm{d}\tau}.$$

Ještě poznamenejme, že funkce po částech spojitá je integrabilní a tedy funkce x je zadána korektně.

Z vyjádření majetku x v čase t od začátku (od uložení do banky) vidíme, že za tento čas se majetek zvětší, resp. zmenší, pokud platí nerovnost

$$\int_0^t p(\tau) \mathrm{d}\tau > 0, \quad \text{resp.} \quad \int_0^t p(\tau) \mathrm{d}\tau < 0,$$

tj. pokud nominální úroková míra je v průběhu času převážně větší, resp. menší, než inflace a poplatky; v reálné ekonomice patrně nastane druhý případ.

Chladnutí kávy

V místnosti je pokojová teplota. Uvaříme si kávu a nalijeme ji do hrnku, nebo v hrnku zalijeme mletou kávu vroucí vodou. Hrnek má tepelně izolované stěny i dno, neprobíhá přes ně žádná výměna tepla. Hrnek nemá žádnou pokličku, hladina kávy není od okolního prostředí nijak izolovaná. Za takové situace lze očekávat, že káva v hrnku bude chladnout. Navíc teplá káva (a kapalina obecně) má menší hustotu, než chladná a to znamená, že ochlazená káva od hladiny klesá a teplá káva ze dna stoupá k hladině. Tímto procesem se káva v hrnku promíchává, takže její teplotu můžeme považovat za stejnou v celém objemu.

Chceme popsat vývoj teploty kávy v průběhu času. Za tímto účelem označíme $x = x(t)$ teplotu kávy v čase t; čas je vhodné uvádět v minutách, teplotu ve stupních Celsia. Teplotu v místnosti označíme T a také ji budeme uvádět ve °C. Výměna tepla mezi kávou a prostředím probíhá přes hladinu. Označíme její obsah S; můžeme ho vyjádřit v cm^2.

Experimentálně byl ověřen Newtonův zákon chladnutí: zmenšení teploty za krátký časový interval je úměrné rozdílu teplot, obsahu plochy přes kterou výměna tepla probíhá a času, po který chladnutí probíhá. Příslušný koeficient označíme κ; při zvolených jednotkách bude mít rozměr cm^{-2}min^{-1}. Označíme-li délku časového intervalu Δt, bude mít tento zákon tvar

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \kappa S\big(T - x(t)\big)\Delta t.$$

Po vydělení výrazem Δt a limitním přechodu $\Delta t \to 0$ dostaneme rovnici

$$x'(t) = \kappa S\big(T - x(t)\big). \tag{11}$$

Opět se jedná o rovnici vyjadřující vztah funkční hodnoty a derivace hledané funkce.

Na začátku děje byla káva vařící, její teplota byla 100°C, tj.

$$x(0) = 100. \tag{12}$$

Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že funkce daná předpisem

$$x(t) = T + (100 - T)\mathrm{e}^{-\kappa St}$$

vyhovuje rovnici (11) i podmínce (12). Jedná se o funkci, která exponenciálně klesá od hodnoty 100°C k pokojové teplotě T. Teplota kávy se „velice rychle“ vyrovnává s teplotou místnosti, v konečném čase ale až na tuto teploty neklesne.

Dynamika mezd a zaměstnanosti

Richard M. Goodwin sestavil ve druhé polovině šedesátých let minulého století matematický model třídního boje. S použitím méně ideologické terminologie se jedná o model časového vývoje mezd a zaměstnanosti, ve kterém lze pozorovat vznik hospodářských cyklů. Jeho podrobné odvození bude uvedeno mezi aplikacemi,zde pouze naznačíme výsledek.

Jedna makroekonomická charakteristika, která v modelu vystupuje je relativní zaměstnanost l (práce, labor) vyjádřená jako podíl zaměstnaných v celkovém množství práceschopného obyvatelstva; jedná se tedy o bezrozměrnou veličinu. Druhá je průměrná mzda w (wage) vyjádřená v peněžních jednotkách. Obě tyto veličiny se v čase mění, tedy $l = l(t)$, $w = w(t)$; tyto funkce budeme považovat za diferencovatelné. Časová změna zaměstnanosti mezd je pak vyjádřena jako derivace těchto funkcí.

Jedním „ekonomickým zákonem“ je skutečnost, že při vysoké mzdě (tj. při vysoké garantované minimální mzdě) zaměstnanost klesá (zaměstnavatelům se nevyplatí zaměstnávat drahé pracovníky); naopak, při nízké průměrné mzdě zaměstnanost roste. Odtud plyne, že existuje nějaká „rovnovážná“ úroveň mezd, při níž se zaměstnanost nemění. Tuto myšlenku vyjádříme přesněji.

Za „změnu zaměstnanosti“ budeme považovat relativní změnu zaměstnanosti l, tedy hodnotu $l'(t)/l(t)$. Její pokles s růstem hladiny mezd budeme specifikovat zjednodušujícím předpokladem, že tato hodnota závisí na průměrné mzdě lineárně, přičemž tato lineární funkce je klesající, tedy

$$\frac{l'(t)}{l(t)} = \gamma - \sigma w(t), \tag{13}$$

kde γ a σ jsou kladné parametry; σ vyjadřuje „citlivost“ změny zaměstnanosti na růst mezd, γ vyjadřuje relativní růst zaměstnanosti při hypoteticky nulové mzdě. Parametr γ má rozměr 1/čas, parametr σ má rozměr 1/(čas $\cdot$ peněžní jednotka), hodnota γ/σ je „rovnovážná“ hladina mezd.

William Phillips na základě údajů o nominální mzdě a zaměstnanosti v Británii v letech 1861–1957 vypozoroval závislost změny průměrné mzdy na zaměstnanosti; tato závislost není lineární, je vyjádřena známou Phillipsovou křivkou. S rostoucí zaměstnaností roste mzda (pokud chce hospodář při téměř úplné zaměstnanosti najít mezi práceschopným obyvatelstvem nějakého práceochotného, musí ho přeplatit), naopak při malé zaměstnanosti mzda klesá (mezi hladovějícími nezaměstnanými jsou lidé ochotní pracovat za alespoň nějakou mzdu). Přesněji, za změnu mzdy budeme považovat změnu relativní a vyjádříme ji rovností

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \varphi\big(l(t)\big) - \alpha, \tag{14}$$

kde φ je rostoucí spojitá funkce definovaná na intervalu $(0,1)$, která má vlastnost

$$\lim_{l\to 0+} \varphi(l) < \alpha, \qquad \lim_{l\to 1-} \varphi(l) > \alpha;$$

limity připouštíme i nevlastní. Parametr α vyjadřuje hodnotu Phillipsovy křivky při „rovnovážné“ úrovni mezd. Veličiny α i φ mají rozměr „čas^{-1}“.

Rovnice (13) a (14) můžeme přepsat ve tvaru systému

$$\begin{aligned} l'(t) &= l(t)\big(\gamma - \sigma w(t)\big), \\ w'(t) &= w(t)\big(\varphi\big((l(t)\big) - \alpha\big), \end{aligned} \tag{15}$$

v němž jsou vzájemně provázány hodnoty derivace neznámých funkcí l, w a jejich funkční hodnoty.

Zákon síly

Isaac Newton definoval sílu pomocí jejího účinku na pohyb tělesa, její velikost zavedl jako součin hmotnosti tělesa m a uděleného zrychlení a. Tento postulát budeme precizovat pro velice jednoduchou situaci. Místo tělesa si budeme představovat abstraktní „hmotný bod“, tj. těleso o stejné nenulové hmotnosti m ale o nulovém objemu. Dále si budeme představovat, že tento hmotný bod se může pohybovat pouze po přímce. Tuto přímku prohlásíme za souřadnou osu, tj. zvolíme na ní počátek a orientaci. Polohu hmotného bodu pak vyjádříme jako jeho souřadnici x; přitom je x reálné číslo. Poněvadž hmotný bod se pohybuje, jeho poloha je v každém okamžiku jiná, souřadnice závisí na čase, $x = x(t)$. Rychlost pohybu je ve fyzice definována jako relativní změna polohy vztažená k času. Změnu polohy za krátký časový interval délky Δt vyjádříme rozdílem $x(t+\Delta t) - x(t)$, tedy rychlost v uvažovaném časovém intervalu je zhruba rovna

$$v(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

a v limitě $\Delta t \to 0$ dostaneme přesně $v(t) = x'(t)$.

Zrychlení je analogicky definováno jako relativní změna rychlosti vzhledem k času, tedy zrychlení v uvažovaném krátkém časovém intervalu je zhruba rovno

$$a(t) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

a v limitě $\Delta t \to 0$ přesně $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Na hmotný bod působí síla F, která nemusí být stejná v každém místě. Její velikost tedy závisí na poloze, tj. na souřadnici bodu, $F = F(x)$ nebo podrobněji $F = F\big(x(t)\big)$. Postulovaný vztah mezi hmotností m hmotného bodu, jeho zrychlením a a působící silou F je

$$F = ma,$$

se zahrnutím času a souřadnice bodu

$$F\big(x(t)\big) = ma(t) = mx''(t),$$

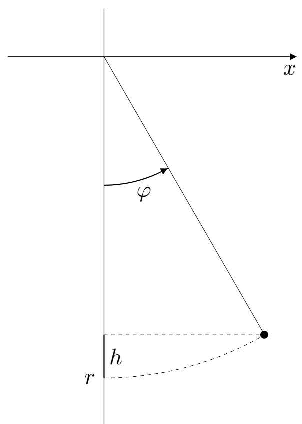
takže

$$x''(t) = \frac{1}{m} F\big(x(t)\big). \tag{16}$$

Časově proměnná poloha bodu tedy splňuje rovnici, v níž je vázána její hodnota a hodnota její druhé derivace.

Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na nehmotném vlákně délky r na který působí pouze gravitační síla. Lze ho realizovat jako kuličku zavěšenou na niti, přičemž průměr kuličky je zanedbatelný vzhledem k délce niti a hmotnost niti je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti kuličky.



Zavedeme souřadný systém podle obrázku tak, že vodorovná osa x směřuje zleva doprava a svislá osa y směřuje shora dolů a kyvadlo je zavěšeno v počátku souřadnic. Označme $\varphi = \varphi(t)$ výchylku kyvadla od rovnovážné polohy v čase t. Poloha hmotného bodu v čase t je dána souřadnicemi

$$x = x(t) = r \sin\varphi(t), \qquad y = y(t) = r\cos\varphi(t).$$

Vektor rychlosti hmotného bodu je derivací jeho polohy podle času, velikost $v = v(t)$ rychlosti v čase t je euklidovskou délkou tohoto vektoru, tj.

$$\big(v(t)\big)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \big(r\varphi'(t)\cos\varphi(t)\big)^2 + \big(-r\varphi'(t)\sin\varphi(t)\big)^2 = \big(r\varphi'(t)\big)^2.$$

Výška $h = h(t)$ hmotného bodu nad rovnovážnou polohou $y = r$ v čase t je rovna

$$h(t) = r - y(t) = r\big(1 - \cos\varphi(t)\big).$$

Podle zákona zachování energie je součet kinetické a potenciální energie hmotného bodu konstantní, tj.

$$\frac{1}{2}m\big(v(t)\big)^2 + mgh(t) = const;$$

přitom $g \doteq 9{,}823\,\mathrm{ms}^{-2}$ je gravitační zrychlení. Do předchozí rovnosti dosadíme vypočítané v^2 a h. Dostaneme

$$\frac{1}{2}mr\big(\varphi'(t)\big)^2 + mgr\big(1 - \cos\varphi(t)\big) = const.$$

Tato rovnice popisuje časově závislou výchylku kyvadla – jedná se o relaci, v níž je vázána funkce φ a její první derivace. Vystupuje v ní však neurčitá konstanta. Její hodnotu můžeme získat z předpokladu, že na počátku, v čase $t = 0$, byla výchylka rovna nějaké hodnotě φ_o a kyvadlo bylo v klidu (tj. na začátku hmotný bod vychýlýme z rovnovážné polohy a pustíme). V takovém případě je celková energie rovna energii potenciální $mgh(0) = mgr(1 - \cos\varphi_0)$. Po dosazení a jednoduché úpravě dostaneme rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{2}r\big(\varphi'(t)\big)^2 - g\big(\cos\varphi(t) - \varphi_0\big) = 0. \tag{17}$$

Na levé straně této rovnice je tedy nějaký výraz, který váže první derivaci hledané funkce φ s její hodnotou.

Jiný tvar této modelu výchylky matematického kyvadla dostaneme zderivováním levé strany rovnice (17) podle času,

$$r\varphi'(t)\varphi''(t) + g\varphi'(t)\sin\varphi(t),$$

a úpravou na tvar

$$\varphi'(t)\big(r\varphi''(t) + g\sin\varphi(t)\big) = 0.$$

Dostáváme tedy dvě rovnice pro časově proměnnou výchylku kyvadla $\varphi = \varphi(t)$:

$$\varphi'(t) = 0, \qquad \varphi''(t) = -\frac{g}{r}\sin\varphi(t).$$

První z uvedených rovnic vyjadřuje konstantní funkci φ. To by znamenalo, že se kyvadlo nepohybuje, což je buď nezajímavý případ (kyvadlo na počátku nemělo žádnou výchylku od svislého směru a v této poloze zůstává), nebo případ fyzikálnš nerealistický (kyvadlo je stále v nějaké nerovnovážné poloze). Za model matematického kyvadla tedy považujeme rovnici

$$\varphi''(t) = -\frac{g}{r}\sin\varphi(t). \tag{18}$$

Shrnutí

Všechny matematické modely, které jsme výše sestavili, měly dvě společné vlastnosti:

- Ve všech jsme předpokládali, že čas plyne spojitě, je neomezeně dělitelný. Techničtěji vyjádřeno, časový okamžik t je prvkem intervalem $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ a je možné provádět limitní přechod $\Delta t \to 0$; přitom Δt reprezentuje časový krok, délku krátkého časového intervalu. Okamžik $t = 0$ v modelech označoval začátek procesu a v tomto okamžiku většinou byl znám stav procesu (1), (5), (9), (12); výjimkou jsou poslední dva modely, u kterých jsme však nenašli (ani nehledali) žádné řešení.

- Modelovaný proces byl vyjádřen nebo aproximován nějakou diferencovatelnou funkcí času $x = x(t)$ (v případě modelu změn mezd a zaměstnanosti dvojicí diferencovatelných funkcí $l = l(t)$, $w = w(t)$). Model představovala rovnice (nebo soustava rovnic) ve které byla vázána hodnota derivace hledané funkce (hledaných funkcí) podle času v jednom časovém okamžiku a její funkční hodnota v témže okamžiku; v modelech (3), (4), (7), (8), (10), (11), (15) a (17) byla derivace první, v modelech (16) a (18) druhá.

Rovnice, v nichž vystupuje neznámá funkce jedné reálné proměnné a její derivace, se nazývají diferenciální, podrobněji *obyčejné diferenciální rovnice.* Budou základním objektem, kterým se budeme zabývat. Jak ukazuje ekonomický model (15), nevystačíme s jednou rovnicí, a jak ukazují fyzikální modely (16) a (18), můžeme potřebovat i vyšší derivace, než první.

Název „diferenciální rovnice“ má původ v tradiční symbolice. Např. rovnici (2) můžeme přepsat ve tvaru

$$V\big(x(t+\Delta t) - x(t)\big) = -vx(t)\Delta t,$$

neboli

$$V\Delta x(t) = -vx(t)\Delta t,$$

v níž vystupuje konečný přírůstek hledané funkce x a přírůstek nezávisle proměnné t. Pokud přírůstky budeme považovat za infinitesimální, tj. za „nekonečně malé“, nahradíme výrazy Δx a Δt diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$. Poslední rovnice tak dostane tvar

$$V\mathrm{d}x(t) = -vx(t)\mathrm{d}t,$$

což je rovnice, v níž vystupují diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$ hledané funkce a její nezávisle proměnné. Ještě můžeme připomenout, že obyčejnou derivaci v tradiční symbolice zapisujeme

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{nebo stručně } x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};$$

poslední způsob zápisu je výhodný zejména v situacích, kdy ve formulích vystupuje hledaná časově proměnná veličina (tedy funkce) x, nikoliv její konkrétní hodnota $x(t)$ v časovém okamžiku t (tedy funkční hodnota). Nezávisle proměnná v tomto zápisu není explicitně uvedena, přitom ji potřebujeme nějak označit.

Máme-li diferenciální rovnici, chceme znát její řešení, nejlépe v explicitním tvaru. Pro rovnice (3), (4), (8), (10) a (11) jsme takové řešení napsali. Hledání explicitních řešení diferenciálních rovnic je věnován exkurs v sekci 1.1; podrobněji je tato problematika probrána ve skriptech 3. ze seznamu základní studijní literatury.

Řešení v explicitním tvaru však nelze nalézt vždy, u systémů rovnic jsou dokonce explicitní řešení dosti vzácná. V takovém případě chceme alespoň znát, zda řešení dané nebo sestavené rovnice existuje, zda je jediné nebo jich je víc, případně na jakém intervalu je řešení definováno. Pokud rovnice má modelovat nějaký skutečný proces, nemůžeme znát úplně přesně hodnoty všech parametrů rovnice, stav procesu na počátku a podobně. V takovém případě je dobré vědět, zda drobná chyba v parametrech nebo počáteční podmínce řešení neznehodnotí. O této problematice pojednává kapitola 2.

V obecném modelu růstu populace v omezeném prostředí (7) neznáme konkrétní tvar pravé strany, postulujeme jen nějaké vlastnosti funkce g. Podobně u ekonomického modelu (15) také neznáme přesný tvar pravé strany druhé rovnice, známe jen nějaké vlastnosti funkce φ, která na ní vystupuje. A přesto potřebujeme i v těchto případech něco o průběhu řešení vědět. Nelze očekávat, že z „neurčité“ rovnice získáme přesné kvantitativní informace, ale můžeme se dozvědět alespoň nějaké vlastnosti řešení vyjádřené kvalitativně, např. zda je funkce x rostoucí, klesající, ohraničená, má limitu v nevlastním bodě a podobně. Některé základní poznatky z kvalitativní teorie diferenciálních rovnic jsou uvedeny v kapitole 4.

Podívejme se ještě jednou na rovnice (3), (4), (10) a (11). Všechny čtyři lze zapsat v jednotném tvaru

$$x'(t) = a(t)x(t) + c(t); \tag{19}$$

v rovnici (3) je funkce $a(t) \equiv r/V$, v rovnici (4) je $a(t) \equiv b-d$, v rovnici (10) je $a(t) = \frac{1}{100}p(t)$ a v rovnici (11) je $a(t) \equiv -\kappa S$, v rovnici (11) je $c(t) \equiv \kappa ST$, v rovnicích (3), (4) a (10) je $c(t) \equiv 0$. Rovnice tvaru (19) se nazývají *lineární.* V rovnici (11) člen $c(t) = \kappa ST$ vyjadřoval vliv okolního prostředí na popisovaný proces (teplotu místnosti, v níž probíhá chladnutí kávy), ve zbývajících modelech jsme žádné „okolí“ popisovaného procesu neuvažovali. Proto se lineární rovnice s $c \equiv 0$ nazývají *homogenní* (stejnorodé; celý proces se „rodí“ z jednoho „zdroje“, nic vnějšího nebo cizího ho neovlivňuje), rovnice s nenulovým členem c se nazývá *nehomogenní.*

Ve všech uvedených řešeních se vyskytovala přirozená exponenciální funkce. Později uvidíme, že množina řešení lineární rovnice (nebo systému lineárních rovnic) má také „pěkné“ algebraické vlastnosti — může tvořit konečněrozměrný vektorový prostor. Navíc se lineární rovnice často vyskytují v aplikacích, nebo bývají prvním přiblížením se k modelu zkoumaného procesu. Z těchto důvodů se lineárními rovnicemi zabývá samostatná kapitola 3.

Část I

Obyčejné diferenciální rovnice

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu

Převážně budeme pracovat s reálnými funkcemi jedné reálné proměnné, kterou označíme t; v dynamických modelech totiž nezávisle proměnná bývá interpretována jako čas (latinsky *tempus*). Je-li $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, budeme psát $x = x(t)$ nebo $x = x(\,\cdot\,)$. Obyčejnou derivaci funkce x v bodě t (v čase t) značíme $x'(t)$ nebo jako podíl diferenciálů, tedy

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t).$$

Zápis $x' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ označuje derivaci funkce x v obecném bodě. Můžeme tedy psát $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ a obecně pro n-tou derivaci

$$x^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$$

nebo stručně $^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$.

Diferenciální rovnice (podrobněji *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu*) je rovnice, v níž vystupuje neznámá funkce $x = x(t)$, její první derivace $x' = x'(t)$ a hodnota nezávisle proměnné t, tedy

$$F(t, x, x') = 0,$$

kde F je nějaká funkce tří proměnných. Řešením rovnice je funkce x, která ji splňuje; podrobněji diferencovatelná funkce x definovaná na nějakém intervalu J, přičemž pro každé $t \in J$ je $\big(t, x(t), x'(t)\big)$ v definičním oboru funkce F a platí $F\big(t, x(t), x'(t)\big) = 0$.

Uvedená rovnice se nazývá *implicitní* nebo *nerozřešená vzhledem k derivaci.* Pokud se podaří derivaci x' z rovnice vyjádřit, dostaneme *explicitní* rovnici nebo rovnici *rozřešenou vzhledem k derivaci.*

Definice 1. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^2$ množina s neprázdným vnitřkem, $f : G \to \mathbb{R}$. Rovnice

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu rozřešená vzhledem k derivaci.*

Řešením této rovnice na nedegenerovaném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ se rozumí diferencovatelná funkce $x : J \to \mathbb{R}$, která splňuje podmínky

$$\big(t, x(t)\big) \in G, \;\; x'(t) = f\big(t, x(t)\big) \text{ pro každé } t \in J;$$

pokud některý krajní bod patří do intervalu J, je v podmínkách příslušná jednostranná derivace.

Graf řešení rovnice (1.1) se nazývá *integrální křivka*.

Příklad: $G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0\}$, $f(t, x) = \dfrac{x}{t}$.
Funkce $x(t) = Ct$, kde $C \in \mathbb{R}$, je řešením rovnice

$$x' = \frac{x}{t} \tag{1.2}$$

na jakémkoliv z intervalů $(t_\alpha, t_\omega) \subseteq (0, \infty)$ nebo $(t_\alpha, t_\omega) \subseteq (-\infty, 0)$. Přestože je tato funkce x definována na celé množině $\mathbb{R}$, není řešením dané rovnice na žádném intervalu, který obsahuje nulu, poněvadž bod $\big(0, x(0)\big) = (0, 0)$ není prvkem množiny G. ■

Tento příklad ukazuje, že diferenciální rovnice může mít více řešení. Tato nejednoznačnost je způsobena možností volby intervalu, na kterém řešení uvažujeme, nebo tím, že více funkcí definovaných na stejném intervalu je řešením dané rovnice.

Definice 2. Nechť $x = x(t)$ je řešením rovnice (1.1) na intervalu J a $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ je řešením rovnice (1.1) na intervalu $\tilde{J}$. Jestliže $\tilde{J} \subseteq J$ a pro každé $t \in \tilde{J}$ je $x(t) = \tilde{x}(t)$, řekneme, že řešení $x = x(t)$ je *prodloužením řešení* $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ a že řešení $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ je *zúžením (restrikcí) řešení* $x = x(t)$. Jestliže řešení $x = x(t)$ rovnice (1.1) není zúžením žádného jiného řešení této rovnice, řekneme, že $x = x(t)$ je *úplným* (*neprodlužitelným*) *řešením* rovnice (1.1), (1.3).

Nadále v této kapitole budeme pod pojmem „řešení“ rozumět úplné řešení.

Definice 3. Nechť G, f mají stejný význam jako v definici 1 a nechť $(t_0, \xi) \in G$ je libovolný bod. Úloha najít řešení rovnice (1.1), které splňuje podmínku

$$x(t_0) = \xi \tag{1.3}$$

se nazývá *počáteční* nebo *Cauchyova úloha*, podmínka (1.3) se nazývá *počáteční* nebo *Cauchyova podmínka*.

Řešení počáteční úlohy (1.1), (1.3) se nazývá *partikulární řešení rovnice* (1.1).

Příklad: Nechť $t_0 \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Funkce $x(t) = \dfrac{\xi}{t_0} t$ je řešením úlohy (1.2), (1.3). Toto řešení je definováno na intervalu

$$J = \begin{cases} (0, \infty), & t_0 > 0, \\ (-\infty, 0), & t_0 < 0. \end{cases}$$ ■

Definice 4. Nechť $g = g(t, C)$ je funkce dvou proměnných taková, že ke každému $(t_0, \xi) \in G$ existuje $C_0 \in \mathbb{R}$ takové, že funkce $x = x(t) = g(t, C_0)$ je řešením počáteční úlohy (1.1), (1.3). Pak se funkce g nazývá *obecné řešení rovnice* (1.1).

Proměnnou t funkce g v předchozí definici považujeme za nezávisle proměnnou reálné funkce $g(\,\cdot\,, C)$ jedné reálné proměnné; proměnnou C považujeme za parametr.

Množina funkcí $g(\,\cdot\,, C)$ takových, že $C \in \mathbb{R}$ a g je obecné řešení rovnice (1.1) nemusí obsahovat všechna řešení této rovnice.

Definice 5. Nechť M je množina všech řešení rovnice (1.1), g je obecné řešení této rovnice a N je množina funkcí jedné proměnné definovaná jako

$$N = \{g(\cdot, C) : C \in \mathbb{R}\}.$$

Řešení $x^* \in M \setminus N$ rovnice (1.1) definované na intervalu J a takové, že ke každému $t_0 \in J$ existuje $C_0 \in \mathbb{R}$, že $g(t_0, C_0) = x^*(t_0)$, se nazývá *singulární.* (Názorněji řečeno: každým bodem grafu singulárního řešení prochází integrální křivka nějakého partikulárního řešení, které není singulárním. Nebo: v každém bodě $\big(t_0, x^*(t_0)\big) = (t_0, \xi)$ singulárního řešení má počáteční úloha (1.1), (1.3) alespoň dvě různá řešení, tj. úloha (1.1), (1.3) není jednoznačně řešitelná.)

Řešení $\tilde{x} \in M \setminus N$ rovnice (1.1) které není singulární, se nazývá *výjimečné.*

Příklad: Nechť $G = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $f(t, x) = 2\sqrt{x}$. Funkce g definovaná předpisem

$$g(t, C) = \begin{cases} 0, & t < C, \\ (t - C)^2, & t \geq C \end{cases}$$

je obecným řešením rovnice

$$x' = 2\sqrt{x}. \tag{1.4}$$

Vskutku,

$$\frac{\mathrm{d}g(t, C)}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} 0, & t < C, \\ 2(t - C), & t \geq C, \end{cases} \qquad 2\sqrt{g(t, C)} = \begin{cases} 0, & t < C, \\ 2|t - C|, & t \geq C \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < C, \\ 2(t - C), & t \geq C, \end{cases}$$

takže každá z funkcí $g(\cdot, C)$ je řešením rovnice (1.4). Pro $\xi \geq 0$ a $C = t_0 - \sqrt{\xi}$ platí $t_0 \geq C$, tedy $g(t_0, t_0 - \sqrt{\xi}) = (t_0 - t_0 + \sqrt{\xi})^2 = \xi$ při libovolných hodnotách $t_0 \in \mathbb{R}$ a $\xi \geq 0$.[1]

Konstantní funkce x^*, $x^*(t) = 0$ je evidentně také řešením rovnice (1.4). Pro libovolné $t_0 \in \mathbb{R}$ platí $x^*(t_0) = 0 = g(t, t_0)$, takže x^* je singulárním řešením této rovnice. ■

Geometrická interpretace diferenciální rovnice

Rovnice (1.1) přiřazuje každému bodu z G právě jednu hodnotu $x' = f(t, x)$, tedy každému bodu $(t_0, \xi) \in G$ lze přiřadit směrový vektor tečny k integrální křivce v bodě (t_0, ξ), tj. přímky $x - \xi = f(t_0, \xi)(t - t_0)$. Tento vektor má souřadnice $\big(1, f(t_0, \xi)\big)$. To znamená, že rovnice (1.1) definuje na G vektorové pole[2]. Toto pole se nazývá *směrové pole rovnice* (1.1).

Každá integrální křivka rovnice (1.1) je *vektorovou čárou*[3] směrového pole. Směrové pole tedy poskytuje představu o průběhu řešení rovnice (1.1).

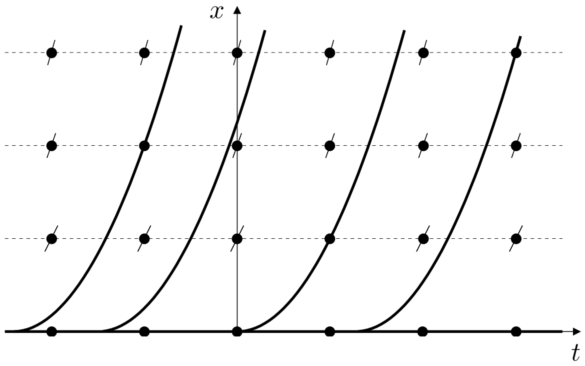
Vrstevnice funkce f, (tj. křivky zadané rovnicí $f(t, x) = c$) se nazývají *izokliny rovnice* (1.1). Jsou to křivky, na nichž mají vektory ze směrového pole stejný směr.

---

[1] Při „mechanickém“ řešení rovnice (1.4) jakožto rovnice se separovanými proměnnými vyjde $x = (t - C)^2$, což by znamenalo, že řešení je pro $t < C$ klesající funkcí. Pravá strana rovnice je však nezáporná, takže řešení musí být neklesající.

[2] Vektorové pole na množině G je zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ množiny G do (konečně rozměrného reálného) vektorového prostoru, tj. $\boldsymbol{\varphi} : G \to \mathbb{R}^n$; v našem případě je $n = 2$.

[3] Vektorová čára vektorového pole $\boldsymbol{\varphi} : G \to \mathbb{R}^2$ je křivka v $\mathbb{R}^n$ taková, že vektor $\boldsymbol{\varphi}(t, x)$ je tečným vektorem k této křivce v bodě (t, x).



Obrázek 1.1: Směrové pole rovnice (1.4). Izokliny jsou vyznačeny tečkovanou čarou, integrální křivky čarou plnou. Integrální křivka odpovídající singulárnímu řešení $x^* \equiv 0$ splývá s osou nezávisle proměnné t.

Příklad: Najdeme směrové pole rovnice (1.4). Její izokliny jsou dány rovnicí

$$2\sqrt{x} = c;$$

konstanta c je nezáporná, neboť odmocninu v reálném oboru definujeme jako nezápornou funkci. Po triviální úpravě dostaneme

$$x = \tfrac{1}{4}c^2.$$

Izokliny jsou tedy přímky rovnoběžné s osou t; na izoklině splývající s osou t i směrový vektor s osou t splývá, tj. má nulový sklon, s rostoucí vzdáleností izokliny od osy t roste sklon směrového vektoru. Situace je znázorněna na Obr. 1.1. ■

Poznámka k terminologii a symbolice

Rovnice (1.1) se nazývá *diferenciální,* přestože se v ní žádný diferenciál neobjevuje; v rovnici vystupují jen nezávisle proměnná, hledaná funkce a její derivace. Terminologie je ale ospravedlněna skutečností, že derivaci můžeme zapsat jako podíl diferenciálů a rovnici (1.1) přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x),$$

nebo po formální úpravě

$$f(t, x)\mathrm{d}t - \mathrm{d}x = 0.$$

Diferenciální rovnici tedy můžeme zapsat jako rovnici, v níž se vyskytují závisle a nezávisle proměnná a jejich diferenciály, tedy ve tvaru

$$\Phi(t, x, \mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = 0.$$

Z tohoto zápisu však není úplně jasné, která z veličin x a t je závisle a která nezávisle proměnná. To někdy nemusí být nedostatek, ale výhoda. Zejména pokud proměnné x a t interpretujeme geometricky jako souřadnice bodu, není žádná z nich „privilegovaná“.

Exkurs: geometrický přístup a elementární metody řešení diferenciálnch rovnic

Ke studiu diferenciálních rovnic mimo jiné vedla úloha z analytické geometrie: napsat rovnici křivky v rovině dané souřadnými osami x a y, pokud známe její tečnu v libovolném bodě; můžeme navíc požadovat, aby křivka procházela daným bodem.

Diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ (podrobněji řečeno diferenciály standardních souřadnicových funkcí) si představujeme jako „nekonečně malé přírůstky křivky ve směru jednotlivých os“; trochu přesněji řečeno, jako přírůstky naměřené na tečně. Tečný vektor ke křivce v obecném bodě tedy má souřadnice $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$. V zadání úlohy je, že známe tečný vektor v každém bodě; řekněme, že to jsou vektory $\boldsymbol{\tau}(x, y)$. Nemůžeme ovšem bezprostředně pracovat se vztahem

$$(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \boldsymbol{\tau}(x, y),$$

neboť na levé straně by byl vektor „nekonečně krátký“, vektor „skoro nulové délky“, na pravé straně vektor nenulový; normovat „skoro nulový vektor“ nedává rozumný smysl. Poněvadž ale známe tečný vektor, známe také vektor normálový $\boldsymbol{\nu}(x, y)$; ten je kolmý na vektor tečný $\boldsymbol{\tau}(x, y)$, a tedy také na infinitezimální vektor $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$. Jinak řečeno, skalární součin vektorů tečného a normálového je nulový. Pokud tedy normálový vektor v bodě (x, y) rozepsaný do souřadnic je

$$\boldsymbol{\nu}(x, y) = \big(f(x, y), g(x, y)\big),$$

pak musí platit

$$f(x, y)\mathrm{d}x + g(x, y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.5}$$

Rovnice hledané křivky je tedy řešením této diferenciální rovnice v tradičním zápisu pomocí diferenciálů. Její řešení, tedy hledanou křivku, nazýváme *integrální křivkou* této rovnice. Požadavku, aby křivka procházela daným bodem (x_0, y_0), říkáme *Cauchyova podmínka.* Můžeme ji také zapsat v některém z tvarů

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{nebo} \quad x(y_0) = x_0. \tag{1.6}$$

Diferenciální rovnici (1.5) spolu s Cauchyovou podmínkou nazýváme *Cauchyův problém* nebo *Cauchyova úloha.*

Slovním spojením „řešit diferenciální rovnici elementárními metodami“ rozumíme: „úlohu najít řešení diferenciální rovnice nebo Cauchyovy úlohy převést na nějakou jinou – jednodušší – úlohu“. Přitom za „jednodušší úlohu“ považujeme takovou, která se objevuje v kursu matematické analýzy před probíráním diferenciálních rovnic. Často jde o výpočet integrálů, proto se elementárním metodám řešení také říkává „řešení v kvadraturách“.

Při řešení diferenciálních rovnic elementárními metodami bývá užitečné rovnice zapisovat ve tvaru (1.5) s diferenciály.

Příklad: Najdeme rovnici kružnice se středem v počátku souřadnic, která prochází bodem $(1, 2)$.

Tečna ke kružnici je v každém bodě kolmá k průvodiči (úsečce spojující uvažovaný bod a střed kružnice), směrový vektor průvodiče v bodě (x, y) je $(x, y)-(0, 0) = (x, y)$. Dostáváme tak diferenciální rovnici

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0,$$

tedy rovnost diferenciálů

$$x\mathrm{d}x = -y\mathrm{d}y.$$

Z rovnosti diferenciálů plyne rovnost integrálů (až na integrační konstantu). A poněvadž hledaná kružnice má procházet bodem $(1, 2)$ (můžeme také říci, že křivka z bodu $(1, 2)$ vychází, že bod $(1, 2)$ je jejím počátečním bodem), dostaneme

$$\int_1^x \xi \mathrm{d}\xi = -\int_2^y \eta \mathrm{d}\eta.$$

To znamená, že $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}1^2 = -\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}2^2\right)$, po úpravě

$$x^2 + y^2 = 5.$$

Tento výsledek zcela odpovídá tomu, co nás naučili na střední škole. ■

Exaktní rovnice

Jedná se o diferenciální rovnici ve tvaru (1.5), kde funkce f a g splňují identitu

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y). \tag{1.7}$$

Výraz na levé straně rovnice (1.5) je za předpokladu (1.7) totálním diferenciálem[4] nějaké kmenové funkce F. Připomeňme si, že kmenová funkce splňuje podmínky

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = g(x,y). \tag{1.8}$$

Je-li F kmenovou funkcí diferenciálu na levé straně rovnice (1.5), pak rovnost

$$F(x,y) = c,$$

kde c je reálná konstanta, je implicitním vyjádřením řešení rovnice (1.5). O tom se snadno přesvědčíme přímým dosazením.

Hledání řešení rovnice (1.5) jsme tedy převedli na problém hledání kmenové funkce diferenciálu a na vyšetřování implicitně zadané funkce.

Spolu s rovnicí (1.5) uvažujme Cauchyovu podmínku (1.6). Bod (x_0, y_0) musí samozřejmě ležet v průniku definičních oborů funkcí f a g. Budeme hledat takovou kmenovou funkci F, pro niž platí $F(x_0, y_0) = 0$.

První z podmínek (1.8) splňuje funkce F daná předpisem

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\mathrm{d}\xi + \varphi(y), \tag{1.9}$$

kde φ je nějaká diferencovatelná funkce, pro niž platí $\varphi(x_0) = 0$. Aby byla splněna druhá z podmínek (1.8), musí platit

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\mathrm{d}\xi + \varphi(y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\mathrm{d}\xi + \varphi'(y) = g(x,y)\,;$$

symbol $'$ nyní označuje obyčejnou derivaci podle proměnné y. Z předchozí rovnosti a z podmínky $\varphi(y_0) = 0$ plyne

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y}\left[g(x,\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}\int_{x_0}^{x} f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\eta = \int_{y_0}^{y} g(x,\eta)\mathrm{d}\eta - \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\mathrm{d}\xi + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\mathrm{d}\xi.$$

Dosazením do rovnosti (1.9) dostaneme hledanou kmenovou funkci F. Řešení Cauchyovy úlohy (1.5), (1.6) je tedy implicitně dáno rovností

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} g(x,\eta)\mathrm{d}\eta = 0. \tag{1.10}$$

[4] Viz např. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, kap. 4

Analogickým postupem (s opačným pořadím integrování) můžeme najít řešení úlohy (1.5), (1.6) v implicitním tvaru

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} g(x_0, \eta)\mathrm{d}\eta = 0.$$

Hledání řešení Cauchyovy úlohy (1.5), (1.6) jsme tedy v případě exaktní rovnice převedli na problém výpočtu integrálů a na vyšetřování implicitně zadané funkce.

Speciální případ: rovnice se separovanými proměnnými.

Jedná se o rovnici tvaru

$$f(x)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y = 0, \tag{1.11}$$

v níž funkce f a g jsou funkcemi právě jedné proměnné. Tato rovnice je evidentně exaktní.

Křivka, která splňuje rovnici (1.11) a prochází bodem (x_0, y_0) má podle (1.10) obecnou rovnici

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} g(\eta)\mathrm{d}\eta = 0.$$

Obecněji můžeme mluvit o rovnicích se *separovatelnými proměnnými,* pokud v rovnici (1.5) jsou funkce f a g součinem dvou funkcí jedné proměnné. Jedná se tedy o rovnice

$$f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}x + g_1(x)g_2(y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.12}$$

Pokud je příslušná Cauchyova podmínka taková, že $f_2(y_0) \neq 0 \neq g_1(x_0)$, můžeme rovnici (1.12) vydělit výrazem $f_2(y)g_1(x)$ a dostaneme rovnici se separovanými proměnnými

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\mathrm{d}x + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}\mathrm{d}y = 0.$$

Je-li $f_2(y_0) = 0$ nebo $f_1(x_0) = 0$, ale v ryzím okolí bodu (x_0, y_0) je $f_2(y) \neq 0 \neq g_1(x)$, provedeme stejnou úpravu a řešení Cauchyovy úlohy dostaneme v implicitním tvaru

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f_1(\xi)}{g_1(\xi)}\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} \frac{g_2(\eta)}{f_2(\eta)}\mathrm{d}\eta = 0,$$

pokud oba integrály konvergují. V případě, že $f_2(y_0) = 0$ (resp. $g_1(x_0) = 0$), je přímka daná rovnicí $y = y_0$ (resp. $x = x_0$) integrální křivkou rovnice. Řešení $y \equiv y_0$ (resp. $x \equiv x_0$) může být singulárním řešením této rovnice.

Integrační faktor

Rovnici (1.12), která obecně není exaktní, jsme vynásobili výrazem

$$\varrho(x, y) = \frac{1}{g_1(x)f_2(y)},$$

a tím ji převedli na rovnici exaktní. Můžeme obecně hledat nenulový výraz $\varrho = \varrho(x, y)$ takový, že při daných funkcích $f = f(x, y)$, $g = g(x, y)$ je rovnice

$$\varrho(x, y)f(x, y)\mathrm{d}x + \varrho(x, y)g(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1.13}$$

exaktní. Výraz $\varrho(x, y)$ se pak nazývá *integrační faktor* dané rovnice. V takovém případě musí platit

$$\frac{\partial}{\partial y}\varrho f = \frac{\partial}{\partial x}\varrho g, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y}f + \varrho\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varrho}{\partial x}g + \varrho\frac{\partial g}{\partial x}$$

(pro stručnost zápisu nepíšeme nezávisle proměnné). Z těchto rovností dostaneme vztah

$$g\frac{\partial\varrho}{\partial x} - f\frac{\partial\varrho}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)\varrho. \tag{1.14}$$

To znamená, že funkce ϱ splňuje rovnici, v níž se vyskytují její parciální derivace, tj. funkce ϱ je řešením parciální diferenciální rovnice. Řešit parciální diferenciální rovnici není „jednodušší úloha“, než řešit obyčejnou diferenciální rovnici. Problém hledání integračního faktoru tedy nemůžeme prohlásit za vyřešený.

Pokud by však integrační faktor ϱ byl funkcí pouze jedné proměnné x, $\varrho = \varrho(x)$, pak by

$$\frac{\partial\varrho}{\partial y} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial\varrho}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}x}.$$

Parciální rovnice (1.14) by tak přešla na rovnici obyčejnou

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)\varrho,$$

nebo v diferenciálním tvaru

$$\frac{1}{\varrho}\mathrm{d}\varrho + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x = 0. \tag{1.15}$$

Pokud je výraz před diferenciálem $\mathrm{d}x$ funkcí pouze jedné proměnné x, pak je rovnice (1.15) rovnicí se separovanými proměnnými.

Dostáváme tak závěr: Je-li

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0,$$

pak existuje integrační faktor $\varrho = \varrho(x)$ rovnice (1.5); tento integrační faktor je řešením obyčejné diferenciální rovnice (1.15).

Analogicky odvodíme: Je-li

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)x = 0,$$

pak existuje integrační faktor $\varrho = \varrho(y)$ rovnice (1.5), který je řešením obyčejné diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$\frac{1}{\varrho}\mathrm{d}\varrho + \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Rovnice na rovnici exaktní transformovatelné

Některé speciální rovnice lze vhodnou substitucí nebo úpravou (případně kombinací obou postupů) na rovnici exaktní převést. Jedná se zejména o následující typy rovnic:

(i) *Rovnice homogenní.*

Nejprve připomeneme definici: Funkce $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se nazývá *homogenní řádu k,* pokud pro každou reálnou konstantu κ platí $h(\kappa x, \kappa y) = \kappa^k h(x, y)$.

Homogenní diferenciální rovnice je rovnice tvaru (1.5), v níž obě funkce f a g jsou homogenní stejného řádu. Takovou rovnici můžeme upravit na tvar

$$x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + x^k g\left(1, \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y = 0$$

a po vydělení výrazem x^k dostaneme

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + g\left(1, \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.16}$$

Odtud (formálně) plyne $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{f\left(1, \frac{y}{x}\right)}{g\left(1, \frac{y}{x}\right)}$.

Dále zavedeme substituci

$$u = \frac{y}{x}. \tag{1.17}$$

Pak $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{f(1,u)}{g(1,u)}$ a dále

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{x}\left(\frac{f(1,u)}{g(1,u)} + u\right).$$

Z této rovnosti dostaneme

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{g(1,u)}{f(1,u) + ug(1,u)}\mathrm{d}u = 0,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, tedy speciální případ rovnice exaktní.
Ještě poznamenejme, že při označení $\varphi(\xi) = f(1,\xi)$ a $\psi(\xi) = g(1,\xi)$ můžeme rovnici (1.16) přepsat na tvar

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \psi\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y = 0;$$

takové rovnici říkáme *homogenní v užším smyslu.*

(ii) *Rovnice typu*

$$f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)\mathrm{d}x + g\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.18}$$

Rozlišíme tři případy:

1. $c = \gamma = 0$. Označíme

   $$F(x,y) = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x + \beta y}\right), \quad G(x,y) = g\left(\frac{ax+by}{\alpha x + \beta y}\right)$$

   a rovnici přepíšeme jako

   $$F(x,y)\mathrm{d}x + G(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

   Přitom platí

   $$F(\kappa x, \kappa y) = f\left(\frac{a\kappa x + b\kappa y}{\alpha\kappa x + \beta\kappa y}\right) = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x + \beta y}\right) = F(x,y)$$

   a stejným výpočtem $G(\kappa x, \kappa y) = G(x,y)$. Obě funkce F a G jsou homogenní řádu nula. Rovnice (1.18) je v tomto případě homogenní a můžeme ji řešit substitucí (1.17).

2. $\alpha = \beta = 0$. V tomto případě zavedeme substituci

   $$u = \frac{ax+by+c}{\gamma},$$

   takže rovnici přepíšeme ve tvaru

   $$f(u)\mathrm{d}x + g(u)\mathrm{d}y = 0$$

   a z ní vyjádříme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{f(u)}{g(u)}$. Dále platí

   $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\gamma}\left(a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(a - b\frac{f(u)}{g(u)}\right) = \frac{ag(u) - bf(u)}{\gamma g(u)},$$

takže daná rovnice se transformuje na tvar

$$\mathrm{d}x + \frac{\gamma g(u)}{bf(u) - ag(u)}\mathrm{d}u = 0,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

3. $c^2 + \gamma^2 \neq 0 \neq \alpha^2 + \beta^2$. Nejprve výraz $\dfrac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}$ upravíme.
   Pokud $\alpha \neq 0$, dostaneme

$$\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{1}{\alpha}\left(a + \frac{(\alpha b - a\beta)y + \alpha c - a\gamma}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right),$$

   pokud $\beta \neq 0$, dostaneme

$$\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{1}{\beta}\left(b - \frac{(\alpha b - a\beta)y + \gamma b - \beta c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right).$$

   Nyní mohou nastat dvě možnosti:

   - $\alpha b - a\beta = 0$. Z předchozího výpočtu pak vidíme, že rovnice je stejného typu, jako v případě 2.
   - $\alpha b - a\beta \neq 0$. Za tohoto předpokladu existuje jednoznačné řešení m, n soustavy algebraických lineárních rovnic

$$\begin{aligned} am + bn &= c, \\ \alpha m + \beta n &= \gamma. \end{aligned}$$

     S využitím tohoto řešení zavedeme substituce

$$\xi = x + m, \quad \eta = y + n. \tag{1.19}$$

     pak $\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}x$,$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\eta$ a

$$\begin{aligned} \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} &= \frac{a(\xi - m) + b(\eta - n) + c}{\alpha(\xi - m) + \beta(\eta - n) + \gamma} = \\ &= \frac{a\xi + b\eta - (am + bn) + c}{\alpha\xi + \beta\eta - (am + bn) + \gamma} = \frac{a\xi + b\eta}{\alpha\xi + \beta\eta}. \end{aligned}$$

     To znamená, že substituce (1.19) převede rovnici (1.18) na rovnici stejného typu, jaký je v případě 1.

(iii) *Rovnice lineární* je rovnice, v níž je podíl diferenciálů (derivace) vyjádřen jako výraz lineární v závisle proměnné, tj.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y + b(x), \quad \text{nebo} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = a(y)x + b(y),$$

kde a, b jsou nějaké integrabilní funkce jedné proměnné, funkce a je nenulová. Budeme se věnovat první z rovnic ve tvaru

$$\big(a(x)y + b(x)\big)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0; \tag{1.20}$$

druhá rovnice z ní vznikne záměnou proměnných.

Jedná se o rovnici tvaru (1.5), kde $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ a $g(x, y) = -1$. Poněvadž

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = -a(x) \neq 0,$$

rovnice není exaktní. Budeme tedy pro ni hledat integrační faktor. Poněvadž

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}a(x)=0,$$

existuje integrační faktor tvaru $\varrho=\varrho(x)$. Ten je řešením rovnice se separovanými proměnnými

$$\frac{1}{\varrho}\mathrm{d}\varrho+a(x)\mathrm{d}x=0.$$

Tato rovnice má podle (1.10) řešení v implicitním tvaru zapsaném rovností

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{1}{r}\mathrm{d}r+\int_{x_0}^{x}a(\xi)\mathrm{d}\xi=0,\quad \text{po úpravě}\quad \ln\left|\frac{\varrho}{\varrho_0}\right|=-\int_{x_0}^{x}a(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Volíme $\varrho_0=1$ (nejde nám totiž o nalezení všech možných integračních faktorů, ale stačí nám jen jeden) a dostaneme integrační faktor ve tvaru

$$\varrho(x)=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(\xi)\mathrm{d}\xi}.$$

Rovnici (1.20) vynásobíme tímto integračním faktorem a dostaneme rovnici exaktní

$$\big(a(x)y+b(x)\big)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}y=0,$$

která má podle (1.10) řešení zapsané v implicitním tvaru

$$\int_{x_0}^{x}\big(a(\xi)y_0+b(\xi)\big)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi}a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\xi-\int_{y_0}^{y}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\eta=0. \tag{1.21}$$

Nyní vypočítáme

$$\int_{x_0}^{x}\big(a(\xi)y_0\big)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi}a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\xi=-y_0\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi}a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\xi=-y_0\left(\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}-1\right),$$

$$\int_{y_0}^{y}\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta=(y-y_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

dosadíme do (1.21),

$$\int_{x_0}^{x}b(\xi)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{\xi}a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\xi+y_0-y\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(\xi)\mathrm{d}\xi}=0.$$

Odtud vyjádříme řešení rovnice (1.20) ve tvaru

$$y=y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}a(\xi)\mathrm{d}\xi}+\int_{x_0}^{x}b(\xi)\mathrm{e}^{\int_{\xi}^{x}a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\xi. \tag{1.22}$$

(iv) *Rovnice Bernoulliova*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y+b(x)y^r,$$

kde $r \neq 1$ je nějaká reálná konstanta.
Zavedeme substituci

$$u = y^{1-r}.$$

Pak

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (1-r)y^{-r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-r)y^{-r}\big(a(x)y + b(x)y^r\big) = (1-r)\big(a(x)y^{1-r} + b(x)\big).$$

Bernoulliova rovnice se tedy transformuje na rovnici

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (1-r)a(x)u + (1-r)b(x),$$

což je rovnice lineární.

1.2 Systémy diferenciálních rovnic

1.2.1 Vektorové a maticové funkce

Reálný n-rozměrný vektor $\boldsymbol{x}$ je prvkem prostoru $\mathbb{R}^n$. *Složky (standardní souřadnice) vektoru* $\boldsymbol{x}$ budeme značit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nebo $(\boldsymbol{x})_1, (\boldsymbol{x})_2, \ldots, (\boldsymbol{x})_n$.

Matice A *o m řádcích a n sloupcích* je prvkem prostoru $\mathbb{R}^{mn}$. Její složku na i-tém řádku a v j-tém sloupci budeme značit a_{ij} nebo $(\mathsf{A})_{ij}$. Vektor z prostoru $\mathbb{R}^n$ budeme chápat jako matici o n řádcích a jednom sloupci.

Je-li tedy $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{mn}$, můžeme psát

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{x})_i = x_i, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (\mathsf{A})_{ij} = a_{ij}, \quad (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k.$$

Normy vektorů a matic

Normu vektoru $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, podrobněji *vektorovou 1-normu* nebo *součtovou normu* definujeme předpisem

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Normu matice $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, podrobněji *maticovou 1-normu* nebo *součtovou normu* definujeme předpisem

$$\|\mathsf{A}\| = \|\mathsf{A}\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Na množině vektorů zavádíme metriku $\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, na množině matic zavádíme metriku $\varrho(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \|\mathsf{A} - \mathsf{B}\|$. Jedná se o součtovou neboli taxíkářskou metrikou, sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, I.1.1.2.iii.

• Platí: $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\mathsf{A}\|\ \|\boldsymbol{x}\|$. Této vlastnosti se říká, že *maticová norma je souhlasná s vektorovou normou.*
Důkaz: Pro libovolné $i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $|a_{ik}| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Odtud plyne

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{m} |(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_1| = \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| \ \leq \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|x_k| \ =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| \right) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \ = \ \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right) \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right). \ \square$$

Spojitost, derivace a integrál vektorových a maticových funkcí

Vektorová funkce, podrobnněji n-vektorová funkce, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je zobrazení $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, maticová funkce, podrobněji čtvercová n-rozměrná maticová funkce, $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$ je zobrazení $\mathsf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Na množině $\mathbb{R}$ uvažujeme přirozenou metriku, na množině R^n, resp. R^{n^2}, uvažujeme příslušnou součtovou metriku. Spojitost vektorové, resp. maticové, funkce chápeme jako spojitost příslušného zobrazení metrických prostorů. Podrobněji: vektorová funkce $\boldsymbol{x}$ (resp. maticová funkce A) je spojitá v bodě t_0 svého definičního oboru, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že pro všechna t z definičního oboru funkce $\boldsymbol{x}$ z nerovnosti $|t - t_0| < \delta$ plyne nerovnost $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \varepsilon$ (resp. $\|\mathsf{A}(t) - \mathsf{A}(t_0)\| < \varepsilon$). Vektorová (resp. maticová) funkce je spojitá právě tehdy, když všechny její složky jsou spojité.

Limitu v bodě t_0, derivaci v obecném bodě t a integrál v mezích od t do t_0 vektorové, resp. maticové, funkce definujeme vztahy (v uvedeném pořadí)

$$\left(\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{x}(t)\right)_i = \lim_{t\to t_0} x_i(t), \quad \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right)_i = \big(\boldsymbol{x}'(t)\big)_1 = \big(x_i'(t)\big), \quad \left(\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)_i = \int_{t_0}^{t} x_i(s)\mathrm{d}s,$$

$$\left(\lim_{t\to t_0} \mathsf{A}(t)\right)_{ij} = \lim_{t\to t_0} a_{ij}(t), \quad \left(\frac{\mathrm{d}\mathsf{A}}{\mathrm{d}t}(t)\right)_{ij} = \big(\mathsf{A}'(t)\big)_{ij} = a_{ij}'(t), \quad \left(\int_{t_0}^{t} \mathsf{A}(s)\mathrm{d}s\right)_{ij} = \int_{t_0}^{t} a_{ij}(s)\mathrm{d}s.$$

1.2.2 Vektorová rovnice prvního řádu

Definice 6. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ množina s neprázdným vnitřkem, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$. Rovnice

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{1.23}$$

se nazývá *systém n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu* nebo *n-vektorová obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu.*

Rovnice (1.23) se od rovnice (1.1) liší pouze tím, že některé symboly (konkrétně hledaná funkce $\boldsymbol{x}$ a funkce $\boldsymbol{f}$ na pravé straně) jsou tučné, označují vektorové proměnné. Proto můžeme zopakovat vše, co je uvedeno v 1.1 mezi Definicí 1 a geometrickou interpretací diferenciální rovnice. Všechny pojmy vztahující se k diferenciální rovnici (1.1) jsou po příslušné záměně skalárů za vektory použitelné i na systémy diferenciálních rovnic.

Vektorovou rovnici můžeme rozepsat do složek

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ \vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$ k rovnici (1.23) zadáváme pro systém rozepsaný do složek ve tvaru

$$x_1(t_0) = \xi_1,\ x_2(t_0) = \xi_2,\ \ldots,\ x_n(t_0) = \xi_n. \tag{1.24}$$

Obecné řešení n-rozměrného systému $g(\,\cdot\,, \boldsymbol{C})$ závisí na n-rozměrné konstantě, tedy na n parametrech.

1.3 Skalární rovnice n-tého řádu

Definice 7. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ množina s neprázdným vnitřkem, $f : G \to \mathbb{R}$. Rovnice

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right) \tag{1.25}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci.*

Řešením této rovnice na nedegenerovaném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ se rozumí n-krát diferencovatelná funkce $x : J \to \mathbb{R}$, která pro každé $t \in J$ splňuje podmínky

$$\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) \in G, \quad x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right).$$

Rovnici n-tého řádu lze převést na systém prvního řádu:

• Nechť funkce x je řešením rovnice (1.25). Definujme funkce

$$x_1 = x, \qquad x_{k+1} = x_k' \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Pak

$$x_{k+1} = x_k' = x_{k-1}'' = x_{k-2}''' = \cdots = x_1^{(k)} = x^{(k)} \text{ pro } k = 2, 3, \ldots, n,$$

$$x' = x_1',\ x'' = x_3,\ x''' = x_4,\ \ldots,\ x^{(n-1)} = x_n,$$

takže

$$x_n' = x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right) = f(t, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

To znamená, že funkce $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou řešením systému rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1.26}$$

• Naopak, nechť vektorová funkce $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je řešením systému rovnic (1.26). Pak pro její složky platí

$$x_2 = x_1',\ x_3 = x_2' = x_1'',\ x_4 = x_3' = x_1''',\ \dots, x_n = x_1^{(n-1)},$$

takže

$$x_1^{(n)} = x_n' = f(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f\left(t, x_1, x_1', x_1'', \dots, x_1^{(n-1)}\right).$$

To znamená, že první složka řešení systému (1.26) je řešením rovnice (1.25).

Celkem jsme ukázali, že rovnice (1.25) je ekvivalentní se systémem (1.26). Z této úvahy také plyne, že *počáteční (Cauchyovu) podmínku* pro rovnici (1.25) zadáváme ve tvaru

$$x(t_0) = \xi_1,\ x'(t_0) = \xi_2,\ x''(t_0) = \xi_3, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \xi_n, \tag{1.27}$$

kde $(t_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in G$.

Úplné řešení, partikulární a obecné řešení rovnice (1.25) definujeme analogicky jako u rovnic prvního řádu. Obecné řešení rovnice n-tého řádu závisí na n parametrech.

Příklad: Pohyb hmotného bodu o hmotnosti m, který je vázán na přímku a na který působí síla F závislá na poloze lze popsat skalární rovnicí druhého řádu

$$x'' = \frac{1}{m} F(x),$$

kde $x = x(t)$ označuje polohu bodu v čase t, sr. Prolog, str. 7. Stejně dobře ho však lze popsat systémem dvou rovnic

$$x' = v,$$

$$v' = \frac{1}{m} F(x);$$

$v = v(t)$ označuje rychlost bodu v čase t. ■

Kapitola 2

Obecné vlastnosti obyčejných diferenciálních rovnic

Aby počáteční úloha pro diferenciální rovnici mohla být popisem (modelem) nějakého reálného procesu, musí mít několik vlastností:

1. *Existuje její řešení.* Diferenciální rovnici považujeme za vyjádření (nebo alespoň idealizaci nebo aproximaci) nějakého „zákona" (přírodního, ekonomického, sociologického, . . .), tj. pravidla vyabstrahovaného metodami příslušné vědní disciplíny. Proces se podle tohoto pravidla skutečně vyvíjí, tj. řešení počáteční úlohy musí existovat.

2. *Řešení počáteční úlohy je jediné.* Je-li proces deterministický, ze znalosti počátečního stavu a pravidla vývoje jednoznačně plyne jeho další vývoj.

3. *Řešení musí záviset na parametrech rovnice a počátečních podmínkách spojitě.* Všechny konstanty (parametry modelu) a počáteční hodnoty můžeme změřit jen s omezenou přesností. A je žádoucí, aby malá chyba měření nezpůsobila velkou změnu řešení v konečném čase.

4. *Řešení musí být definováno v dostatečně dlouhém čase.* Modelovaný proces určitě nějakou dobu probíhá (abychom si ho vůbec povšimli) a nějakou dobu ještě probíhat bude (aby mělo smysl ho modelovat).

Proto je potřebné se zabývat otázkou, jaké podmínky kladené na pravou stranu rovnice, zaručí existenci řešení. Jinak řečeno, jak poznáme, že pravidlo vývoje není z procesu vyabstrahováno naprosto špatně.

Jednoznačně se vyvíjejí procesy studované klasickou (nekvantovou) fyzikou. Procesy komplexnější (kterým se věnuje např. vývojová a evoluční biologie, ekonomie, sociologie a podobně) již jednoznačné být nemusí, může dojít k nějakému „větvení" procesu. Proto je užitečné studovat, kdy je řešení rovnice jediné a za jakých podmínek může dojít k nejednoznačnosti řešení (tj. k nepredikovatelnosti vývoje). Příjemným zjištěním přitom bude, že dostatečné podmínky pro jednoznačnost řešení počáteční úlohy jsou také dostatečnými podmínkami pro spojitou závislost řešení na parametrech a počátečních hodnotách. Vývoj deterministických procesů můžeme pro nepříliš vzdálený časový horizont predikovat dostatečně přesně, pokud známe deterministické pravidlo vývoje a dostatečně přesně měříme aktuální hodnoty. V této formulaci zůstaly velice vágní pojmy „dostatečně přesně" a „nepříliš vzdálený". Co přesně znamenají podstatně závisí na charakteru procesu.

Udržitelnost bývá důležitou vlastností procesů, proto je dobré mít jasno v tom, do jakého času řešení počáteční úlohy existuje. Zejména vyjasnit, zda existuje nějaká konečná hranice, za niž řešení prodloužit nelze, nebo zda je vývoj (potenciálně) nekonečný.

V první části se budeme věnovat počáteční úloze pro skalární rovnici. V tomto případě jsou totiž všechny úvahy jednodušší a názornější. Nejprve ukážeme dva způsoby, jak najít řešení dané úlohy jako limitu aproximací. Ty mimochodem představují jednoduché metody, jak numericky najít přibližné (a pro praxi dostatečně přesné) řešení. Dále najdeme horní a dolní odhad hledaného řešení.

Pro skalární rovnici s analytickou pravou stranou (funkci na pravé straně rovnice lze vyjádřit ve tvaru mocninné řady) ukážeme ještě jednu metodu aproximace řešení – vyjádření řešení pomocí mocninné řady.

Úvahy o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro (skalární) diferenciální rovnici pak zobecníme na systémy rovnic (na vektorovou diferenciální rovnici), v části 2.2 lokálně (v okolí počátečního bodu) a v části 2.3 globálně (na celém intervalu řešení rovnice). V poslední části 2.4 kapitoly ukážeme, jak odhadnout meze, ve kterých se bude řešení (vektorové) rovnice pohybovat.

2.1 Existence, jednoznačnost a odhad řešení skalární ODR

Uvažujme počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu ve standardním tvaru

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = \xi. \tag{2.1}$$

Na rovnost

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$$

definující řešení příslušné diferenciální rovnice se můžeme prostě dívat jako na rovnost dvou funkcí jedné reálné proměnné t. Integrací v mezích od t_0 do t dostaneme

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\,\mathrm{d}s,$$

neboli

$$x(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\,\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

Naopak, derivováním poslední rovnosti podle proměnné t dostaneme $x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$. Navíc, pro funkci definovanou pravou stranou rovnosti (2.2) platí $x(t_0) = \xi$. Vidíme tedy, že počáteční úloha pro diferenciální rovnici (2.1) je ekvivalentní s integrální rovnicí (2.2).

K řešení počáteční úlohy (2.1) se budeme snažit přiblížit třemi různými způsoby. Lze ukázat, že v limitě jsou tato přiblížení (aproximace) rovna řešení dané úlohy, což znamená, že řešení existuje a navíc je výsledkem nějakého konkrétního limitního procesu.

2.1.1 Eulerovy polygony

Řešení úlohy (2.1) se spojitou funkcí f budeme aproximovat funkcí po částech lineární a spojitou. Jinak řečeno, integrální křivku nahradíme lomenou čarou spojující body (t_0, ξ), (t_1, x_1), (t_2, x_2), $\dots$.

Podrobněji: Zvolíme časové okamžiky $t_1, t_2, t_3, \dots$ (body na ose t) tak, že $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 \cdots$. Dále položíme $x_0 = \xi$ a budeme předpokládat, že známe hodnoty $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ takové, že „dobře aproximují“ řešení úlohy v okamžicích $t_1, t_2, t_3, \dots$, tj.

$$x_1 \approx x(t_1),\ x_2 \approx x(t_2),\ \dots,\ x_k \approx x(t_k).$$

Ze spojitosti funkce f plyne, že

$$f\big(t_1, x(t_1)\big) \approx f(t_1, x_1),\ f\big(t_2, x(t_2)\big) \approx f(t_2, x_2),\ \dots,\ f\big(t_k, x(t_k)\big) \approx f(t_k, x_k).$$

Podle (2.2) pro hodnotu řešení x dané úlohy platí

$$x(t_{k+1}) = \xi + \int\limits_{t_0}^{t_{k+1}} f\big(s, x(s)\big)\mathrm{d}s.$$

Integrál aproximujeme integrálním součtem[1] a využijeme spojitost funkce f. Dostaneme

$$\xi + \int\limits_{t_0}^{t_{k+1}} f\big(s, x(s)\big)\mathrm{d}s \approx \xi + \sum_{i=0}^{k}(t_{i+1} - t_i) f\big(t_i, x(t_i)\big) \approx \xi + \sum_{i=0}^{k}(t_{i+1} - t_i) f(t_i, x_i).$$

Poslední výraz vezmeme jako aproximaci hodnoty řešení v bodě t_{k+1}, tj.

$$x_{k+1} = \xi + \sum_{i=0}^{k}(t_{i+1} - t_i) f(t_i, x_i) \approx x(t_{k+1}).$$

Z počáteční hodnoty $x_0 = \xi$ tímto způsobem postupně získáváme jednotlivé aproximace řešení

$$x_1 = x_0 + (t_1 - t_0) f(t_0, x_0),\ x_2 = x_1 + (t_2 - t_1) f(t_1, x_1),\ x_3 = x_2 + (t_3 - t_2) f(t_2, x_2),$$
$$\dots\ x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k) f(t_k, x_k), \dots$$

atd. Výsledek můžeme shrnout:

Eulerův polygon příslušný k úloze (2.1) *a dělení* $D = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = t_0 + a\}$ je lomená čára, spojující body (t_0, x_0), (t_1, x_1),…, (t_n, x_n). Přitom hodnoty x_i, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ jsou definovány rekurentně vztahy

$$x_0 = \xi, \quad x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k) f(t_k, x_k),\ k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Eulerův polygon je zkonstruován tak, že aproximuje graf řešení dané úlohy. Lze tedy očekávat, že se zjemňováním dělení intervalu J (tj. s růstem počtu dělících bodů n a se zmenšováním normy dělení $\nu(D) = \max\{|t_i - t_{i-1}| : i = 1, 2, \dots, n\}$) se bude Eulerův polygon „přibližovat“ ke grafu řešení úlohy (2.1), k integrální křivce rovnice.

Provedená úvaha ještě nedokazuje, že posloupnost Eulerových polygonů pro $\nu(D) \to 0$ skutečně konverguje; a pokud konverguje k nějaké funkci, tak že tato funkce je řešením dané úlohy. Korektní důkaz – který samozřejmě existuje – je analogií konstrukce Riemannova integrálu.

Po provedení důkazu je jisté, že řešení dané úlohy existuje a navíc, že ho lze najít jako limitu posloupnosti Eulerových polygonů. Platí tedy:

---

[1] Přesněji řečeno, jedním z možných tvarů integrálního součtu. Ten uvedený odpovídá aproximaci integrálu pomocí obdélníkového pravidla.

Tvrzení 1. Je-li funkce $f : [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}$ spojitá a ohraničená, pak má úloha (2.1) řešení definované na intervalu $[t_0, t_0 + a]$.

Zobecněním tohoto tvrzení je Peanova věta o existenci řešení počáteční úlohy, tj. Věta 2.

Pokud chceme skutečně Eulerovým polygonem aproximovat řešení nějaké úlohy, je nutné zvolit konkrétní interval $[t_0, t_0 + a]$ na kterém řešení hledáme, a zvolit konkrétní dělení $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = t_0 + a\}$ tohoto intervalu. Pro výpočet je nejjednodušší volit konstantní délku kroku h, tj. vzít dělení takové, že $t_{i+1} - t_i = h$ pro všechna $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$; takové dělení se nazývá *ekvidistantní.* Bývá ovšem účelné délku kroku měnit podle rychlosti změny hledané funkce, tedy podle velikosti absolutní hodnoty její derivace – s rostoucí hodnotou $\big|f(t_i, x_i)\big|$ zkracovat vzdálenost k následujícímu dělícímu bodu t_{k+1}.

Ukážeme jednu jednoduchou možnost, jak volit délku kroku „adaptivně“, podle velikosti derivace hledané funkce v bodě t_k (přesněji: podle derivace zprava Eulerova polygonu v bodě t_k). Zvolíme konstantní délku δ strany Eulerova polygonu, tj. požadujeme, aby pro platilo

$$(t_{k+1} - t_k)^2 + (x_{k+1} - x_k)^2 = \delta^2.$$

Poněvadž $x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k) f(t_k, x_k)$, můžeme z této podmínky vypočítat

$$t_{k+1} = t_k + \frac{\delta}{\sqrt{1 + f(t_k, x_k)^2}}.$$

Příklad: Uvažujme počáteční úlohu

$$x' = 2t + x^2, \quad x(0) = 0. \tag{2.3}$$

Zvolíme konstantní délku kroku h. Pak $t_k = kh$ a příslušné rekurentní vztahy jsou

$$x_0 = 0, \qquad x_{k+1} = x_k + h(2t_k + x_k^2) = x_k + hx_k^2 + 2kh^2.$$

Při „adaptivní“ volbě dělících bodů dostaneme dvojici rekurentních vztahů:

$$t_0 = 0, \qquad x_0 = 0,$$

$$t_{k+1} = t_k + \frac{\delta}{\sqrt{1 + \left(2t_k + x_k^2\right)^2}}, \qquad x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k)\left(2t_k + x_k^2\right).$$

Na obrázku 2.1 jsou zobrazeny Eulerovy polygony na intervalu $[0, 1]$ s konstantní ($h = 0{,}075$) i s „adaptivní“ délkou kroku ($\delta = 0{,}075$). ∎

2.1.2 Picardova posloupnost

Picardova posloupnost postupných aproximací řešení úlohy (2.1) je posloupnost funkcí definovaná rekurentně

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \xi, \\ x_{k+1}(t) &= \xi + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_k(s)\big)\mathrm{d}s, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Budeme předpokládat, že funkce f je spojitá, a že Picardova posloupnost stejnoměrně konverguje k funkci x. Poněvadž interval $[t_0, t]$ je konečný (a tedy kompaktní), funkce f je spojitá stejnoměrně. Odtud plyne, že následující úpravy jsou korektní:

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1}(t) = \xi + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_k(s)\big)\mathrm{d}s =$$
$$= \xi + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \lim_{k\to\infty} x_k(s)\right)\mathrm{d}s = \xi + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\mathrm{d}s.$$

Stejnoměrná limita Picardovy posloupnosti je tedy řešením integrální rovnice (2.2), takže je také řešením počáteční úlohy (2.1). Stačí tedy ukázat, že Picardova posloupnost konverguje stejnoměrně, případně najít podmínky, za jakých stejnoměrně konverguje.

Stejnoměrnou konvergenci Picardovy posloupnosti zaručí Lipschitzova podmínka: Řekneme, že funkce $f : J \times D \to \mathbb{R}$ je *Lipsichitzovská s konstantou* $L > 0$ *vzhledem k druhé proměnné,* pokud pro všechna $t \in J$ a všechna $x, y \in D$ platí

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le |x - y|.$$

Předpokládejme nyní, že funkce f v rovnici (2.1) je na množině $[t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}$ Lipschitzovská s konstantou L vzhledem k druhé proměnné. Zvolíme libovolné přirozené číslo p a kladné reálné číslo α takové, že

$$\alpha < \max\left\{\frac{1}{2L}, a\right\}.$$

Pak platí

$$\alpha L < 1. \tag{2.4}$$

Pro libovolná $k \in \mathbb{N}$, $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ nyní platí

$$\begin{aligned}
0 \le |x_k(t) - x_{k+p}(t)| &= \left|\xi + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{k-1}(s)\big)\mathrm{d}s - \xi - \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_{k+p-1}(s)\big)\mathrm{d}s\right| = \\
&= \left|\int_{t_0}^{t} \Big(f\big(s, x_{k-1}(s)\big) - f\big(s, x_{k+p-1}(s)\big)\Big)\mathrm{d}s\right| \le \\
&\le \int_{t_0}^{t} \left|f\big(s, x_{k-1}(s)\big) - f\big(s, x_{k+p-1}(s)\big)\right| \mathrm{d}s \le \\
&\le L\int_{t_0}^{t} |x_{k-1}(s) - x_{k+p-1}(s)|\,\mathrm{d}s \le L\int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} |x_{k-1}(s) - x_{k+p-1}(s)|\,\mathrm{d}s \le \\
&\le 2L\alpha \max\left\{|x_{k-1}(t) - x_{k+p-1}(t)| \,: t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha\right\}.
\end{aligned}$$

Proto také

$$0 \le \max\left\{|x_k(t) - x_{k+p}(t)| \,: t_0 \le t \le t_0 + \alpha\right\} \le$$
$$\le 2L\alpha \max\left\{|x_{k-1}(t) - x_{k+p-1}(t)| \,: t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha\right\}.$$

Analogicky dostaneme

$$0 \leq \max\left\{|x_{k-1}(t) - x_{k+p-1}(t)| \; : t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha\right\} \leq \\ \leq 2L\alpha \max\left\{|x_{k-2}(t) - x_{k+p-2}(t)| \; : t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha\right\}$$

a tedy

$$0 \leq \max\left\{|x_k(t) - x_{k+p}(t)| \; : t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha\right\} \leq \\ \leq (2L\alpha)^2 \max\left\{|x_{k-2}(t) - x_{k+p-2}(t)| \; : t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha\right\}.$$

Po k analogických krocích krocích dostaneme odhad

$$0 \leq \max\left\{|x_k(t) - x_{k+p}(t)| \; : t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha\right\} \leq \\ \leq (2L\alpha)^k \max\left\{|x_0(t) - x_p(t)| \; : t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha\right\}.$$

Z nerovnosti (2.4) plyne, že limita výrazu na pravé straně je pro $k \to \infty$ rovna nule. Odtud dále plyne, že Picardova posloupnost funkcí $\{x_k\}$ je na intervalu $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ stejnoměrně Cauchyovská a tedy stejnoměrně konvergentní. Ukázali jsme tak, že limita Picardovy posloupnosti je řešením počáteční úlohy (2.1) na intervalu $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Ještě ukážeme, že toto řešení je jediné. K tomu účelu připusťme, že existuje další řešení $y = y(t)$ úlohy (2.1) definované na intervalu $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, které je různé od limity x Picardovy posloupnosti, tj.

$$\max\left\{|x(t) - y(t)| \; : t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha\right\} > 0. \tag{2.5}$$

Poněvadž funkce x a y jsou také řešením integrální rovnice (2.2), platí pro každé t z intervalu $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ nerovnost

$$|x(t) - y(t)| = \left|\xi + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\mathrm{d}s - \xi - \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\mathrm{d}s\right| \leq \\ \leq \int_{t_0}^{t} \Big|f\big(s, x(s)\big) - f\big(s, y(s)\big)\Big| \leq L \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s \leq \\ \leq 2L\alpha \max\left\{|x(t) - y(t)| : \; t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha\right\}.$$

Z platnosti této nerovnosti pro každé $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ dále plyne nerovnost

$$\max\left\{|x(t) - y(t)| \; : t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha\right\} \leq 2L\alpha \max\left\{|x(t) - y(t)| : \; t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha\right\}$$

a vzhledem k (2.5) také $1 \leq 2L\alpha$, což je ve sporu s (2.4).

Provedené úvahy můžeme shrnout:

Tvrzení 2. Je-li funkce f Lipschitzovská vzhledek ke druhé proměnné, pak má počáteční úloha (2.1) jediné řešení definované na okolí bodu t_0.

Zobecněním tohoto tvrzení bude Picardova-Lindelöfova věta o existenci a jednoznačnosti řešení systému diferenciálních rovnic, tj. Věta 1.

Poněvadž Picardova posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje k řešení x počáteční úlohy (2.1), lze její člen s „dostatečně velkým“ indexem k považovat za přibližné řešení této úlohy.

Při odvození konvergence Picardovy posloupnosti jsme také odhadli interval, na kterém tato posloupnost konverguje. Tento odhad čísla α (poloviny délky intervalu konvergence) závisí na neznámé velikosti Lipschitzovy konstanty L. Navíc se jedná o odhad „pesimistický“ nebo „konzervativní“; Picardova posloupnost obvykle konverguje na širším intervalu, nejen na $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Pokud má funkce f ohraničenou parciální derivaci podle druhé proměnné, pak lze za Lipschitzovu konstantu volit

$$L = \sup\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| : t \in J, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

V takovém případě totiž podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $\vartheta \in (0,1)$, že

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\big(t, x + \vartheta(y-x)\big)(x-y)\right| \le L|x-y|.$$

Příklad: Uvažujme znovu počáteční úlohu (2.3). Postupně budeme počítat členy Picardovy posloupnosti postupných aproximací:

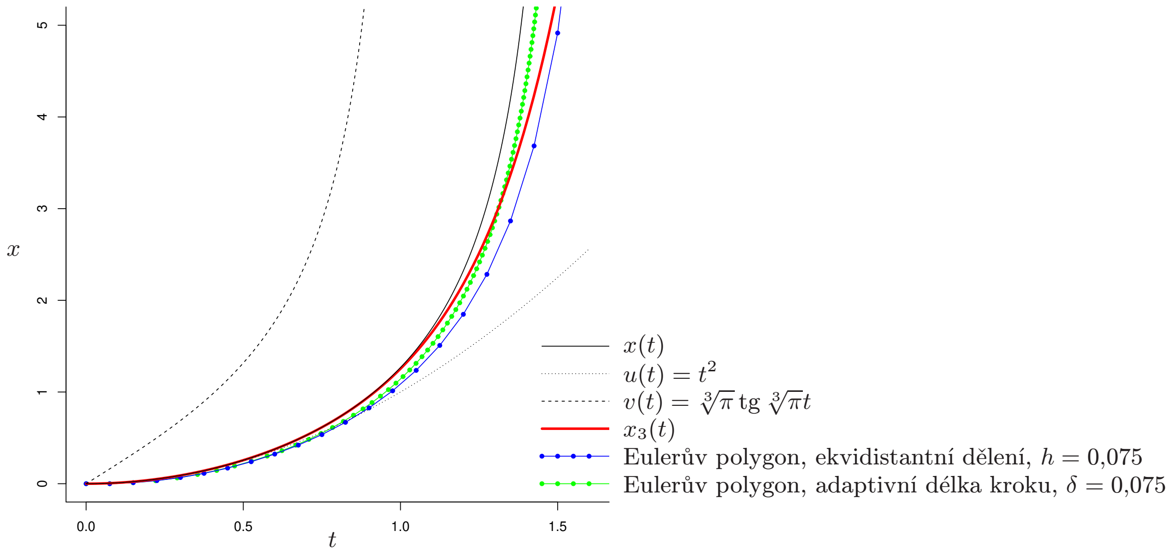
$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 0 + \int_0^t (2s + 0^2)\mathrm{d}s = t^2,\\
x_2(t) &= 0 + \int_0^t \left(2s + (s^2)^2\right)\mathrm{d}s = t^2 + \tfrac{1}{5}t^5,\\
x_3(t) &= 0 + \int_0^t \left(2s + \left(s^2 + \tfrac{1}{5}s^5\right)^2\right)\mathrm{d}s = \int_0^t \left(2s + s^4 + \tfrac{2}{5}s^7 + \tfrac{1}{25}s^{10}\right)\mathrm{d}s =\\
&= t^2 + \tfrac{1}{5}t^5 + \tfrac{1}{20}t^8 + \tfrac{1}{275}t^{11},\\
x_4(t) &= 0 + \int_0^t \left(2s + \left(s^2 + \tfrac{1}{5}s^5 + \tfrac{1}{20}s^8 + \tfrac{1}{275}s^{11}\right)^2\right)\mathrm{d}s =\\
&= \int_0^t \left(2s + s^4 + \tfrac{2}{5}s^7 + \tfrac{7}{50}s^{10} + \tfrac{3}{110}s^{13} + \tfrac{87}{22\,000}s^{16} + \tfrac{1}{2\,750}s^{19} + \tfrac{1}{75\,625}s^{22}\right)\mathrm{d}s =\\
&= t^2 + \tfrac{1}{5}t^5 + \tfrac{1}{20}t^8 + \tfrac{7}{550}t^{11} + \tfrac{3}{1\,540}t^{14} + \tfrac{87}{374\,000}t^{17} + \tfrac{1}{55\,000}t^{20} + \tfrac{1}{1\,739\,375}t^{23},
\end{aligned}$$

atd. Třetí člen posloupnosti postupných aproximací je znázorněn na obrázku 2.1. ■

2.1.3 Odhad řešení

Uvažujme opět počáteční úlohu(2.1) a předpokládejme, že známe odhad derivace řešení této úlohy. Přesněji řečeno, že existují čísla d, D a okolí $\mathcal{O}(\xi)$ bodu ξ taková, že

$$d \le f(t_0, x) \le D$$



Obrázek 2.1: Řešení x počáteční úlohy (2.3), jeho odhady pomocí horní funkce v a dolní funkce u, aproximace čtvrtým členem Picardovy posloupnosti postupných aproximací x_3 a Eulerovými polygony.

pro všechna $x \in \mathcal{O}(\xi)$. Pak je zřejmé, že v pravém okolí $[t_0, t_0 + \delta)$ počátečního času t_0 platí pro řešení x úlohy (2.1) nerovnosti

$$\xi + dt \le x(t) \le \xi + Dt,$$

tj. řešení úlphy v okolí počátečního času odhadujeme pomocí dvou lineárních funkcí. (Přesně lze toto tvrzení zdůvodnit pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě.) Ještě mírně obecněji lze říci: Nechť u, resp. v, je řešení počáteční úlohy

$$u' = d, \; u(0) = \xi_*, \quad \text{resp. } v' = D, \; v(0) = \xi^*,$$

kde $\xi_* \le \xi$, resp. $\xi^* \ge \xi$. Pak existuje $\delta > 0$ takavé, že řešení x úlohy (2.1) splňuje nerovnosti

$$u(t) \le x(t) \le v(t) \quad \text{pro} \quad 0 \le t < t_0 + \delta.$$

Jako bezprostřední zobecnění této úvahy dostaneme

Tvrzení 3. Nechť $[t_0, T] \times G \subseteq \mathbb{R}^2$ je podmnožinou definičního oboru funkce f a nechť funkce $f_*, f^* : [t_0, T) \times G \to \mathbb{R}$ splňují nerovnosti

$$f_x(t,x) \le f(t,x) \le f^*(t,x) \quad \text{pro } t_0 \le t < T, \; x \in G.$$

Jestliže u a v jsou řešení počátečních úloh

$$u' = f_*(t,u), \; u(t_0) = \xi, \quad \text{a} \quad v' = f^*(t,u), \; v(t_0) = \xi \tag{2.6}$$

definovaná na intervalu $[t_0, T)$, pak pro řešení počáteční úlohy (2.1) platí

$$u(t) \le x(t) \le v(t) \quad \text{pro } t \in [t_0, T).$$

Toto Tvrzení je užitečné, pokud jsou počáteční úlohy v nějakém smyslu jednodušší než daná úloha (2.1); nejlepší je případ, kdy jsou úlohy (2.6) řešitelné v kvadraturách. Pak Tvrzení 3 poskytuje odhad řešení počáteční úlohy (2.1).

Z Tvrzení 3 také vyplývá, že (úplné) řešení úlohy (2.1) je definováno přinejmenším na intervalu $[t_0, T)$.

Příklad: Odhadneme řešení počáteční úlohy (2.3). Zvolíme pevně nějaké $T > t_0 = 0$. Pak pro všechna $t \in [0, T)$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$2t \leq 2t + x^2 \leq 2T + x^2.$$

První počáteční úloha (2.6) (úloha pro dolní odhad řešení) je nyní tvaru

$$u' = 2t, \quad u(0) = 0.$$

Tato úloha má řešení dané vztahem $u(t) = t^2$. Počáteční úloha pro horní odhad řešení je

$$v' = 2T + v^2, \quad v(0) = 0$$

a má řešení $v(t) = \sqrt{2T}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{2T}\,t$. Takto zavedená funkce v je definována na intervalu $[0, \pi/\sqrt{8T})$. Ovšem pouze na intervalu $[0, T)$ vyjadřuje horní odhad řešení počáteční úlohy (2.3). Toto pozorování ukazuje, že optimální volbou hodnoty T je taková, že $T = \pi/\sqrt{8T}$, tedy $T = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi^2} \doteq 1{,}0725$.

Počáteční úloha (2.3) má tedy na intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi^2}\right)$ řešení x, pro které platí

$$t^2 \leq x(t) \leq \sqrt[3]{\pi}\,\mathrm{tg}\,\sqrt[3]{\pi}t.$$

Situace je znázorněna na obrázku 2.1. ■

2.1.4 Frobeniova metoda

Předpokládejme, že funkce f na pravé straně diferenciální rovnice v počáteční úloze (2.1) je analytická v okolí počátečního bodu (t_0, ξ), tj. že na jistém okolí bodu (t_0, ξ) lze funkci f vyjádřit konvergentní dvojnou mocninnou řadou se středem (t_0, ξ),

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(t - t_0)^n (x - \xi)^m. \tag{2.7}$$

V takovém případě můžeme očekávat, že i řešení úlohy (2.1) bude na nějakém okolí počátečního času t_0 analytickou funkcí.

Řešení úlohy (2.1) formálně zapíšeme jako mocninnou řadu

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n. \tag{2.8}$$

Pak je $x(t_0) = a_0$, takže

$$a_0 = \xi. \tag{2.9}$$

Formální mocninnou řadu (2.8) dosadíme do rovnice v (2.1):

$$x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (t-t_0)^{n-1} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (t-t_0)^n,$$

$$\begin{aligned}
f\big(t, x(t)\big) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(t-t_0)^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-t_0)^i - \xi\right)^m = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(t-t_0)^n \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i (t-t_0)^i\right)^m = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(b_{n0}(t-t_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}(t-t_0)^n \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j_1+\cdots+j_m=i} a_{j_1}\cdots a_{j_m}(t-t_0)^i\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n0}(t-t_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}(t-t_0)^n \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j_1+\cdots+j_m=i} a_{j_1}\cdots a_{j_m}(t-t_0)^i = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n0}(t-t_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_{nm}(t-t_0)^n \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{j_1+\cdots+j_m=i} a_{j_1}\cdots a_{j_m}(t-t_0)^i = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n0}(t-t_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\sum_{i=m}^{n} b_{n-i,m} \sum_{j_1+\cdots+j_m=i} a_{j_1}\cdots a_{j_m}(t-t_0)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n0}(t-t_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=m}^{n} b_{n-i,m} \sum_{j_1+\cdots+j_m=i} a_{j_1}\cdots a_{j_m}(t-t_0)^n = \\
&= b_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{n0} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=m}^{n} b_{n-i,m} \sum_{j_1+\cdots+j_m=i} a_{j_1}\cdots a_{j_m}\right)(t-t_0)^n = \\
&= b_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_{n0} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-m} b_{km} \sum_{j_1+\cdots+j_m=n-k} a_{j_1}\cdots a_{j_m}\right)(t-t_0)^n.
\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin výrazu $t - t_0$ nyní dostaneme

$$a_1 = b_{00}, \tag{2.10}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(b_{n0} + \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-m} \sum_{j_1+\cdots+j_m=n-k} a_{j_1}\cdots a_{j_m} b_{km}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.11}$$

Vidíme, že koeficienty $a_1, a_2, a_3, \ldots$ formální řady (2.8) lze pomocí tohoto rekurentního vztahu jednoznačně vypočítat.

Pokud mocninná řada (2.8) získaná tímto způsobem konverguje na nějakém (symetrickém) okolí bodu t_0, pak její součet je řešením počáteční úlohy (2.1). Výsledek opět shrneme:

Tvrzení 4. Je-li pravá strana rovnice v (2.1) v okolí počátečního bodu (t_0, ξ) analytickou funkcí tvaru (2.7) a poloměr konvergence mocninné řady (2.8), jejíž koeficienty jsou dány výrazy (2.9), (2.10) a (2.11), je nenulový, pak součet této řady je na oboru konvergence řešením počáteční úlohy (2.1).

Ještě poznamenejme, že analytická funkce f má v bodě (t_0, ξ) konečné všechny parciální derivace. Zejména má na každém uzavřeném okolí tohoto bodu ohraničenou parciální derivaci podle proměnné x. Z toho podle 2.1.2 plyne, že daná úloha má jediné řešení.

Při hledání analytického řešení počáteční úlohy většinou dosadíme formální tvar řešení do rovnice a pak porovnáme koeficienty; není potřeba si pamatovat a používat formuli (2.11). Součet prvních k členů řady, vypočítaných tímto postupem, lze pro „dostatečně velké“ k považovat za přibližné řešení počáteční úlohy.

Příklad: Uvažujme opět počáteční úlohu (2.3). Její řešení budeme hledat ve tvaru mocninné řady

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{2.12}$$

Z počáteční podmínky plyne $0 = x(0) = a_0$, takže

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = a_1 + 2a_2 t + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n,$$

$$2t + x(t)^2 = 2t + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n\right)^2 = 2t + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j a_{n-j}\right) t^n.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n-1} a_j a_{n-j}$$

Z tohoto vyjádření úplnou indukcí snadno ukážeme, že všechny koeficienty a_n jsou nejvýše rovny 1. To znamená, že poloměr konvergence řady (2.12) je alespoň 1.

Koeficienty řady můžeme postupně počítat:

$$
\begin{array}{l|l|l}
a_0 = 0, & a_9 = 0, & a_{18} = 0, \\
a_1 = 0, & a_{10} = 0, & a_{19} = 0, \\
a_2 = 1, & a_{11} = \frac{7}{550}, & a_{20} = \frac{1\,107}{5\,236\,000}, \\
a_3 = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0, & a_{12} = 0, & a_{21} = 0, \\
a_4 = \frac{1}{4}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 0, & a_{13} = 0, & a_{22} = 0, \\
a_5 = \frac{1}{5}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = \frac{1}{5}, & a_{14} = \frac{1}{308}, & a_{23} = \frac{178\,677}{3\,311\,770\,000}, \\
a_6 = \frac{1}{6}(0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0, & a_{15} = 0, & a_{24} = 0, \\
a_7 = \frac{1}{7}(\frac{1}{5} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{5}) = 0, & a_{16} = 0, & a_{25} = 0, \\
a_8 = \frac{1}{8}(0 \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot 0) = \frac{1}{20}, & a_{17} = \frac{2\,169}{2\,618\,000}, & a_{26} = \frac{139\,471}{10\,130\,120\,000},
\end{array}
$$

atd.

Porovnáním s výsledkem příkladu v 2.1.2 vidíme, že řada vyjadřující řešení počáteční úlohy se až do členu u sedmé mocniny nezávisle proměnné t shoduje s polynomem, který je čtvrtým členem Picardovy posloupnosti konvergující k řešení této úlohy. ■

2.2 Existence a jednoznačnost řešení systému ODR

V tomto oddílu se budeme zabývat počáteční úlohou (1.23), (1.24) pro vektorovou diferenciální rovnici.

Lemma 1. *Buď funkce* $\boldsymbol{f}$ *spojitá na* $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$*. Funkce* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ *je řešením úlohy* (1.23), (1.24) *na intervalu* J *právě tehdy, když pro každé* $t \in J$ *je* $\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \in G$ *a*

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s\,. \tag{2.13}$$

Důkaz:

„⇒“ Nechť $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je řešením úlohy (1.23), (1.24) na J. Pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{x}(s) \;=\; \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)$$

na J. Integrací této rovnosti podle s v mezích $[t_0, t]$ dostaneme:

$$[\boldsymbol{x}(s)]_{s=t_0}^{t} = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0) \;=\; \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s$$

a vzhledem k (1.24) funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ splňuje (2.13).

„⇐“ Nechť funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ splňuje (2.13). Pak $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0} + \int_{t_0}^{t_0} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s = \boldsymbol{x_0}$, tedy je splněna podmínka (1.24). Derivováním (2.13) podle t dostaneme (1.23). □

Nechť $C^1(J)$ je množina (vektorových) funkcí $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ diferencovatelných na uzavřeném intervalu J takových, že $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$. Na této množině zavedeme metriku

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| : t \in J\}$$

(metrika stejnoměrné konvergence). Prostor $\big(C^1(J), \varrho\big)$ je úplný (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, I.1.1.2.iv a III.1.3.6.i). Dále definujme zobrazení $F : C^1(J) \to C^1(J)$ předpisem:

$$F(\boldsymbol{x})(t) \;=\; \boldsymbol{x_0} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s\,. \tag{2.14}$$

Řešení úlohy (1.23), (1.24), tedy funkce, která splňuje integrální rovnici (2.13), je zřejmě pevným bodem zobrazení F.
Podaří-li se tedy ukázat, že F je kontrakce úplného metrického prostoru $\big(C^1(J), \varrho\big)$, z Banachovy věty vyplyne, že existuje jediný pevný bod tohoto zobrazení, tedy že existuje jediné diferencovatelné řešení úlohy (1.23), (1.24) (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, IV.2. a V.1.).

Věta 1 (Picard (1856–1941)–Lindelöf (1870–1946))**.** *Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Označme*

$$\tilde{J} = [t_0, t_0 + a], \quad D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right\| \leq b\}, \tag{2.15}$$

$$m = \max\{\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| : (t, \boldsymbol{x}) \in \tilde{J} \times D\}, \quad \delta = \min\left\{a, \frac{b}{m}\right\}.$$

Nechť funkce $\boldsymbol{f} : \tilde{J} \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a vzhledem k $\boldsymbol{x}$ Lipschitzovská (tj. existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že platí $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\| \leq L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ pro všechna $t \in \tilde{J}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$). Pak existuje právě jedno řešení počátečního problému (1.23), (1.24) definované na intervalu $J = [t_0, t_0 + \delta]$.

Toto řešení je (stejnoměrnou) limitou posloupnosti funkcí $\{\boldsymbol{x_n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$; tato posloupnost je definována rekurentně vztahem

$$\boldsymbol{x_{k+1}}(t) = \boldsymbol{x_0} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}_k(s)\big)\mathrm{d}s, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Důkaz: Je-li funkce $\boldsymbol{x}$ diferencovatelná, pak je spojitá (sr. V. Novák: *Diferenciální počet v R.* MU, Brno 1997, kap. V, věta 1.2). Proto je funkce $\boldsymbol{y}(t) = F(\boldsymbol{x})(t)$ diferencovatelná a pro její derivaci platí $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)$ (sr. V. Novák: *Integrální počet v* $\mathbb{R}$. MU, Brno 2001, 2.4, věta 4.2). To znamená, že zobrazení F definované vztahem (2.14) zobrazuje množinu $C^1(J)$ do sebe. Buď $K > L$. Na $C^1(J)$ zavedeme metriku ϱ^* vztahem

$$\varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\left\{\mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| : t \in J\right\}.$$

Tato metrika je na $C^1(J)$ ekvivalentní s metrikou stejnoměrné konvergence ϱ, neboť

$$\mathrm{e}^{-K\delta} \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Prostor $\big(C^1(J), \varrho^*\big)$ je tedy úplný.

Položme $P = \{\boldsymbol{x} \in C^1(J) : \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_0}\| \leq b$ pro každé $t \in J\}$. Poněvadž $\overline{P}$ je uzavřená podmnožina množiny $C^1(J)$, je prostor $(\overline{P}, \varrho^*)$ úplný (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, III.1.3.3). Zobrazení F zobrazuje množinu $\overline{P}$ do sebe, neboť pro každou funkci $\boldsymbol{x} \in P$ platí

$$\left\|F(\boldsymbol{x})(t) - \boldsymbol{x}^0\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\right\| \leq \int_{t_0}^{t} \left\|\boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\right\| \mathrm{d}s \leq (t - t_0)m \leq \delta m \leq b.$$

Ukážeme, že F je kontrakcí prostoru $(\overline{P}, \varrho^*)$: Pro každé $t \in J$ platí

$$
\begin{aligned}
\varrho^*\big(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{y})\big) &\le \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \|F(\boldsymbol{x})(t) - F(\boldsymbol{y})(t)\| = \\
&= \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \left\| \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{y}(s)\big)\mathrm{d}s \right\| \le \\
&\le \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \big\| \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) - \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{y}(s)\big) \big\| \,\mathrm{d}s \le \\
&\le \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} L \|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)\| \,\mathrm{d}s = \\
&= L \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-K(t-s)} \mathrm{e}^{-K(s-t_0)} \|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)\| \,\mathrm{d}s \le \\
&\le L \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-K(t-s)} \varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}s = \\
&= L\varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \left[\frac{1}{K} \mathrm{e}^{-K(t-s)} \right]_{s=t_0}^{t} = \\
&= \frac{L}{K} \varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \left(1 - \mathrm{e}^{-K(t-t_0)}\right) \le \\
&\le \frac{L}{K} \varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) .
\end{aligned}
$$

Poněvadž $L < K$, je $\dfrac{L}{K} < 1$, což znamená, že F je kontrakce. □

Poznámka 1. Posloupnost funkcí zavedená ve větě 1 se nazývá *Picardova posloupnost postupných aproximací.*

Poznámka 2. Analogické tvrzení platí, nahradíme-li ve větě 1 interval $\tilde{J} = [t_0, t_0 + a]$ intervalem $[t_0 - a, t_0]$ nebo intervalem $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Poznámka 3. Má-li funkce

$$
\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}
$$

ohraničené parciální derivace všech složek podle každé z proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ na množině $\tilde{J} \times D$ (zavedené rovností (2.15)), pak jsou předpoklady Picardovy-Lindelöfovy věty splněny.

Důkaz: Množina $\tilde{J} \times D$ jakožto uzavřená a ohraničená podmnožina prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ je kompaktní (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, III.3.3.16). Z ohraničenosti parciálních derivací funkce $\boldsymbol{f}$ plyne existence čísla

$$
M = \max \left\{ \frac{\partial f_i(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_j} : \, i = 1, 2, \dots, n, \; j = 1, 2, \dots, n, \; (t, \boldsymbol{x}) \in \tilde{J} \times D \right\} .
$$

Podle věty o střední hodnotě pro funkce více proměnných (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, 3.4) pro všechna $t \in \tilde{J}$ a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$ existují čísla ξ_k ležící mezi x_k a y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ taková, že

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\| &= \sum_{i=1}^{n} |f_i(t,\boldsymbol{x}) - f_i(t,\boldsymbol{y})| = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \xi_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)(x_k - y_k) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \xi_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) \right| |x_k - y_k| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M |x_k - y_k| = \sum_{i=1}^{n} M \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = nM \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| ,
\end{aligned}$$

takže funkce $\boldsymbol{f}$ je vzhledem k $\boldsymbol{x}$ Lipschitzovská s konstantou nM. □

Důsledek 1. *Má-li (vektorová) funkce*

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

ohraničené parciální derivace všech složek podle každé z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v jistém okolí bodu $(t_0, \boldsymbol{x_0})$, pak počáteční problém (1.23), (1.24) má v okolí t_0 jediné řešení.

Důsledek 2. *Má-li (skalární) funkce $f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ohraničené parciální derivace podle každé z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v jistém okolí bodu $(t_0, x_0, x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})$, pak počáteční problém (1.25), (1.27) má v okolí t_0 jediné řešení.*

Na závěr kapitoly ještě zformulujeme větu o existenci řešení počáteční úlohy:

Věta 2 (Peano 1890)**.** *Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Označme*

$$\tilde{J} = [t_0, t_0 + a], \qquad D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right\| \leq b\},$$

$$m = \max\{\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\| : (t,\boldsymbol{x}) \in \tilde{J} \times D\}, \qquad \delta = \min\left\{a, \frac{b}{m}\right\}.$$

Nechť funkce $\boldsymbol{f} : \tilde{J} \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak existuje alespoň jedno řešení počátečního problému (1.23), (1.24) definované na intervalu $J = [t_0, t_0 + \delta]$.

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 67–70. □

2.3 Globální vlastnosti řešení systému ODR

Věta 3 (o existenci úplného řešení)**.** *Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Je-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ řešení rovnice (1.23), pak je toto řešení buď úplné, nebo existuje úplné řešení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$, které je prodloužením řešení $\boldsymbol{x}$.*

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 73–76. Důkaz využívá věty 2. □

Definice 8. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Řekneme, že funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je *lokálně lipschitzovská v G vzhledem k $\boldsymbol{x}$*, jestliže ke každému $(\tau, \boldsymbol{a}) \in G$ existuje okolí $\mathcal{O}_{\tau,\boldsymbol{a}} \subseteq G$ a číslo $L_{\tau,\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $(t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{O}_{\tau,\boldsymbol{a}}$ platí $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\| \leq L_{\tau,\boldsymbol{a}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

Věta 4 (o globální jednoznačnosti)**.** *Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a lokálně lipschitzovská v G vzhledem k $\boldsymbol{x}$ a nechť funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ jsou dvě řešení rovnice (1.23). Jestliže existuje t_0 takové, že $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{y}(t_0)$, pak $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$ pro všechna t, v nichž jsou řešení $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ definována.*

Důkaz: Připusťme, že existuje $b > t_0$ takové, že $\boldsymbol{x}(b) \neq \boldsymbol{y}(b)$. Označme $c = \inf\{t : \boldsymbol{x}(t) \neq \boldsymbol{y}(t)\}$.
Funkce $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou spojité (poněvadž jsou diferencovatelné).
Ukážeme, že $\boldsymbol{x}(c) = \boldsymbol{y}(c)$:
Připusťme, že $\boldsymbol{x}(c) \neq \boldsymbol{y}(c)$. Položme $\varepsilon = \|\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{y}(c)\|$. Pak $\varepsilon > 0$
K $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t \in (c-\delta, c)$ je $\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(c)\| < \frac{\varepsilon}{4}$ a $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(c)\| < \frac{\varepsilon}{4}$.
Poněvadž pro $t \in (c - \delta, c)$ je $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$, platí pro $t \in (c - \delta, c)$ nerovnost

$$\varepsilon = \|\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{y}(c)\| = \|\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(c)\| \leq \|\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{x}(t)\| + \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(c)\| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

což je spor, neboť $\varepsilon > 0$, a tedy $\boldsymbol{x}(c) = \boldsymbol{y}(c)$.
Podle věty 1 nyní existuje α takové, že pro $t \in [c, c + \alpha]$ je $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$, což je spor.
Analogicky vyloučíme možnost existence $b < t_0$ takového, že $\boldsymbol{x}(b) \neq \boldsymbol{y}(b)$. □

Definice 9. Buď $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplné řešení rovnice (1.23) definované na intervalu (S, T), kde $-\infty \leq S < T \leq \infty$.
Řekneme, že $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ je

ω-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$, jestliže existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $t_k < T$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = T$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{\xi}$;

α-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$, jestliže existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $t_k > S$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = S$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{\xi}$;

limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$, jestliže je ω-limitním bodem nebo α-limitním bodem.

Množina všech ω-limitních bodů řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá *ω-limitní množina řešení $\boldsymbol{x}$*, množina všech α-limitních bodů řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá *α-limitní množina řešení $\boldsymbol{x}$*, množina všech limitních bodů řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá *limitní množina řešení $\boldsymbol{x}$*.

Příklady:

1. $x = \mathrm{e}^{at}$ je úplné řešení rovnice $x' = ax$ definované na intervalu $(-\infty, \infty)$. Je-li $a > 0$, pak 0 je α-limitním bodem tohoto řešení a ω-limitní body toto řešení nemá. Je-li $a < 0$, pak 0 je ω-limitním bodem tohoto řešení a α-limitní body toto řešení nemá. Je-li $a = 0$, pak 1 je α- i ω-limitním bodem tohoto řešení.

2. $x = \sin \dfrac{1}{t}$ je úplné řešení rovnice $x' = -\dfrac{1}{t^2}\sqrt{1-x^2}$ definované na intervalu $(-\infty, 0)$. Interval $[-1, 1]$ je ω-limitní množinou tohoto řešení.

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \operatorname{tg} t \\ \sin \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$ je úplné řešení soustavy rovnic $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{\cos^2 t} \\ \dfrac{x}{\cos^2 t} \end{pmatrix}$ definované na intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Limitní množina tohoto řešení je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. ■

Věta 5. *Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je úplné řešení rovnice (1.23) definované na intervalu (S, T). Pak platí:*
$T = \infty$ nebo $\lim\limits_{t \to T-} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \infty$ nebo každý ω-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$ leží na hranici G.
$S = -\infty$ nebo $\lim\limits_{t \to S+} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \infty$ nebo každý α-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$ leží na hranici G.

Důkaz: Buď $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplné řešení rovnice (1.23) definované na intervalu (S, T), $T < \infty$ a buď $\boldsymbol{\xi}$ jeho ω-limitní bod. Kdyby $(T, \boldsymbol{\xi}) \in G$, pak by existovalo okolí $\mathcal{O}_{T,\boldsymbol{\xi}}$ bodu $(T, \boldsymbol{\xi})$ takové, že $\mathcal{O}_{T,\boldsymbol{\xi}} \subseteq G$, neboť G je otevřená. Podle věty 2 by existovalo řešení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ rovnice (1.23) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(T) = \boldsymbol{\xi}$ definované na $[T, T+\delta]$, kde δ je vhodné (malé) číslo. Funkce

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(t), & S < t < T \\ \boldsymbol{y}(t), & T + \delta \end{cases}$$

by byla řešením rovnice (1.23), které by bylo prodloužením řešení $\boldsymbol{x}$, což by byl spor s úplností řešení $\boldsymbol{x}$.
Pro α-limitní bod se důkaz provede analogicky s využitím „levostranné varianty“ věty 2. □

Důsledek 3. *Nechť $J = [t_0, \infty)$, $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| < a\}$, kde $t_0 \in \mathbb{R}$ a $0 < a \leq \infty$ a nechť vektorová funkce $\boldsymbol{f} : J \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pokud existuje spojitá funkce $g : J \to \mathbb{R}$ taková, že úplné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ rovnice (1.23) definované na (S, T) splňuje pro každé $t \in [t_0, T)$ podmínku $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq g(t) < a$, pak $T = \infty$.*

Důsledek 4. *Nechť $J = [t_0, \infty)$ a funkce $\boldsymbol{f} : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Jestliže existuje $m \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $(t, \boldsymbol{x}) \in J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ platí $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \leq m$, pak každé úplné řešení rovnice (1.23) je definováno pro všechna $t \geq t_0$.*

Důkaz: Buď $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplné řešení rovnice (1.23). Podle lemma 1 je

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) \mathrm{d}s\,.$$

Pro každé t, pro něž je $\boldsymbol{x}(t)$ definováno, platí

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| = \left\| \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\,\mathrm{d}s \right\| \le \|\boldsymbol{x}(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\|\,\mathrm{d}s \le \|\boldsymbol{x}(t_0)\| + m(t - t_0)\,.$$

Tvrzení tedy plyne z důsledku 3, položíme-li $g(t) = \|\boldsymbol{x}(t_0)\| + m(t - t_0)$. □

Toto tvrzení umožňuje rozhodnout, zda lze každé řešení rovnice (1.23) prodloužit do nekonečna, aniž bychom toto řešení znali.

Věta 6. *Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená množina a nechť pro každé $k = 1, 2, \ldots$ je vektorová funkce $\boldsymbol{f_k} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $(t_k, \boldsymbol{\xi_k}) \in \Omega$. Označme $\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{x_k}(t)$ úplné řešení počátečního problému*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f_k}(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{\xi_k}.$$

Jestliže posloupnost funkcí $\{\boldsymbol{f_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k funkci $\boldsymbol{f_\infty} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině $K \subseteq \Omega$, posloupnost bodů $\{(t_k, \boldsymbol{\xi_k})\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $(t_\infty, \boldsymbol{\xi_\infty})$ a počáteční úloha

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f_\infty}(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}(t_\infty) = \boldsymbol{\xi_\infty}$$

má jediné úplné řešení $\boldsymbol{x_\infty} = \boldsymbol{x_\infty}(t)$ definované na intervalu J, pak posloupnost funkcí $\{\boldsymbol{x_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k funkci $\boldsymbol{x_\infty}$ stejnoměrně na každém intervalu $[a, b] \subseteq J$.

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 80–82. □

Příklad (Matematické kyvadlo):

Fyzikálními úvahami uvedenými od str. 8 jsme odvodili model pohybu matematického kyvadla ve tvaru obyčejné rovnice druhého řádu (18). Tuto rovnici budeme uvažovat s počátečními podmínkami

$$\varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi'(0) = 0.$$

Úlohu o pohybu matematického kyvadla můžeme podle 1.3 přepsat jako počáteční úlohu pro systém dvou rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \varphi' &= \psi, \\ \psi' &= -\frac{g}{r}\sin\varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0,\ \psi(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Tuto počáteční úlohu neumíme vyřešit explicitně. Funkci sinus však můžeme vyjádřit jako stejnoměrně konvergentní Maclaurinovu řadu

$$\sin\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{\varphi^{2i-1}}{(2i-1)!}.$$

Označme nyní $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$. Pro $k = 1, 2, \ldots$ zavedeme vektorové funkce $\boldsymbol{f_k}$ a body $(t_k, \boldsymbol{\xi_k})$ následujícími formulemi

$$\boldsymbol{f_k}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f_k}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \psi \\ -\dfrac{g}{r}\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\dfrac{\varphi^{2i-1}}{(2i-1)!} \end{pmatrix}, \qquad t_k = 0,\ \boldsymbol{\xi_k} = \begin{pmatrix}\varphi_0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Funkce $\boldsymbol{f_k}$ a body $(t_k, \boldsymbol{\xi_k})$ splňují předpoklady věty 6 s $\Omega = \mathbb{R}^3$. Úloha

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f_\infty}(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(t_\infty) = \boldsymbol{\xi_\infty} = \begin{pmatrix}\varphi_0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2.17}$$

je totožná s úlohou (2.16). Poněvadž všechny parciální derivace

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f_\infty})_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{\partial(\boldsymbol{f_\infty})_1}{\partial\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\psi} = 1,$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f_\infty})_2}{\partial\varphi} = \frac{\partial\left(-\frac{g}{r}\sin\varphi\right)}{\partial\varphi} = -\frac{g}{r}\cos\varphi, \qquad \frac{\partial(\boldsymbol{f_\infty})_2}{\partial\psi} = \frac{\partial\left(-\frac{g}{r}\sin\varphi\right)}{\partial\psi} = 0$$

jsou ohraničené, je podle poznámky 3 úloha (2.17) jednoznačně řešitelná. To znamená, že řešení úlohy (2.16) je stejnoměrnou limitou řešení úloh

$$\begin{aligned} &\varphi' = \psi, \\ &\psi' = -\frac{g}{r}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\frac{\varphi^{2i-1}}{(2i-1)!}, \qquad \varphi(0) = \varphi_0,\ \psi(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Na obrázku 2.2 je první složka řešení (výchylka kyvadla φ) několika těchto úloh; nahoře pro počáteční hodnotu $\varphi_0 = \frac{1}{20}\pi$, dole pro $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$. Vidíme, že v případě malé počáteční výchylky již první člen posloupnosti dostatečně přesně aproximuje řešení úlohy (2.16). V případě velké počáteční výchylky, dokonce maximální možné, je řešení úlohy (2.16) na uvažovaném intervalu proměnné t dostatečně přesně aproximováno třetím členem posloupnosti řešení úloh (2.18).

Malé kmity matematického kyvadla lze tedy modelovat systémem rovnic

$$\varphi' = \psi, \quad \psi' = -\frac{g}{r}\varphi,$$

který je ekvivalentní s rovnicí druhého řádu $\varphi'' + \dfrac{g}{r}\varphi = 0$. ■

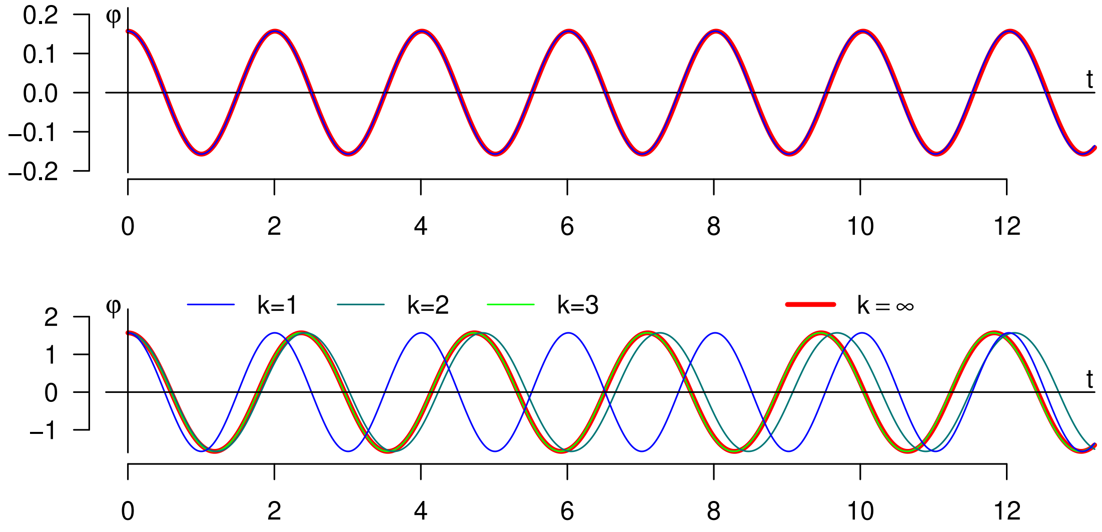
Věta 7 (o spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách a parametrech)**.** *Buď Ω otevřená množina v $\mathbb{R}^{1+n+m}$ a nechť spojitá vektorová funkce $\boldsymbol{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je taková, že pro všechna $\tau \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ splňující podmínku $(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) \in \Omega$, má počáteční problém*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$$

právě jedno úplné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$. Pak toto řešení, chápané jako zobrazení

$$\mathbb{R}^{1+1+n+m} \to \mathbb{R}^n,$$

je spojité.



Obrázek 2.2: Řešení úloh (2.18) pro $k \in \{1, 2, 3\}$ a řešení úlohy (2.16), tj. úlohy (2.18) pro $k = \infty$. Počáteční podmínky jsou $\varphi_0 = \frac{1}{20}\pi$ (nahoře) a $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$ (dole).

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 82–83. □

Tato věta říká, že změní-li se málo funkce $\boldsymbol{f}$ v rovnici (1.23) a málo se změní počáteční podmínka (1.24), pak se řešení nového — změněného — problému liší na konečném intervalu málo od řešení původního problému.

2.4 Odhady řešení

Definice 10. Řešení $x^* = x^*(t)$ úlohy (1.1), (1.3) se nazývá *maximální řešení*, jestliže pro každé řešení $x = x(t)$ této úlohy platí $x(t) \leq x^*(t)$ pro všechna t, v nichž jsou obě řešení definována.
Řešení $x_* = x_*(t)$ úlohy (1.1), (1.3) se nazývá *minimální řešení*, jestliže pro každé řešení $x = x(t)$ této úlohy platí $x_*(t) \leq x(t)$ pro všechna t, v nichž jsou obě řešení definována.

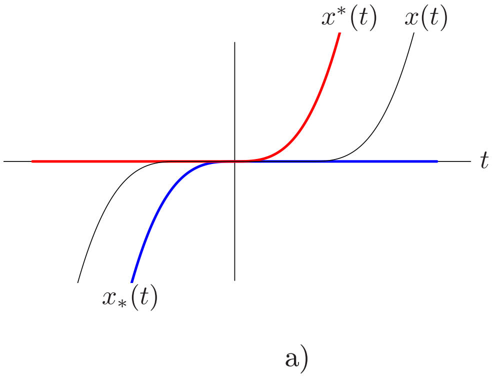
Příklad

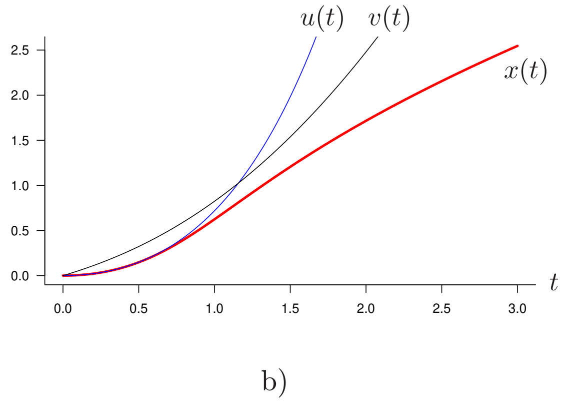
Uvažujme počáteční úlohu

$$x' = 3\sqrt[3]{x^2}, \qquad x(0) = 0. \tag{2.19}$$

Přímým výpočtem ověříme, že kterákoliv z funkcí

$$x(t) \equiv 0, \qquad x(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ (t-a)^3, & t \geq a, \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} (t+a)^3, & t < -a, \\ 0, & t \geq -a, \end{cases},$$





Obrázek 2.3: a) Maximální a minimální řešení počáteční úlohy (2.19). b) Odhady řešení $x = x(t)$ úlohy (2.20) s hodnotami $t_0 = x_0 = 0$.

$$x(t) = \begin{cases} (t+b)^3, & t < -b, \\ 0, & -b \le t \le a, \\ (t-a)^3, & t \ge a, \end{cases}$$

kde a, b jsou nezáporné konstanty, je jejím úplným řešením. Minimální a maximální řešení úlohy (2.19) tedy jsou funkce

$$x_*(t) = \begin{cases} t^3, & t < 0, \\ 0, & t \ge 0, \end{cases} \qquad x^*(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^3, & t \ge 0; \end{cases}$$

řešení je znázorněno na obrázku 2.3 a). ■

Věta 8 (srovnávací)**.** *Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$, $0 < a \le \infty$, $J = [t_0, \infty)$, $G = \{(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in J, \|\boldsymbol{x}\| < a\}$. Nechť dále $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a $g : J \times [0, a) \to [0, \infty)$ je spojitá funkce taková, že $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \le g(t, \|\boldsymbol{x}\|)$ pro $(t, \boldsymbol{x}) \in G$. Buď $u_0 \ge \|\boldsymbol{x_0}\|$ a $u^* = u^*(t)$ maximální řešení úlohy*

$$u' = g(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

na intervalu J.

Pak každé úplné řešení úlohy (1.23), (1.24) je definováno pro všechna $t \in J$ a platí

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le u^*(t) \quad \textit{pro } t \in J\,.$$

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 91. □

Příklad

Najdeme odhad řešení počátečního problému

$$x' = \frac{t + x}{1 + x^2}, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{2.20}$$

na intervalu $[t_0, \infty)$.

Pravou stranu rovnice můžeme chápat jako funkci jedné proměnné x s jedním parametrem t. Standardními metodami diferenciálního počtu najdeme globální maximum a minimum této funkce; konkrétně, pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{t - \sqrt{t^2+1}}{2} \le \frac{t+x}{1+x^2} \le \frac{t + \sqrt{t^2+1}}{2}.$$

Odtud plyne že $\left| \frac{t+x}{1+x^2} \right| \le \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2+1} \right)$. Počáteční úloha

$$u' = \frac{t + \sqrt{t^2+1}}{2}, \qquad u(t_0) = |x_0|\,.$$

Na pravé straně této rovnice je derivace funkce u, na její levé straně je funkce jedné proměnné. Jediné řešení úlohy je tedy dáno integrálem

$$u(t) = |x_0| + \frac{1}{4}\left(t^2 + t\sqrt{t^2+1} - t_0^2 - t_0\sqrt{t_0^2+1} + \ln \frac{t+\sqrt{t^2+1}}{t_0 + \sqrt{t_0^2+1}} \right)$$

a podle srovnávací věty 8 platí $|x(t)| \le u(t)$ pro všechna $t \ge t_0$.

Řešení úlohy (2.20) pro $t_0 \ge 0$ lze odhadnout i jiným způsobem. V takovém případě totiž platí

$$\left| \frac{t+x}{1+x^2} \right| = \frac{|t+x|}{1+x^2} \le \frac{t+|x|}{1+x^2} \le t + |x|.$$

Jediné řešení počáteční úlohy

$$v' = v + t, \qquad v(t_0) = |x_0|$$

pro lineární rovnici je podle (1.22) rovno

$$v(t) = \big(|x_0| + t_0 + 1 \big) \mathrm{e}^{t-t_0} - t - 1$$

a podle srovnávací věty 8 platí $|x(t)| \le v(t)$ pro všechna $t \ge t_0 \ge 0$.

Poznamenejme ještě, že nelze říci, že by některý z uvedených odhadů u, v řešení úlohy (2.20) byl lepší než druhý. Situace je znázorněna na obrázku 2.3 b). ■

Důsledek 5. *Nechť symboly t_0, a, J, G mají stejný význam jako ve větě 8. Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a nechť existuje spojitá funkce $\varphi : J \to [0, \infty)$ taková, že*

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \le \varphi(t)\, \|\boldsymbol{x}\| \quad \textit{pro } (t, \boldsymbol{x}) \in G.$$

Pak pro každé $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\|\boldsymbol{x_0}\| \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \mathrm{d}\tau < a \quad \textit{pro všechna } t \in J,$$

jsou úplná řešení úlohy (1.23), (1.24) definována na celém intervalu J a platí

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \|\boldsymbol{x_0}\| \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \mathrm{d}\tau \quad \textit{pro } t \in J.$$

Důkaz plyne z věty 8 volbou $g(t,u) = \varphi(t)u$, $u_0 = \|\boldsymbol{x_0}\|$.
Jediné úplné (tedy maximální) řešení úlohy $u' = \varphi(t)u,\ u(t_0) = u_0$ je podle (1.22)

$$u(t) = u_0 \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

□

Kapitola 3

Lineární rovnice a systémy

3.1 Lineární rovnice

Obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu je tvaru

$$x' = a(t)x + b(t). \tag{3.1}$$

O funkcích a, b budeme předpokládat, že jsou spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Pak pro všechna $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}$ má rovnice (3.1) s počáteční podmínkou

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.2}$$

jediné řešení; to plyne z poznámky 3 za větou 1, neboť

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(a(t)x + b(t)\big) = a(t)$$

a funkce a nabývá v okolí bodu t_0 pouze konečných hodnot, neboť je spojitá.

Lineární rovnice (3.1) se nazývá *homogenní,* pokud $b \equiv 0$; v opačném případě se nazývá *nehomogenní.*

Homogenní rovnici

$$x' = a(t)x \tag{3.3}$$

můžeme formálně přepsat pomocí diferenciálů ve tvaru

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x - a(t)\mathrm{d}t = 0,$$

tj. jako rovnici rovnici se separovanými proměnnými, viz str. 21. Její řešení s počáteční podmínkou (3.2) je proto implicitně dáno rovností

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} - \int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s = 0, \quad \text{tj.} \quad \ln\frac{|x|}{|x_0|} = \int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s.$$

Odtud dostaneme řešení počáteční úlohy (3.3), (3.2) ve tvaru

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s}. \tag{3.4}$$

Jinak řečeno, libovolné řešení homogenní rovnice (3.3) je násobkem funkce y definované vztahem

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s}. \tag{3.5}$$

Ještě jinak můžeme také říci, že množina všech řešení lineární homogenní rovnice tvoří jednodimenzionální vektorový prostor nad polem reálných čísel a funkce y je bází tohoto prostoru. Toto pozorování nás opravňuje funkci y nazvat *fundamentálním řešením lineární homogenní rovnice* (3.3). Tato funkce je řešením lineární homogenní rovnice (3.3), je to přirozená exponenciální funkce s integrálem závislým na horní mezi v exponentu. To znamená, že platí

$$y'(t) = a(t)y(t),\ \ y(t) > 0 \quad \text{pro každé } t \in J,\ \ t \neq t_0 \qquad \text{a} \quad y(t_0) = 1. \tag{3.6}$$

Obraťme nyní pozornost k nehomogenní lineární rovnici (3.1). Lineární homogenní rovnici (3.3) nazveme *přidruženou* k nehomogenní rovnici (3.1). Její řešení najdeme následující úvahou.

Nehomogenitu b v rovnici (3.1) můžeme chápat jako nějaký přidaný vliv, který v každém okamžiku „modifikuje" nebo „deformuje" řešení „neporušené" přidružené homogenní rovnice. Budeme předpokládat, že tento vliv nehomogenity se k „čistému" řešení (3.4) přičítá. Trochu přesněji řečeno, řešení počáteční úlohy (3.1), (3.2) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = x_0 y(t) + \tilde{x}(t), \tag{3.7}$$

kde $\tilde{x}$ je zatím neznámá funkce definovaná na intervalu J.

Pokud

$$\tilde{x}(t_0) = 0 \quad \text{a} \quad \tilde{x}'(t) = a(t)\tilde{x}(t) + b(t), \tag{3.8}$$

pak funkce x daná rovností (3.7) je skutečně řešením počáteční úlohy (3.1), (3.2); podle (3.6) totiž platí

$$x'(t) = x_0 y'(t) + \tilde{x}'(t) = x_0 a(t)y(t) + a(t)\tilde{x}(t) + b(t) = a(t)\big(x_0 y(t) + \tilde{x}(t)\big) + b(t),$$

$$x(t_0) = x_0 y(t_0) + \tilde{x}(t_0) = x_0.$$

Nyní můžeme říci přesněji, že řešení nehomogenní rovnice (3.1) s počáteční podmínkou (3.2) hledáme ve tvaru součtu řešení přidružené homogenní rovnice s původní počáteční podmínkou (3.2) a řešení $\tilde{x}$ nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou. Funkce $\tilde{x}$ tedy vyjadřuje „kumulované vlivy působení nehomogenity b" od počátečního okamžiku t_0. To napovídá, že funkce $\tilde{x}$ by mohla být tvaru

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} w(t,s)\mathrm{d}s, \tag{3.9}$$

kde w je zatím neznámá funkce dvou proměnných, která je ve druhé proměnné integrovatelná.

Provedená úvaha je známa jako *Duhamelův princip:* Řešení nehomogenní rovnice hledáme jako součet řešení přidružené homogenní rovnice a řešení nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou. Řešení nehomogenní rovnice potom hledáme ve tvaru integrálu od t_0 do t z funkce závislé na parametru t.

O integrované funkci w budeme nyní předpokládat, že v je první proměnné diferencovatelná. Derivováním integrálu na pravé straně rovnosti (3.9) podle parametru t dostaneme derivaci funkce $\tilde{x}$ ve tvaru

$$\tilde{x}'(t) = w(t,t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} w(t,s)\mathrm{d}s.$$

Dosazením tohoto vyjádření do druhé podmínky (3.8) dostaneme po snadné úpravě

$$\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial}{\partial t} w(t,s) - a(t)w(t,s) \right) \mathrm{d}s = b(t) - w(t,t).$$

Tato rovnost je slněna zejména tehdy, když na obou jejích stranách jsou nuly; k tomu stačí, aby funkce w měla vlastnosti

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t,s) = a(t)w(t,s), \quad w(s,s) = b(s)$$

pro všechna $s \in J$. Proměnnou s ve funkci w nyní můžeme chápat jako parametr a na předchozí podmínky se dívat jako na počáteční úlohu pro funkci $w(\,\cdot\,, s)$. Jedná se pak o lineární homogenní rovnici, takže její řešení je podle (3.4) tvaru

$$w(t,s) = b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}.$$

Toto vyjádření dosadíme do (3.9) a dostaneme funkci $\tilde{x}$ ve tvaru

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}s;$$

tato funkce splňuje obě podmínky (3.8). Dosazením do rovnosti (3.7) dostaneme řešení počáteční úlohy (3.1), (3.2) vyjádřené formulí

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s} + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma} \mathrm{d}s. \tag{3.10}$$

Tato funkce byla zkonstruována tak, aby řešila počáteční úlohu (3.1), (3.2). Již víme, že toto řešení je jediné. (Mimochodem, rovnost (3.10) je totožná s rovností (1.22), která byla odvozena pomocí integračního faktoru.) Ověřili jsme tak, že pro libovolné řešení rovnice (3.1) skutečně platí rovnost (3.7). To znamená, že množina řešení nehomogenní lineární rovnice tvoří afinní prostor, jehož zaměření je (vektorový) prostor řešení přidružené homogenní rovnice.

S využitím fundamentálního řešení y přidružené homogenní rovnice daného formulí (3.5) můžeme řešení počáteční úlohy (3.1), (3.2) pro nehomogenní rovnici zapsat v některém z kompaktnějších tvarů

$$x(t) = x_0 y(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{y(t)}{y(s)} b(s)\mathrm{d}s = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{y(s)}\mathrm{d}s \right) y(t),$$

neboť

$$\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma} = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma - \int_{t_0}^s a(\sigma)\mathrm{d}\sigma} = y(t)y(s)^{-1}.$$

Dále zavedeme *Cauchyovu funkci* $c : J \times J \to \mathbb{R}$ *rovnice* (3.3) předpisem

$$c(t,s) = y(t)y(s)^{-1} = \mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}.$$

Pak pro každé $s \in J$ je funkce $c(\,\cdot\,, s)$ řešením homogenní rovnice (3.3) s počáteční podmínkou $x(s) = 1$. Pomocí Cauchyovy funkce můžeme řešení počáteční úlohy (3.1), (3.2) zapsat ve tvaru

$$x(t) = x_0 c(t,t_0) + \int_{t_0}^t c(t,s)b(s)\mathrm{d}s.$$

Ještě poznamenejme, že počáteční hodnota x_0 v podmínce (3.2) byla libovolná, proto můžeme první sčítanec na pravé straně rovnosti (3.7) považovat za obecné řešení lineární homogenní rovnice (3.3). Obecné řešení lineární nehomogenní rovnice jsme tedy vyjádřili jako součet obecného řešení přidružené homogenní rovnice a partikulárního řešení dané rovnice s nulovou počáteční podmínkou. Tento výsledek lze mírně zobecnit:

Tvrzení 5. Obecné řešení nehomogenní lineární rovnice (3.1) je součtem obecného řešení přidružené lineární homogenní rovnice a nějakého partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Lineární rovnice nemá singulární ani zvláštní řešení.

Důkaz: Nechť $x_H = Cy$ je obecné řešení přidružené homogenní rovnice (3.3); přitom y je fundamentální řešení definované vztahem (3.5). Buď x_N nějaké partikulární řešení nehomogenní rovnice (3.1). Pak s využitím vztahů (3.6) platí

$$(x_H + x_N)'(t) = x_H'(t) + x_N'(t) = Ca(t)y(t) + a(t)x_N(t) + b(t) = a(t)\big(Cy(t) + x_N(t)\big) + b(t),$$

takže funkce $x_H + x_N$ je řešením rovnice (3.1).

Buďte nyní $t_0 \in J$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ libovolné. Položme $C = x_0 - x_N(t_0)$. Pak

$$(x_H + x_N)(t_0) = Cy(t_0) + x_N(t_0) = \big(x_0 - x_N(t_0)\big)y(t_0) + x_N(t_0) = x_0,$$

takže funkce $x_H + x_N$ splňuje také počáteční podmínku (3.2).

Zbytek tvrzení plyne jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro lineární rovnici. □

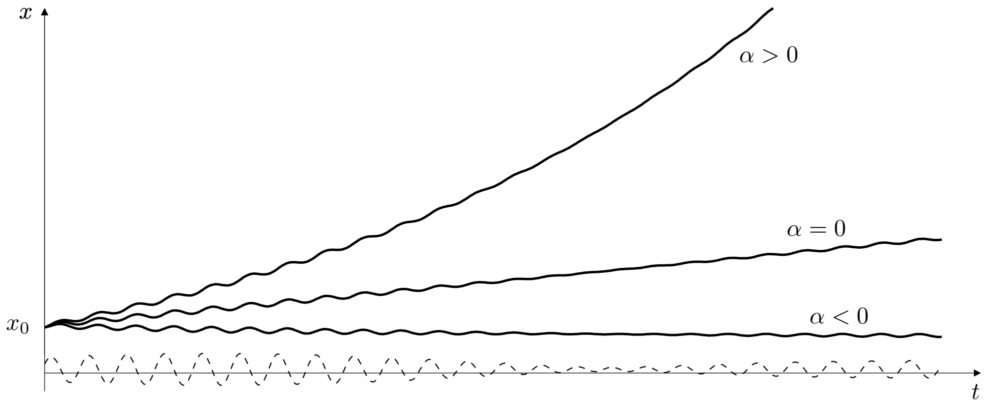
3.1.1 Lineární rovnice s konstantním koeficientem

Uvažujme lineární homogenní rovnici (3.3), v níž je funkce a konstantní, $a \equiv \alpha$, tedy rovnici

$$x' = \alpha x. \tag{3.11}$$

V tomto případě je $\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s = \int_{t_0}^t \alpha \mathrm{d}s = \alpha(t - t_0)$, takže fundamentální řešení (3.5) rovnice (3.11) je

$$y(t) = \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)}. \tag{3.12}$$



Obrázek 3.1: Typický průběh lineární nehomogenní rovnice s konstantním koeficientem (3.13) pro různé hodnoty koeficient α. Nehomogenita b je znázorněna tečkovaně.

Platí tedy $y \equiv 1$ pro $\alpha = 0$; pro $\alpha > 0$, resp. $\alpha < 0$ je funkce y ryze rostoucí, resp. klesající, a platí

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{cases} \infty, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Koeficient α tedy určuje kvalitativní vlastnosti řešení rovnice (3.11): pro α kladné je každé řešení neohraničené (monotonně roste do ∞, nebo monotonně klesá do $-\infty$), pro α záporné každé řešení monotonně vymizí (jeho hodnota se přiblíží libovolně blízko k nule); v mezním případě $\alpha = 0$ je každé řešení konstantní.

Tento výsledek můžeme zformulovat i jinak: Rovnice (3.11) má vždy nulové řešení, tj. konstantní řešení $x \equiv 0$. Je-li $\alpha < 0$, pak každé řešení rovnice (3.11) se k nulovému řešení „přibližuje“ a pokud začíná „blízko“ nulového, v průběhu času „blízko k němu“ zůstává. Je-li $\alpha = 0$, pak každé řešení začínající „blízko“ nulového zůstává v průběhu času „blízko“ něho. Je-li $\alpha > 0$, pak řešení rovnice začínající „libovolně blízko“ nulového se od něho za dostatečně dlouhý čas vzdálí. V případě $\alpha \leq 0$ proto říkáme, že nulové řešení rovnice (3.11) je *stabilní*, v případě $\alpha > 0$ říkáme, že nulové řešení je *nestabilní* a v případě $\alpha \leq 0$ mluvíme o *(globálně) asymptoticky stabilním* nulovém řešení. Často také mluvíme o stabilitě, asymptotické stabilitě nebo nestabilitě lineární rovnice (3.11).

Řešení počáteční úlohy pro lineární nehomogenní rovnici s konstantním koeficientem

$$x' = \alpha x + b(t) \tag{3.13}$$

a počáteční podmínkou (3.2) je podle (3.10) dáno formulí

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\mathrm{d}s = \left(x_0 \mathrm{e}^{-\alpha t_0} + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}s \right) \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Typický průběh řešení rovnice (3.13) je znázorněn na Obr. 3.1.

Pokud je i nehomogenita b konstantní, $b \equiv \beta \neq 0$, platí

$$\int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\mathrm{d}s = \beta \mathrm{e}^{\alpha t}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}s = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} - 1\right), & \alpha \neq 0, \\ \beta(t-t_0), & \alpha = 0. \end{cases}$$

Řešení rovnice

$$x' = \alpha x + \beta \tag{3.14}$$

s počáteční podmínkou (3.2) je pro $\alpha \neq 0$ dáno některým z ekvivalentních vyjádření

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} - 1\right) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} - \frac{\beta}{\alpha}$$

a pro $\alpha = 0$ je

$$x(t) = x_0 + \beta(t - t_0).$$

Vidíme, že řešení x úlohy (3.14), (3.2) má pro $\alpha < 0$ vlastnost

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = -\frac{\beta}{\alpha}$$

a pro $\alpha \geq 0$ je řešení neohraničené (monotonně diverguje do $+\infty$ nebo $-\infty$ v závislosti na znaménku výrazu $\alpha x_0 + \beta$).

Exkurs: Kauzální funkce a konvoluce

Funkce definované na intervalu $(-\infty, \infty)$ takové, že jejich hodnota je pro záporné hodnoty nezávisle proměnné nulová, se nazývají *kauzální*. Tento název vyjadřuje představu, že nějaká veličina „vznikla z nějaké příčiny“ (latinsky *causa*) v počátečním čase $t_0 = 0$.

Podívejme se na řešení rovnice (3.13) v oboru kauzálních funkcí. To můžeme považovat za řešení dané rovnice na intervalu $[0, \infty)$, které je pro záporné hodnoty argumentu definováno jako nulové. Klademe tedy $b(t) = 0$ pro $t < 0$. Funkce y definovaná vztahem

$$y(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

je fundamentálním řešením přidružené homogenní rovnice k rovnici (3.13). Řešení rovnice (3.13) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$ je dáno formulí

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\alpha t} + \int_0^t b(s)\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\mathrm{d}s = x_0 y(t) + \int_{-\infty}^{\infty} b(s)y(t-s)\mathrm{d}s.$$

Poslední člen je hodnotou konvoluce funkcí b a y v bodě t. Řešení rovnice (3.13) v oboru kauzálních funkcí tedy můžeme psát ve tvaru

$$x = x_0 y + b * y.$$

3.1.2 Lineární rovnice s periodickým koeficientem

Nechť f je ω-periodická funkce, tj. funkce definovaná na intervalu $(-\infty,\infty)$, pro niž existuje konstanta $\omega>0$ taková, že $f(t+\omega)=f(t)$. Pro ω-periodické funkce zavedeme označení

$$\bar f=\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega f(s)\mathrm{d}s.$$

Snadno nahlédneme, že

$$\bar f=\frac{1}{\omega}\int\limits_t^{t+\omega} f(s)\mathrm{d}s$$

pro libovolnou hodnotu t. Veličina $\bar f$ představuje integrální průměr hodnot funkce f přes interval délky periody.

Buď nyní t libovolné kladné číslo a N největší celé číslo takové, že $N\omega\le t$, tj. $N=[t/\omega]$. Pak

$$\int\limits_0^{t-N\omega}\big(f(s)-\bar f\big)\mathrm{d}s\le\omega\max\big\{f(t)-\bar f:\,0\le t\le\omega\big\}<\infty,$$

neboť na levé straně je integrál ze spojité (a tedy ohraničené) funkce na konečném intervalu délky nejvýše ω. Dále platí

$$\frac1t\int\limits_0^t f(s)\mathrm{d}s=\frac1t\left(\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{i\omega}^{(i+1)\omega}f(s)\mathrm{d}s+\int\limits_{N\omega}^t f(s)\mathrm{d}s\right)=\frac1t\left(N\omega\bar f+\int\limits_0^{t-N\omega}f(s)\mathrm{d}s\right)=$$

$$=\frac1t\left(\big(t-(t-N\omega)\big)\bar f+\int\limits_0^{t-N\omega}f(s)\mathrm{d}s\right)=\bar f+\frac1t\int\limits_0^{t-N\omega}\big(f(s)-\bar f\big)\mathrm{d}s.$$

Limitním přechodem $t\to\infty$ odtud dostaneme

$$\lim_{t\to\infty}\frac1t\int\limits_0^t f(s)\mathrm{d}s=\bar f.$$

Hodnota $\bar f$ tedy také vyjadřuje integrální průměr z funkce f přes neomezený interval.

Uvažujme lineární homogenní rovnici (3.3) s ω-periodickou funkcí a. Označme

$$\varphi(t)=\mathrm{e}^{\int\limits_0^t(a(s)-\bar a)\mathrm{d}s}.$$

Pak funkce φ je definovaná na celém intervalu $(-\infty,\infty)$ a je zde spojitá, je nezáporná a splňuje podmínku $\varphi(0)=1$. Poněvadž platí

$$\int\limits_0^{t+\omega}\big(a(s)-\bar a\big)\mathrm{d}s=\int\limits_0^t\big(a(s)-\bar a\big)\mathrm{d}s+\int\limits_t^{t+\omega}\big(a(s)-\bar a\big)\mathrm{d}s=$$

$$=\int\limits_0^t\big(a(s)-\bar a\big)\mathrm{d}s+\omega\bar a-\bar a\omega=\int\limits_0^t\big(a(s)-\bar a\big)\mathrm{d}s,$$

platí také

$$\varphi(t+\omega) = \mathrm{e}^{\int\limits_0^{t+\omega}(a(s)-\bar{a})\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{\int\limits_0^{t}(a(s)-\bar{a})\mathrm{d}s} = \varphi(t),$$

takže funkce φ je ω-periodická.

Rovnici (3.3) uvažujme s počáteční podmínkou

$$x(0) = x_0. \tag{3.15}$$

Fundamentální řešení (3.5) této úlohy je

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int\limits_0^t a(s)\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{\int\limits_0^t \left(a(s)-\bar{a}\right)\mathrm{d}s + \bar{a}t} = \varphi(t)\mathrm{e}^{\bar{a}t}$$

a obecné řešení tedy je

$$x(t) = x_0\varphi(t)\mathrm{e}^{\bar{a}t}. \tag{3.16}$$

Provedené úvahy můžeme shrnout:

Tvrzení 6. Řešení rovnice (3.3) s ω-periodickou funkcí a a s počáteční podmínkou (3.15) je dáno formulí (3.16), kde φ je kladná, spojitá, ω-periodická funkce taková, že

$$\varphi'(t) = \big(a(t)-\bar{a}\big)\varphi(t), \qquad \varphi(0) = 1.$$

Vyjádření (3.16) se nazývá *Floquetova representace* řešení úlohy (3.3), (3.15) s periodickým koeficientem a. Můžeme ji interpretovat jako multiplikativní rozklad řešení $x = x(t)$ na trend $\mathrm{e}^{\bar{a}t}$ a sezónní složku $\varphi(t)$.

Ještě si promyslete, že nahrazení obecné podmínky (3.2) speciální podmínkou (3.15) nepředstavuje pro rovnici (3.3) s periodickým koeficientem a žádnou újmu na obecnosti.

3.2 Systémy lineárních rovnic

Systém n obyčejných lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu je tvaru

$$\begin{array}{lcccccccc}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 &+& a_{12}(t)x_2 &+ \dots +& a_{1n}(t)x_n &+& b_1(t), \\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 &+& a_{22}(t)x_2 &+ \dots +& a_{2n}(t)x_n &+& b_2(t), \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 &+& a_{n2}(t)x_2 &+ \dots +& a_{nn}(t)x_n &+& b_n(t).
\end{array}$$

Označíme

$$\mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

a lineární systém zapíšeme ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t). \tag{3.17}$$

O funkcích $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn}$ a $b_1, b_2, \dots, b_n$ budeme předpokládat, že jsou spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Pak pro všechna $t_0 \in j$ a $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ má systém (3.17) s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{3.18}$$

jediné úplné řešení definované na intervalu J; to plyne z poznámky 3 za Větou 1 a z Věty 4, neboť

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\big(\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)\big)_i = a_{ij}(t)$$

a funkce a_{ij} nabývá v okolí každého bodu $t \in J$ pouze konečných hodnot, protože je spojitá.

Pokud vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ na levé straně systému (3.17) je identicky nulová, $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{o}$, systém (3.17) se nazývá *homogenní,* v opačném případě *nehomogenní.*

3.2.1 Struktura řešení lineárního homogenního systému

Nejprve se budeme věnovat homogennímu systému

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{3.19}$$

Bezprostředně vidíme, že tento systém má nulové řešení $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{o}$. Dále platí *princip superpozice:*

- Je-li $\boldsymbol{x}$ řešení systému (3.19) a α je libovolná konstanta, pak také vektorová funkce $\alpha\boldsymbol{x}$ je řešením systému (3.19).
- Jsou-li $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2$ řešením systému (3.19), pak také jejich součet je řešení systému (3.19).

Vskutku,

$$\big(\alpha\boldsymbol{x}\big)'(t) = \alpha\boldsymbol{x}'(t) = \alpha\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{A}(t)\big(\alpha\boldsymbol{x}\big)(t),$$

$$\big(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\big)'(t) = \boldsymbol{x}_1'(t)+\boldsymbol{x}_2'(t) = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x}_1(t)+\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x}_2(t) = \mathsf{A}(t)\big(\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)\big) = \mathsf{A}(t)\big(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\big)(t).$$

Jinak řečeno, množina všech řešení lineárního homogenního systému tvoří vektorový prostor. Určíme jeho dimenzi.

Lemma 2. *Nechť vektorové funkce $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ jsou řešením systému* (3.19)*. Jsou-li vektory $\boldsymbol{x}_1(t_0), \boldsymbol{x}_2(t_0), \dots, \boldsymbol{x}_k(t_0)$ lineárně nezávislé pro nějaké $t_0 \in J$, pak jsou lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \dots, \boldsymbol{x}_k(t)$ pro všechna $t \in J$.*

Důkaz: Připusťme, že existuje $t_1 \in J$ takové, že vektory $\boldsymbol{x}_1(t_1), \boldsymbol{x}_2(t_1), \dots, \boldsymbol{x}_k(t_1)$ jsou lineárně závislé. Pak existují konstanty $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$, ne všechny nulové, že

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1(t_1) + \alpha_2\boldsymbol{x}_2(t_1) + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k(t_1) = \boldsymbol{o}.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\alpha_k \neq 0$. Pak

$$\boldsymbol{x}_k(t_1) = -\frac{1}{\alpha_k}\big(\boldsymbol{x}_1(t_1) + \boldsymbol{x}_2(t_1) + \cdots + \boldsymbol{x}_{k-1}(t_1)\big).$$

Podle principu superpozice je vektorová funkce

$$\boldsymbol{z} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\boldsymbol{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\boldsymbol{x}_2 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}1}{\alpha_k}\boldsymbol{x}_{k-1}$$

řešením systému (3.19), pro kterou platí

$$\boldsymbol{z}(t_0) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\boldsymbol{x}_1(t_0) - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\boldsymbol{x}_2(t_0) - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}1}{\alpha_k}\boldsymbol{x}_{k-1}(t_0) \tag{3.20}$$

a

$$\boldsymbol{z}(t_1) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\boldsymbol{x}_1(t_1) - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\boldsymbol{x}_2(t_1) - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}1}{\alpha_k}\boldsymbol{x}_{k-1}(t_1)\boldsymbol{x}_k(t_1).$$

Z jednoznačnosti řešení lineárního systému (3.19) nyní plyne, že $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_k$, a tedy podle (3.20) je $\boldsymbol{x}_k(t_0)$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{x}_1(t_0), \boldsymbol{x}_2(t_0), \dots, \boldsymbol{x}_{k-1}(t_0)$. To je spor s předpokládanou lineární nezávislostí vektorů $\boldsymbol{x}_1(t_0), \boldsymbol{x}_2(t_0), \dots, \boldsymbol{x}_k(t_0)$. □

Lemma 3. *Nechť vektorové funkce $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ jsou řešením systému (3.19). Jsou-li vektory $\boldsymbol{x}_1(t_0), \boldsymbol{x}_2(t_0), \dots, \boldsymbol{x}_k(t_0)$ lineárně nezávislé pro nějaké $t_0 \in J$, pak jsou vektorové funkce $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ lineárně nezávislé.*

Důkaz: Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jsou konstanty takové, že

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k \equiv \boldsymbol{o}.$$

Z principu superpozice plyne, že vektorová funkce $\boldsymbol{z}$ je řešením systému (3.19), která splňuje podmínku

$$\boldsymbol{z}(t_0) = \alpha_1\boldsymbol{x}_1(t_0) + \alpha_2\boldsymbol{x}_1(t_0) + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k(t_0) = \boldsymbol{o}.$$

Lineární nezávislost vektorů $vekx_1(t_0), \boldsymbol{x}_1(t_0), \dots, \boldsymbol{x}_k(t_0)$ implikuje rovnosti

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

To znamená, že vektorové funkce $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$ jsou lineárně nezávislé. □

Lemma 4. *Nechť vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n$ jsou jsou řešení systému (3.19) s počátečními podmínkami*

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{v}, \ \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Pak jsou vektorové funkce $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n$ lineárně nezávislé a tvoří bázi prostoru řešení lineárního systému (3.19).

Důkaz: Tvrzení o nezávislosti funkcí $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_n$ plyne bezprostředně z předchozího lemmatu a z vlastností báze vektorových prostorů.

Nechť $\boldsymbol{z}$ je libovolné řešení systému (3.19). Vektor $\boldsymbol{z}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ vyjádříme pomocí báze $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$,

$$\boldsymbol{z}(t_0) = \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \beta_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \beta_n\boldsymbol{v}_n.$$

Z principu superpozice plyne, že vektorová funkce $\boldsymbol{\eta} = \beta_1\boldsymbol{y}_1 + \beta_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + \beta_n\boldsymbol{y}_n$ je řešením systému (3.19) splňující počáteční podmínku $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{z}(t_0)$. Jednoznačnosti řešení systému (3.19) nyní implikuje $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\eta} = \beta_1\boldsymbol{y}_1 + \beta_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + \beta_n\boldsymbol{y}_n$. □

Odvodili jsme tak následující větu a jsme oprávněni zavést následující definici.

Věta 9. *Je-li maticová funkce $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$, $\mathsf{A} : J \to \mathbb{R}^{n^2}$ spojitá, pak množina všech řešení vektorové rovnice (3.19) tvoří n-rozměrný vektorový prostor.*

Právě skutečnost, že množinou řešení vektorové rovnice (3.19) je vektorový prostor, ospravedlňuje terminologii. Systém (vektorová rovnice) se nazývá lineární proto, že množina všech jeho řešení tvoří vektorový (lineární) prostor, nikoliv pro její speciální tvar.

Definice 11. Libovolná báze prostoru všech řešení lineární homogenní rovnice (3.19) se nazývá *fundamentální systém řešení rovnice* (3.19).

Nechť funkce $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_1}(t), \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{y_2}(t), \dots, \boldsymbol{y_n} = \boldsymbol{y_n}(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.19). Obecné řešení této rovnice je jejich lineární kombinace

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{y_1}(t) + c_2\boldsymbol{y_2}(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{y_n}(t).$$

Označme $y_{j,i} = y_{j,i}(t) = \big(\boldsymbol{y_j}(t)\big)_i$,

$$\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t) = \Big(\boldsymbol{y_1}(t), \boldsymbol{y_2}(t), \dots, \boldsymbol{y_n}(t)\Big) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(t) & y_{1,2}(t) & \dots & y_{1,n}(t) \\ y_{2,1}(t) & y_{2,2}(t) & \dots & y_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,1}(t) & y_{n,2}(t) & \dots & y_{n,n}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t)$ se nazývá *fundamentální matice řešení systému* (3.19). Z lineární nezávislosti vektorových funkcí $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}$ plyne, že sloupce fundamentální matice Y jsou lineárně nezávislé pro každé $t \in J$. To znamená, že matice $\mathsf{Y}(t)$ je regulární, $\det \mathsf{Y}(t) \neq 0$ pro každé $t \in J$.

Obecné řešení rovnice (3.19) lze nyní zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}. \tag{3.21}$$

Symbolem $\boldsymbol{c_0}$ označme n-tici konstant takových, že funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c_0}$ je řešením počátečního problému (3.19), (3.18). Z rovnosti $\boldsymbol{x_0} = \mathsf{Y}(t_0)\boldsymbol{c_0}$ pak plyne, že $\boldsymbol{c_0} = \mathsf{Y}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x_0}$. Řešení počáteční úlohy (3.19), (3.18) tedy můžeme psát ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x_0}.$$

Podobně jako v případě skalární rovnice můžeme zavést *maticovou Cauchyovu funkci* $\mathsf{C} : J \times J \to \mathbb{R}^{n^2}$ homogenního systému (3.19) vztahem

$$\mathsf{C}(t,s) = \mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(s)^{-1}$$

a řešení počáteční úlohy (3.19), (3.18) psát ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{C}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0.$$

3.2.2 Lineární nehomogenní systém

Nyní se budeme věnovat nehomogenní vektorové rovnici (3.17). Rovnice (3.19) se stejnou maticovou funkcí A se nazývá *homogenní rovnice přidružená k nehomogenní rovnici* (3.17).

Uvažujme dvě řešení $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2$ nehomogenní rovnice (3.17). Pak platí

$$\big(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\big)'(t) = \boldsymbol{x}_1'(t) - \boldsymbol{x}_2'(t) = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x_1}(t) + \boldsymbol{b}(t) - \big(\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x_2}(t) + \boldsymbol{b}(t)\big) = \mathsf{A}(t)\big(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\big)(t).$$

Tímto výpočtem jsme odvodili jistou analogii principu superpozice pro nehomogenní rovnice: Rozdíl dvou řešení nehomogenní vektorové rovnice (3.17) je řešením přidružené homogenní rovnice (3.19). Jinak řečeno, řešení nehomogenní rovnice $\boldsymbol{x}$ je součtem nějakého řešení $\boldsymbol{x_H}$ homogenní rovnice a řešení $\boldsymbol{x_N}$ nehomogenní rovnice, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_N} + \boldsymbol{x_h}$. Dostáváme tak analogii Tvrzení 5, které již známe z teorie skalární lineární rovnice:

Tvrzení 7. Obecné řešení nehomogenní vektorové lineární rovnice (3.17) je součtem obecného řešení přidružené lineární homogenní rovnice a nějakého partikulárního řešení nehomogenní rovnice.

To spolu s Větou 9 znamená, že množina všech řešení nehomogenní rovnice (3.17) tvoří afinní prostor, jehož zaměřením je vektorový prostor řešení přidružené homogenní rovnice (3.19).

Obecné řešení přidružené homogenní rovnice je dáno rovností (3.21). Zbývá tedy najít aspoň jedno řešení rovnice nehomogenní. To můžeme udělat pomocí Duhamelova principu. Ukážeme ale jiný způsob, *metodu variace konstant.*

Můžeme si představit, že nehomogenita $\boldsymbol{b}$ nějak „ruší“, „deformuje“, nebo „modifikuje“ průběh procesu, který by se bez ní vyvíjel jako řešení homogenního systému. Toto „rušení“ se ve výsledku projeví tak, že konstantní vektor $\boldsymbol{c}$ v obecném řešení (3.21) přestane být konstantní, ale bude se v čase měnit. Jinak a trochu přesněji řečeno, řešení nehomogenního systému (3.17) hledáme ve tvaru $\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}(t)$. Toto řešení musí splňovat rovnosti

$$\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{x}'(t) = \mathsf{Y}'(t)\boldsymbol{c}(t) + \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t) = \mathsf{A}(t)\mathsf{Y}\boldsymbol{c}(t) + \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t) = \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t),$$

tedy

$$\boldsymbol{b}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t).$$

Fundamentální matice Y je regulární na celém definičním intervalu J, proto z předchozí rovnice dostaneme

$$\boldsymbol{c}'(t) = \mathsf{Y}(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t)$$

a odtud integrací

$$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{c}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s.$$

Hledáme jedno řešení nehomogenní rovnice. Proto klidně můžeme položit $\boldsymbol{c}(t_0) = \boldsymbol{o}$. Obecné řešení nehomogenní vektorové rovnice (3.17) je nyní podle Tvrzení 7 a rovnosti (3.21) dáno formulí

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c} + \mathsf{Y}(t)\int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s.$$

Řešení rovnice (3.17) s počáteční podmínkou (3.18) musí splňovat rovnosti

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) = \mathsf{Y}(t_0)\int_{t_0}^{t_0} \mathsf{Y}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s = \mathsf{Y}(t_0).$$

Odtud $\boldsymbol{c} = \mathsf{Y}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}_0$. Řešení počáteční úlohy (3.17), (3.18) je tedy dáno rovností

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s,$$

kde Y je fundamentální matice řešení přidruženého homogenního systému (3.19). S využitím Cauchyovy funkce C můžeme tento výsledek zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{C}(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathsf{C}(t, s)\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s.$$

Řešení lineárního nehomogenního systému (3.17) s počáteční podmínkou (3.18) je tedy součtem řešení přidruženého homogenního systému (3.19) se stejnou počáteční podmínkou a řešení nehomogenního systému s nulovou počáteční podmínkou.

Na závěr ještě ukážeme, že rozlišování lineárních rovnic na homogenní a nehomogenní vyjadřuje jen rozdílný pohled na tentýž abstraktní objekt. Nehomogenní rovnici lze totiž považovat za rovnici homogenní dimenze o jedničku vyšší.

Uvažujme řešeni $\boldsymbol{x}$ homogenního systému (3.19) a vektorovou funkci $\boldsymbol{z}$ definovanou vztahem

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak platí

$$\boldsymbol{z}'(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}(t) & \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{o}^\mathsf{T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc, 1 je řešením počáteční úlohy $z' = 0$, $z(t_0) = 1$. Těmito výpočty jsme odvodili:

Tvrzení 8. n-vektorová funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je řešením počáteční úlohy (3.17), (3.18) pro nehomogenní lineární rovnici právě tehdy, když $(n+1)$-vektorová funkce

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

je řešením počáteční úlohy

$$\boldsymbol{z}' = \mathsf{B}(t)\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z}(t_0) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

pro homogenní lineární rovnici; přitom

$$\mathsf{B}(t) = \begin{pmatrix} \mathsf{A}(t) & \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{o}^\mathsf{T} & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Homogenní lineární systém s konstantní maticí

Uvažujme vektorovou rovnici

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x}. \tag{3.23}$$

Konstantní maticová funkce A je definována na celé množině $\mathbb{R}$. To podle výsledku uvedeného v předchozí sekci na str. 63 znamená, že řešení rovnice (3.23) existuje, je definováno na intervalu $J = (-\infty, \infty)$ a pro libovolnou počáteční podmínku (3.18) je řešení jediné.

3.3.1 „Intuitivní hledání“ obecného řešení

Lineární homogenní rovnice prvního řádu s konstantním koeficientem

$$x' = ax$$

má obecné řešení $C\mathrm{e}^{at}$. Toto pozorování vede k nápadu, že také lineární homogenní systém s konstantní maticí by mohl mít řešení ve tvaru exponenciály.

Řešení rovnice (3.23) proto budeme hledat ve tvaru $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{w}\mathrm{e}^{\lambda t}$, kde $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ je konstantní vektor a λ je zatím neznámé číslo. Hodnota λ musí splňovat rovnosti

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{w}\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{w}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

takže vzhledem k tomu, že $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$, musí platit

$$\mathsf{A}\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w}.$$

To znamená, že λ je vlastní hodnotou matice A a $\boldsymbol{w}$ je příslušný vlastní vektor. Navíc z lineární algebry víme, že vlastní vektory příslušné k různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé. Vektorové funkce $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i}\boldsymbol{w}_i$, kde λ_i je vlastní hodnota matice A a $\boldsymbol{w}_i$ je příslušný vlastní vektor, patří do fundamentálního systému řešení.

Příklad: Řešení a asymptotické vlastnosti řešení[1] dvojrozměrného systému

$$\begin{aligned} x' &= ax+by, \\ y' &= cx+dy, \end{aligned} \qquad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \mathsf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Charakteristický polynom matice A je tvaru

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \operatorname{tr}\mathsf{A}\lambda + \det\mathsf{A}$$

a jeho kořena jsou dány rovnostmi

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\mathsf{A} \pm \sqrt{(\operatorname{tr}\mathsf{A})^2 - 4\det\mathsf{A}}\right).$$

Omezíme se na případ, že $\det\mathsf{A} \neq 0$ a rozlišíme dva případy:

- $\det\mathsf{A} < 0$: V tomto případě má matice A dva různé reálné nenulové kořeny λ_1 a λ_2, které mají opačná znaménka. Fundamentální systém řešení daného systému tedy tvoří vektorové funkce dané předpisem

$$\boldsymbol{y}_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w}_1, \quad \boldsymbol{y}_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{w}_2, \tag{3.25}$$

kde $\boldsymbol{w}_1$ a $\boldsymbol{w}_2$ jsou vlastní vektory příslušné k vlastním hodnotám λ_1 a λ_2. Nechť kladná vlastní hodnota je λ_i, záporná je λ_j. Při tomto označení platí

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}_i(t)\| = \infty, \ \lim_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{y}_i(t)\| = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{y}_j(t)\right\| = 0, \ \lim_{t\to-\infty}\left\|\boldsymbol{y}_j(t)\right\| = \infty$$

a pro jejich libovolnou lineární kombinaci $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2$ s $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ platí

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\| = \lim_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\| = \infty.$$

[1] V češtině poněkud matou dva významy slova „řešení“ – jednak funkce, která splňuje danou vektorovou rovnici, jednak postup vedoucí k nalezení této funkce. Anglicky by zadání znělo: *Solving of the 2-dimensional system and asymptotical characteristic of the solution.*

- $\det \mathsf{A} > 0$: V tomto případě může mít charakteristický polynom matice A dva různé reálné nebo komplexní kořeny, případně jeden reálný dvojnásobný kořen. Tyto možnosti rozlišíme:

  - $(\operatorname{tr}\mathsf{A})^2 > 4\det\mathsf{A}$: Z podmínky bezprostředně plyne, že $\operatorname{tr}\mathsf{A} \neq 0$. Charakteristický polynom má dva reálné různé kořeny, které mají stejné znaménko jako výraz $\operatorname{tr}\mathsf{A}$. Fundamentální systém řešení je opět tvořen funkcemi tvaru (3.25). Platí tedy:

    $\operatorname{tr}\mathsf{A} > 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}_1(t)\| = \lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}_2(t)\| = \infty,\; \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{y}_1(t)\| = \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{y}_2(t)\| = 0,$
    a tedy také pro každé nenulové řešení $\boldsymbol{x}$ daného systému platí
    $\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\| = \infty,\; \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\| = 0.$

    $\operatorname{tr}\mathsf{A} < 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}_1(t)\| = \lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}_2(t)\| = 0,\; \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{y}_1(t)\| = \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{y}_2(t)\| = \infty,$
    a tedy také pro každé nenulové řešení $\boldsymbol{x}$ daného systému platí
    $\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\| = 0,\; \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\| = \infty.$

  - $(\operatorname{tr}\mathsf{A})^2 < 4\det\mathsf{A}$: Charakteristický polynom má dva komplexně sdružené kořeny

    $$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\mathsf{A} \pm \mathrm{i}\sqrt{4\det\mathsf{A} - (\operatorname{tr}\mathsf{A})^2}\right) = \alpha \pm \beta\mathrm{i},$$

    příslušné vlastní vektory jsou také komplexně sdružené, $\boldsymbol{w}_{1,2} = \boldsymbol{u} \pm \mathrm{i}\boldsymbol{v}$. Vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou lineárně nezávislé. (Kdyby totiž jeden byl násobkem druhého, tj. kdyby existovala konstanta $c \neq 0$, že $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$, pak by vlastní vektory $\boldsymbol{w}_1 = (1 + c\mathrm{i})\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{w}_1 = (1 - c\mathrm{i})\boldsymbol{u}$ byly lineárně závislé.) Příslušný fundamentální systém řešení nyní označíme

    $$\boldsymbol{\eta}_1(t) = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})t}(\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t)(\boldsymbol{u} + \mathrm{i}\boldsymbol{v}),$$
    $$\boldsymbol{\eta}_2(t) = \mathrm{e}^{(\alpha-\beta\mathrm{i})t}(\boldsymbol{u} - \mathrm{i}\boldsymbol{v}) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t - \mathrm{i}\sin\beta t)(\boldsymbol{u} - \mathrm{i}\boldsymbol{v});$$

    jsou to vektorové komplexní funkce jedné reálné proměnné. Z principu superpozice plyne, že funkce

    $$\boldsymbol{y}_1(t) = \tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{\eta}_1(t) + \boldsymbol{\eta}_2(t)\big) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\boldsymbol{u}\cos\beta t - \boldsymbol{v}\sin\beta t)$$

    a

    $$\boldsymbol{y}_2(t) = -\mathrm{i}\tfrac{1}{2}\big(\boldsymbol{\eta}_1(t) - \boldsymbol{\eta}_2(t)\big) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\boldsymbol{v}\cos\beta t + \boldsymbol{u}\sin\beta t)$$

    jsou také řešením daného systému.
    Vektory $\boldsymbol{y}_1(0) = \boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{y}_2(0) = \boldsymbol{v}$ jsou lineárně nezávislé, a proto jsou podle Lemma 3 lineárně nezávislé i funkce $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$. Tvoří tedy fundamentální systém řešení. Fundamentální matice řešení daného systému je tedy tvaru

    $$\mathsf{Y}(t) = (\boldsymbol{u}\quad \boldsymbol{v})\begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\ -\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\alpha t},\quad \text{kde } \alpha = \tfrac{1}{2}(a+d),\; \beta = \sqrt{-bc - \tfrac{1}{4}(a-d)^2}.$$

    Matice
    $$\begin{pmatrix}\cos\beta t & \sin\beta t\\ -\sin\beta t & \cos\beta t\end{pmatrix}$$
    je periodická s periodou $\dfrac{2\pi}{\beta}$, funkce $\mathrm{e}^{\alpha t}$ je monotonní. Z toho plyne, že každá složka každého nenulového řešení $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ systému je tedy oscilatorická. Dále platí:

$\operatorname{tr}\mathsf{A} > 0 \;\Rightarrow\; \limsup\limits_{t\to\infty} x(t) = \limsup\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty,\; \liminf\limits_{t\to\infty} x(t) = \liminf\limits_{t\to\infty} y(t) = -\infty,$
$\lim\limits_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{o}$
a tedy řešení $\boldsymbol{x}$ osciluje s amplitudou rostoucí do nekonečna.

$\operatorname{tr}\mathsf{A} = 0 \;\Rightarrow\;$ řešení $\boldsymbol{x}$ je periodické.

$\operatorname{tr}\mathsf{A} < 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{o},$
$\limsup\limits_{t\to-\infty} x(t) = \limsup\limits_{t\to-\infty} y(t) = \infty,\; \liminf\limits_{t\to-\infty} x(t) = \liminf\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$
a tedy řešení $\boldsymbol{x}$ osciluje s amplitudou klesající k nule.

∘ $(\operatorname{tr}\mathsf{A})^2 = 4\det\mathsf{A}$: Podmínku lze upravit na tvar $(a-d)^2 = -4bc$. V této situaci má charakteristický polynom jeden reálný dvojnásobný kořen $\lambda = \frac{1}{2}(a+d)$.
Nyní rozlišíme dva případy:

- $b = c = 0$: V takovém případě musí platit $a = d$. Matice A je tedy tvaru $\mathsf{A} = a\mathsf{I}$, $\lambda = a$ je jediná vlastní hodnota a libovolný vektor je vlastním vektorem (tj. vlastní hodnota má algebraickou i geometrickou násobnost dvě). Fundamentální systém řešení můžeme napsat ve tvaru

$$\boldsymbol{y}_1(t) = \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(t) = \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

- $b^2 + c^2 = 0$: V takovém případě musí platit $bc \le 0$. Matice A je tvaru

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{(a-d)^2}{4b} & d \end{pmatrix}, \text{ pokud } b \neq 0,$$

nebo

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & -\dfrac{(a-d)^2}{4c} \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ pokud } c \neq 0.$$

Budeme se věnovat první možnosti ($b \neq 0$), tu druhou ($b = 0 \neq c$) můžeme řešit analogicky.
Vlastní vektor matice A příslušný k vlastní hodnotě $\lambda = \frac{1}{2}(a+d)$ je

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 2b \\ d-a \end{pmatrix}$$

a první prvek fundamentálního systému řešení je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{w}$. Uvažujme nyní „trochu porušenou“ matici A tak, aby se „příliš nelišila“ od matice A a měla dvě reálný vlastní hodnoty, z nichž jedna je rovna λ a přísluší k ní vlastní vektor $\boldsymbol{w}$. Můžeme např. vzít matici

$$\mathsf{B}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\dfrac{(a-d)^2}{4b} + \varepsilon\dfrac{a-d}{2b} & d+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Pro tuto matici platí $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathsf{B}(\varepsilon) = \mathsf{A}$. Její druhá vlastní hodnota a příslušný vlastní vektor jsou

$$\mu(\varepsilon) = \tfrac{1}{2}(a+d) + \varepsilon = \lambda + \varepsilon, \quad \boldsymbol{v}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 2b \\ d-a+2\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu(\varepsilon)=\lambda$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{v}(\varepsilon)=\boldsymbol{w}$. Podle principu superpozice je vektorová funkce

$$\boldsymbol{z}_\varepsilon(t)=\frac{1}{\mu(\varepsilon)-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\mu(\varepsilon)t}\boldsymbol{v}(\varepsilon)-\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{w}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}}{\varepsilon}\left[\mathrm{e}^{\varepsilon t}\begin{pmatrix}2b\\ d-a+2\varepsilon\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2b\\ d-a\end{pmatrix}\right]$$

řešením lineárního homogenního systému s konstantní maticí $\mathsf{B}(\varepsilon)$. Lze očekávat, že se nebude „příliš lišit“ od řešení původního systému s „neporušenou“ maticí A. Vskutku, s využitím de l'Hôpitalova pravidla vypočítáme

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{z}_\varepsilon(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix}2bt\mathrm{e}^{\varepsilon t}\\ t\mathrm{e}^{\varepsilon t}(d-a)+2(1+t\varepsilon)\mathrm{e}^{\varepsilon t}\end{pmatrix}=$$
$$=\mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix}2bt\\ t(d-a)+2\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\lambda t}\left[t\boldsymbol{w}+\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}\right].$$

Výsledek označíme $\boldsymbol{y}_2(t)$ a snadno přímým výpočtem ověříme, že tato vektorová funkce je řešením daného systému. Navíc, vektory

$$\boldsymbol{y}_1(0)=\begin{pmatrix}2b\\ d-a\end{pmatrix}\quad\text{a}\quad \boldsymbol{y}_2(0)=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé. To znamená, že vektorové funkce $\boldsymbol{y}_1$ a $\boldsymbol{y}_2$ tvoří fundamentální systém řešení daného systému.
Ještě označíme $\boldsymbol{y}_2(0)=\left(0,2\right)^{\mathsf{T}}=\tilde{\boldsymbol{w}}$ a máme fundamentální systém řešení daného systému ve tvaru

$$\boldsymbol{y}_1(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{w},\qquad \boldsymbol{y}_2(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\left(t\boldsymbol{w}+\tilde{\boldsymbol{w}}\right).$$

V obou případech vidíme, že podobně jako v předchozím případě platí:

$\operatorname{tr}\mathsf{A}>0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}_1(t)\|=\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}_2(t)\|=\infty,\; \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{y}_1(t)\|=\lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{y}_2(t)\|=0,$
a tedy také pro každé nenulové řešení $\boldsymbol{x}$ daného systému platí
$\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=\infty,\; \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0.$

$\operatorname{tr}\mathsf{A}<0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}_1(t)\|=\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{y}_2(t)\|=0,\; \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{y}_1(t)\|=\lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{y}_2(t)\|=\infty,$
a tedy také pro každé nenulové řešení $\boldsymbol{x}$ daného systému platí
$\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0,\; \lim\limits_{t\to-\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=\infty.$

■

3.3.2 Řešení počátečního problému metodou postupných aproximací

Řešení rovnice (3.23) s počáteční podmínkou (3.18) budeme hledat jako limitu Picardovy posloupnosti postupných aproximací. Členy této posloupnosti jsou podle Věty 1 rekurentně dány formulemi

$$\boldsymbol{x}_{k+1}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int\limits_{t_0}^{t}\mathsf{A}\boldsymbol{x}_k(s)\mathrm{d}s=\boldsymbol{x}_0+\mathsf{A}\int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{x}_k(s)\mathrm{d}s.$$

Postupně dostaneme (symbol I označuje jednotkovou matici):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \mathsf{A}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{x}_0 \mathrm{d}s \;=\; \boldsymbol{x}_0 + \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\right)\mathsf{A}\boldsymbol{x}_0 \;=\; \big(\mathsf{I} + (t-t_0)\mathsf{A}\big)\boldsymbol{x}_0,\\
\boldsymbol{x}_2(t) &= \boldsymbol{x_0} + \mathsf{A}\int_{t_0}^{t} \big(\mathsf{I} + (s-t_0)\mathsf{A}\big)\boldsymbol{x}_0 \mathrm{d}s \;=\; \boldsymbol{x}_0 + \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\right)\mathsf{A}\boldsymbol{x}_0 + \left(\int_{t_0}^{t} (s-t_0)\mathrm{d}s\right)\mathsf{A}^2\boldsymbol{x_0} \;=\\
&= \left(\mathsf{I} + (t-t_0)\mathsf{A} + \frac{(t-t_0)^2}{2}\mathsf{A}^2\right)\boldsymbol{x}_0,\\
\boldsymbol{x}_3(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \mathsf{A}\int_{t_0}^{t} \left(\mathsf{I} + (s-t_0)\mathsf{A} + \frac{1}{2}(s-t_0)^2\mathsf{A}^2\right)\boldsymbol{x}_0 \mathrm{d}s \;=\\
&= \boldsymbol{x}_0 + \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\right)\mathsf{A}\boldsymbol{x}_0 + \left(\int_{t_0}^{t} (s-t)\mathrm{d}s\right)\mathsf{A}^2\boldsymbol{x}_0 + \left(\int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}(s-t_0)^2\mathrm{d}s\right)\mathsf{A}^3\boldsymbol{x}_0 \;=\\
&= \boldsymbol{x}_0 + (t-t_0)\mathsf{A}\boldsymbol{x}_0 + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\mathsf{A}^2\boldsymbol{x}_0 + \frac{1}{2\cdot 3}(t-t_0)^3\mathsf{A}^3\boldsymbol{x}_0 \;=\\
&= \left(\mathsf{I} + (t-t_0)\mathsf{A} + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2\mathsf{A}^2 + \frac{1}{3!}(t-t_0)^3\mathsf{A}^3\right)\boldsymbol{x}_0.
\end{aligned}$$

Odtud již lze uhodnout, že obecný člen posloupnosti postupných aproximací je

$$\boldsymbol{x}_k(t) = \left(\mathsf{I} + (t-t_0)\mathsf{A} + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\mathsf{A}^2 + \cdots + \frac{(t-t_0)^k}{k!}\mathsf{A}^k\right)\boldsymbol{x_0},$$

Ověříme to úplnou indukcí: Pro $k = 0$ máme

$$\boldsymbol{x}_0(t) = \left(\frac{(t-t_0)^0}{0!}\mathsf{A}^0\right)\boldsymbol{x}_0 = \mathsf{I}\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x}_0$$

a z platnosti formule pro k plyne

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{k+1}(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \mathsf{A}\int_{t_0}^{t} \left(\mathsf{I} + (s-t_0)\mathsf{A} + \frac{(s-t_0)^2}{2!}\mathsf{A}^2 + \cdots + \frac{(s-t_0)^k}{k!}\mathsf{A}^k\right)\boldsymbol{x}_0 \mathrm{d}s =\\
&= \boldsymbol{x_0} + \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\right)\mathsf{A}\boldsymbol{x}_0 + \left(\int_{t_0}^{t} (s-t_0)\mathrm{d}s\right)\mathsf{A}^2\boldsymbol{x}_0 + \cdots + \left(\frac{1}{k!}\int_{t_0}^{t} (s-t_0)^k\mathrm{d}s\right)\mathsf{A}^{k+1}\boldsymbol{x}_0 =\\
&= \left(\mathsf{I} + (t-t_0)\mathsf{A} + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\mathsf{A}^2 + \frac{1}{3!}(t-t_0)^3\mathsf{A}^3 + \cdots + \frac{1}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}\mathsf{A}^{k+1}\right)\boldsymbol{x}_0.
\end{aligned}$$

Pokud bychom A považovali za konstantu a I za jedničku (tj. pro $n = 1$), je výraz v závorce k-tým částečným součtem Taylorovy řady funkce $\mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}$. Řešení úlohy

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{3.26}$$

můžeme proto formálně zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0. \tag{3.27}$$

Matice $\mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}$ je dána nekonečnou řadou

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!}\mathsf{A}^k.$$

Lze ukázat, že tato řada konverguje pro každé $t \in \mathbb{R}$ a tato konvergence je stejnoměrná.

Z lineární algebry víme, že matici A můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathsf{A} = \mathsf{W}^{-1}\mathsf{J}\mathsf{W},$$

kde W je regulární čtvercová matice řádu n a J je Jordanův kanonický tvar matice. Přitom sloupce matice W jsou (zobecněné) vlastní vektory matice A příslušné k vlastním hodnotám v jednotlivých blocích Jordanovy matice J. Platí tedy

$$\mathsf{A}^k = \left(\mathsf{W}^{-1}\mathsf{J}\mathsf{W}\right)^k = \mathsf{W}^{-1}\mathsf{J}\mathsf{W}\mathsf{W}^{-1}\mathsf{J}\mathsf{W}\mathsf{W}^{-1}\cdots\mathsf{W}\mathsf{W}^{-1}\mathsf{J}\mathsf{W} = \mathsf{W}^{-1}\mathsf{J}^k\mathsf{W}.$$

Formuli (3.27) vyjadřující řešení úlohy (3.26) nyní můžeme přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^k}{k!}\mathsf{W}^{-1}\mathsf{J}^k\mathsf{W}\right)\boldsymbol{x}_0 = \mathsf{W}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^k}{k!}\mathsf{J}^k\right)\mathsf{W}^{-1}\boldsymbol{x}_0. \tag{3.28}$$

Příklad: Najdeme řešení počáteční úlohy pro třídimensionální lineární systém obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y + z\,, \\ y' &= -x\,, \\ z' &= -2x - y\,, \qquad\qquad x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0. \end{aligned}$$

V tomto případě je

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

takže

$$\mathsf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{J}^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{1}{2}k(k-1) \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále platí

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!} = \mathrm{e}^t, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}k = t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = t\mathrm{e}^t, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\tfrac{1}{2}k(k-1) = \tfrac{1}{2}t^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} = \tfrac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t,$$

což znamená

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathsf{J}^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix} 1 & k & \frac{1}{2}k(k-1) \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^t.$$

Nyní vypočítáme součin

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
&\quad = \begin{pmatrix} -1 & -1-t & -1-t-\frac{1}{2}t^2 \\ 1 & t & 1+\frac{1}{2}t^2 \\ 1 & 1+t & t+\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
&\quad = \begin{pmatrix} 1+2t+\frac{1}{2}t^2 & t & t+\frac{1}{2}t^2 \\ -t-\frac{1}{2}t^2 & 1-t & -\frac{1}{2}t^2 \\ -2t-\frac{1}{2}t^2 & -t & 1-t-\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

a řešení dané úlohy dostaneme ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \Big[\big(1+2t+\tfrac{1}{2}t^2\big)\, x_0 + t y_0 + \big(t+\tfrac{1}{2}t^2\big)\, z_0 \Big] \mathrm{e}^t, \\
y(t) &= \Big[-\big(t+\tfrac{1}{2}t^2\big)\, x_0 + (1-t)\, y_0 - \tfrac{1}{2}t^2 z_0 \Big] \mathrm{e}^t, \\
z(t) &= \Big[-\big(2t+\tfrac{1}{2}t^2\big)\, x_0 - t y_0 + \big(1-t-\tfrac{1}{2}t^2\big)\, z_0 \Big] \mathrm{e}^t.
\end{aligned}
$$

■

Podívejme se nyní podrobněji na člen

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \mathsf{J}^k \tag{3.29}
$$

ve vyjádření (3.28) řešení úlohy (3.28). Jordanův kanonický tvar J je blokově diagonální matice

$$
\mathsf{J} = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_1 & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{J}_2 & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{J}_\mathsf{m} \end{pmatrix},
$$

blok J_i je čtvercová matice řádu n_i; přitom $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Jednotlivé bloky jsou tvaru

$$
\mathsf{J}_\mathsf{i} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \mathsf{J}_\mathsf{i} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},
$$

kde λ je vlastní číslo matice A. Je-li blok J_i diagonální, tj. je prvního z uvedených tvarů, řekneme, že vlastní číslo λ je *jednoduchého typu*.

Pro libovolné přirozené číslo k platí

$$
\mathsf{J}^k = \begin{pmatrix} {\mathsf{J}_1}^k & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & {\mathsf{J}_2}^k & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & {\mathsf{J}_\mathsf{m}}^k \end{pmatrix}.
$$

Odtud vidíme, že také matice (3.29) je blokově diagonální, bloku J_i odpovídá blok

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \mathsf{J}_\mathsf{i}{}^k$$

Je-li blok J_i diagonální, pak

$$\mathsf{J}_\mathsf{i}{}^k = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{pmatrix} = \lambda^k \mathsf{I},$$

kde I je jednotková matice stejného řádu jako matice J_i. Příslušné bloky v součtu (3.29) jsou

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \lambda^k \mathsf{I} = \mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} \mathsf{I}.$$

V případě, že vlastní číslo λ matice A není jednoduchého typu, tak vyjádříme odpovídající Jordanův blok ve tvaru

$$\mathsf{J}_\mathsf{i} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \lambda \mathsf{I} + \mathsf{M}_j,$$

kde M_j je čtvercová matice stejného řádu jako blok J_i, která má nad hlavní diagonálou jedničky a ostatní prvky jsou nulové. Příslušný blok v součtu (3.29) je tedy tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} (\lambda \mathsf{I} + \mathsf{M}_j)^k .$$

Přímým výpočtem ověříme, že

$$\mathsf{M}_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{M}_j^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots, \quad \mathsf{M}_j^{j-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{M}_j^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a každá vyšší mocnina matice M_j je již nulová. Proto

$$(\lambda \mathsf{I} + \mathsf{M}_j)^k = \sum_{p=0}^{\min\{j-1,k\}} \binom{k}{p} \lambda^{k-p} \mathsf{M}_j^p = \sum_{p=0}^{\min\{j-1,k\}} \frac{k!}{p!(k-p)!} \lambda^{k-p} \mathsf{M}_j^p.$$

Dále platí[2]

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} (\lambda \mathsf{I} + \mathsf{M}_j)^k = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{p!(k-p)!} \lambda^{k-p} \mathsf{M}_j^p =$$
$$= \sum_{p=0}^{j-1} \frac{1}{p!} \mathsf{M}_j^p \sum_{k=p}^{j-1} \frac{(t-t_0)^k}{(k-p)!} \lambda^{k-p} = \sum_{p=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \mathsf{M}_j^p \sum_{k=p}^{j-1} \frac{(t-t_0)^{k-p} \lambda^{k-p}}{(k-p)!}$$

a

$$\sum_{k=j}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} (\lambda \mathsf{I} + \mathsf{M}_j)^k = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \sum_{p=0}^{j-1} \frac{k!}{p!(k-p)!} \lambda^{k-p} \mathsf{M}_j^p =$$
$$= \sum_{p=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \mathsf{M}_j^p \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{k-p} \lambda^{k-p}}{(k-p)!},$$

celkem

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} (\lambda \mathsf{I} + \mathsf{M}_j)^k =$$
$$= \sum_{p=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \mathsf{M}_j^p \sum_{k=p}^{j-1} \frac{(t-t_0)^{k-p} \lambda^{k-p}}{(k-p)!} + \sum_{p=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \mathsf{M}_j^p \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{k-p} \lambda^{k-p}}{(k-p)!} =$$
$$= \sum_{p=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \mathsf{M}_j^p \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{k-p} \lambda^{k-p}}{(k-p)!} = \mathrm{e}^{(t-t_0)\lambda} \sum_{p=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \mathsf{M}_j^p.$$

Výraz

$$\sum_{p=0}^{j-1} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \mathsf{M}_j^p$$

je maticovou funkcí; jedná se o čtvercovou matici stejného řádu jako uvažovaný Jordanův blok J_i, která má nad hlavní diagonálou polynomy a jinde má nuly.

Z provedených výpočtů plyne, že maticová funkce (3.29) je blokově diagonální, jednotlivé diagonální bloky jsou buď exponenciální funkce (odpovídající vlastním číslům jednoduchého typu), nebo exponenciální funkce násobené polynomem (ty odpovídají vlastním číslům, která nejsou jednoduchého typu). Z tohoto pozorování plyne závěr:

---

[2] Ve druhé rovnosti je využit vzorec $\sum_{k=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{k} \alpha_{kp} = \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{k=p}^{j-1} \alpha_{kp}$.

Tvrzení 9. Mají-li všechny vlastní hodnoty matice A záporné reálné části, pak pro každé řešení $\boldsymbol{x}$ systému (3.23) platí $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{o}$.

Mají-li všechny vlastní hodnoty matice A nekladné reálné části a nulové vlastní hodnoty jsou jednoduchého typu, pak každé řešení systému systému (3.23) je ohraničené.

Pokud existuje vlastní hodnota matice A, která má kladnou reálnou část, pak existuje takové řešení $\boldsymbol{x}$ systému (3.23), že $\lim\limits_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \infty$.

Kapitola 4

Autonomní rovnice a systémy

Autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic je taková (vektorová) rovnice, která nezávisí explicitně na nezávisle proměnné, tedy rovnice tvaru

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \boldsymbol{o}.$$

Omezíme se na rovnice rozřešené vzhledem k derivaci, tedy na systém rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{4.1}$$

kde $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina s neprázdným vnitřkem a bez izolovaných bodů. Systém (4.1) se nazývá *autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic*, definiční obor pravých stran Ω se nazývá *stavový* (nebo *fázový*) *prostor*. V celé kapitole budeme předpokládat, že $\boldsymbol{f}$ je spojitá funkce taková, že počáteční problém (4.1) s podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) \quad = \quad \boldsymbol{x_0} \tag{4.2}$$

má jediné řešení pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}^0 \in \Omega$.

Soustava rovnic (4.1) popisuje (modeluje) vývoj takového systému, jehož stav je popsán stavovým vektorem (prvkem ze stavového prostoru Ω) a změna stavu závisí pouze na aktuálním stavu. Změna stavu nezávisí na žádných v čase se měnících vnějších (externích) podmínkách; z jiného pohledu: modelujeme nějaký izolovaný systém. Základní vlastností takových systému je invariance vzhledem k posunutí v čase, tj. nezávisí na tom, v jaké době systém pozorujeme. Přesněji je tato vlastnost zformulována v následujícím:

Tvrzení 10. Je-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplným řešením úlohy (4.1), (4.2) definovaným na intervalu (S, T), pak pro každé $\tau \in \mathbb{R}$ je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t + \tau)$ řešením rovnice (4.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(t_0 - \tau) = \boldsymbol{x_0}$ definovaným na intervalu $(S - \tau, T - \tau)$.

Důkaz:
$$\boldsymbol{y}'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t + \tau) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t + \tau)\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)).$$
□

Toto tvrzení ukazuje, že bez újmy na obecnosti se u autonomních systémů můžeme omezit na počátečními problémy s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} \in \Omega. \tag{4.3}$$

Tvrzení 11. Nechť $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je řešení úlohy (4.1), (4.3) definované na intervalu (S, T) a nechť zobrazení $\tau : (S, T) \to \mathbb{R}$ je dáno rovností

$$\tau(t) = \int_0^t \left(1 + \left\|\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(s)\right)\right\|\right) \mathrm{d}s. \tag{4.4}$$

Pak trajektorie systému (4.1) a systému

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{x} = \frac{1}{1 + \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{4.5}$$

procházející bodem $\boldsymbol{x}_0$ splývají. Navíc, každé úplné řešení systému (4.5) je definováno na celém intervalu $(-\infty, \infty)$.

Důkaz: Derivací rovnosti (4.4) podle proměnné t dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = 1 + \left\|\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(s)\right)\right\|.$$

Na pravé straně je kladný výraz a to znamená, že funkce τ je ryze rostoucí. Dále platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{1 + \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

To znamená, že τ je jen jiná parametrizace trajektorie.

Řešení rovnice (4.5) s počáteční podmínkou (4.3) splňuje podle Lemma 1 rovnost

$$\boldsymbol{x}(\tau) = x_0 + \int_0^\tau \frac{1}{1 + \left\|\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(s)\right)\right\|}\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(s)\right)\mathrm{d}s.$$

Zapišme interval, na němž je toto řešení definováno, jako (α, ω). Připusťme, že $\omega < \infty$. Pak

$$\|\boldsymbol{x}(\tau)\| \leq \|\boldsymbol{x}_0\| + \int_0^\tau \frac{\left\|\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(s)\right)\right\|}{1 + \left\|\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(s)\right)\right\|}\mathrm{d}s \leq \|\boldsymbol{x}_0\| + \int_0^\tau 1\mathrm{d}s = \|\boldsymbol{x}_0\| + \tau \leq \|\boldsymbol{x}_0\| + \omega.$$

To ovšem znamená $\lim\limits_{\tau \to \omega -} \|\boldsymbol{x}(\tau)\| \leq \|\boldsymbol{x}_0\| + \omega < \infty$ a to je ve sporu s Větou 5, neboť definiční obor funkce $\boldsymbol{f}$ má prázdnou hranici.

Stejně ukážeme, že $\alpha = -\infty$. □

Podle tohoto tvrzení můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že každé úplné řešení autonomního systému, jehož stavový prostor je celá množina $\mathbb{R}^n$, je definováno na intervalu $(-\infty, \infty)$. Nebo jinak: takový systém má jakýsi „vlastní čas“, který plyne od $-\infty$ do ∞, „od věčnosti do věčnosti“.

Příklad:

Úplné řešení počáteční úlohy

$$x' = x^2, \quad x(0) = x_0$$

je dáno rovností $x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ a je definováno na intervalu

$$J = \begin{cases} (-\infty, 1/x_0), & x_0 > 0, \\ (-\infty, \infty), & x_0 = 0, \\ (1/x_0, \infty), & x_0 < 0. \end{cases}$$

Úplné řešení počáteční úlohy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} x = \frac{x^2}{1 + x^2}, \qquad x(0) = x_0$$

je dáno rovností

$$2x(\tau) = \tau + \frac{x_0^2 - 1}{x_0} + \frac{x_0}{|x_0|} \sqrt{\tau^2 + 2\tau \frac{x_0^2 - 1}{x_0} + \left(\frac{x_0^2 + 1}{x_0} \right)^2}$$

pro $x_0 \neq 0$ a $x(\tau) = 0$ pro $x_0 = 0$ (odvoďte nebo alespoň ověřte tento výsledek). Tyto funkce jsou definovány na intervalu $(-\infty, \infty)$.

„Vnitřní čas“ je v tomto případě dán rovností

$$\tau(t) = x_0 + \int_0^t \left(1 + \left(\frac{x_0}{1 - x_0 s} \right)^2 \right) \mathrm{d}s = x_0 + t + x_0^2 \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{(1 - x_0 s)^2} =$$
$$= x_0 + t - \frac{x_0^2}{x_0} \int_1^{1 - x_0 t} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2} = t + \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Vidíme, že pro $x_0 = 0$ je $\tau = t$. ■

Ještě poznamenejme, že předpoklad $\Omega = \mathbb{R}^n$ v Tvrzení 11 nelze obecně vynechat.

Příklad:

Úplné řešení počáteční úlohy

$$x' = \frac{1}{2x}, \qquad x(0) = x_0 \neq 0$$

je funkce $x(t) = \operatorname{sgn} x_0 \sqrt{t + x_0^2}$, která je definována na intervalu $(-x_0^2, \infty)$. Stavovým prostorem je buď interval $(0, \infty)$ nebo interval $(-\infty, 0)$.

Korespondující úloha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} x = \frac{1}{2x + 1}, \qquad x(0) = x_0$$

má řešení $x(t) = -\frac{1}{2} + \operatorname{sgn} x_0 \sqrt{t + \left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2}$, a to je definováno na intervalu $\left(-\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2, \infty\right)$.

■

Fázový prostor, trajektorie, stacionární body

Nechť $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je úplné řešení problému (4.1), (4.3) definované na intervalu (S, T); přitom platí $-\infty \leq S < T \leq \infty$. Toto řešení lze interpretovat buďto jako graf zobrazení $\boldsymbol{x} : (S, T) \to \Omega$, nebo jako orientovanou křivku $C = \{\boldsymbol{x}(t) : S < t < T\}$ ve fázovém prostoru Ω zadanou parametricky. Tuto křivku nazýveme *trajektorií řešení* $\boldsymbol{x}$.

Křivku $C^+ = \{\boldsymbol{x}(t) : t \geq 0\}$, resp. $C^- = \{\boldsymbol{x}(t) : t \leq 0\}$, nazveme *pozitivní*, resp. *negativní, polotrajektorií* systému 4.1.

Příklad:

Počáteční úloha pro lineární systém

$$x' = -y, \quad y' = x, \qquad x(0) = x_0, \; y(0) = y_0$$

má řešení $x(t) = r\cos(t + \psi)$, $y(t) = r\sin(t + \psi)$, kde

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \qquad \cos\psi = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \quad \sin\psi = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Poněvadž $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$, jsou trajektorie řešení kružnice se středem v počátku. ■

Tvrzení 12. Jsou-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ řešení systému (4.1), pak jejich trajektorie buďto splývají, nebo nemají žádný společný bod.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{y}(t_2)$ pro nějaká $t_1, t_2 \geq 0$. Podle Tvrzení 10 je $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t + (t_1 - t_2))$ řešením rovnice (4.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{z}(t_2) = \boldsymbol{x}(t_1)$. Trajektorie řešení $\boldsymbol{z}$ a $\boldsymbol{x}$ zřejmě splývají. Současně ale $\boldsymbol{z}$ je řešením rovnice (4.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{z}(t_2) = \boldsymbol{y}(t_2)$ a z předpokládané jednoznačné řešitelnosti problému (4.1) s libovolnou počáteční podmínkou plyne $\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{y}$. □

Definice 12. Bod $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ se nazývá *stacionární bod* (*rovnovážný bod, ekvilibrium, kritický bod, singulární bod, degenerovaná trajektorie*) *rovnice* (4.1), jestliže $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = 0$.
Trajektorie rovnice (4.1) se nazývá *cyklus*, je-li uzavřenou křivkou.
Trajektorie $\{\boldsymbol{x}(t) : t \in (S, T)\}$ rovnice (4.1) se nazývá *homoklinická*, jestliže existuje stacionární bod $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ takový, že $\lim\limits_{t \to T-} \boldsymbol{x}(t) = \lim\limits_{t \to S+} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$.
Trajektorie $\{\boldsymbol{x}(t) : t \in (S, T)\}$ rovnice (4.1) se nazývá *heteroklinická*, jestliže existují stacionární body $\boldsymbol{x}_1^* \in \Omega$, $\boldsymbol{x}_2^* \in \Omega$ takové, že $\boldsymbol{x}_1^* \neq \boldsymbol{x}_2^*$, $\lim\limits_{t \to T-} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_1^*$ a $\lim\limits_{t \to S+} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_2^*$.

Věta 10 (Klasifikace trajektorií)**.** *Libovolná trajektorie řešení autonomního systému* (4.1) *je právě jednoho z typů:*

- *stacionární bod (odpovídá konstantnímu řešením);*
- *cyklus (odpovídá nekonstantnímu periodickému řešení);*
- *trajektorie, která sama sebe neprotíná.*

Důkaz plyne z Tvrzení 10 a 12. □

Poznamenejme, v případě stacionárního bodu a cyklu je řešení definované pro každé $t \in \mathbb{R}$, tj. $S = -\infty$, $T = \infty$.

Linearizace autonomního systému v okolí stacionárního bodu

Nechť $x^* \in \Omega$ je stacionární bod autonomního systému (4.1). Odchylka od tohoto stacionárního bodu je definována rovností

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*.$$

Pak platí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{o} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Pokud je zobrazení $\boldsymbol{f}$ dvakrát spojitě diferencovatelné (tj. každá jeho složka má spojité parciální derivace podle všech proměnných), pak podle Taylorovy věty platí

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^*)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + O\left(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|_2^2\right) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{y} + O\left(\|\boldsymbol{y}\|_2^2\right).$$

Přitom $O\left(\|\boldsymbol{y}\|_2^2\right)$ je zbytek Taylorova polynomu prvního stupně a derivace $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^*)$, někdy označovaná $\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ nebo $\mathsf{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^*) = \mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ a nazývaná *Jacobiova matice zobrazení* $\boldsymbol{f}$, je matice

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix}.$$

Z předchozího výpočtu plyne že v „malém“ okolí rovnovážného bodu $\boldsymbol{x}^*$ se „malá“ odchylky od tohoto stacionárního řešení vyvíjí jako řešení lineaárního systému s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}. \tag{4.6}$$

Systém (4.6) se nazývá *linearizace systému* (4.1) *ve stacionárním bodě* $\boldsymbol{x}^*$ nebo *variační rovnice systému* (4.1), matice $\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ se někdy nazývá *variační matice systému* (4.1).

Lineární systém (3.23) s konstantní maticí A je autonomním systémem. Pokud je $\det \mathsf{A} \neq 0$, pak je bod $\boldsymbol{o}$ jeho jediným stacionárním bodem. Podle Tvrzení 9 platí: pokud všechna vlastní čísla matice A mají zápornou reálnou část, pak každá nenulová trajektorie systému (3.23) směřuje do stacionárního bodu, mají-li kladnou reálnou část, pak každá nenulová trajektorie systému (3.23) směřuje ze stacionárního bodu. Toto pozorování motivuje následující definici.

Definice 13. Nechť $\boldsymbol{x}^*$ je izolovaný stacionární bod autonomního systému (4.1). Řekneme, že stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ je *hyperbolický,* pokud každé vlastní číslo variační matice $\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*) = \mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ má nenulovou reálnou část. Mají-li všechna vlastní čísla matice $\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ kladnou reálnou část, řekneme, že hyperbolický stacionární $\boldsymbol{x}^*$ bod je *zdroj* (*source*); mají-li všechna vlastní čísla matice $\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ zápornou reálnou část, řekneme, že hyperbolický stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ je *stok* (*sink*).

4.1 Autonomní rovnice (autonomní systémy na přímce)

Rovnice (4.1) pro $n = 1$, tj. rovnice

$$x' = f(x) \tag{4.7}$$

je speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými. Postupem uvedeným na str. 1.1 lze tedy najít její řešení přinejmenším v implicitním tvaru. Často ovšem rozbor stavového prostoru dá názornější představu o průběhu jejího řešení.

Stavovým prostorem Ω autonomní rovnice (4.7) je interval nebo sjednocení intervalů. Trajektorie může být

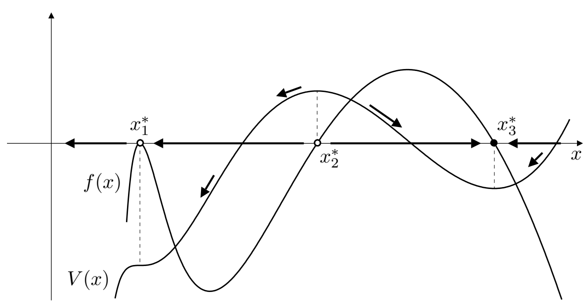
- Přímka, pokud je stavovým prostorem celá množina $\mathbb{R}$ a funkce f je stále kladná nebo stále záporná.
- Polopřímka bez krajního bodu, pokud existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že $f(a) = 0$ nebo $a \notin \Omega$ nastává některá z (nevylučujících se) možností
$$(-\infty, a) \subseteq \Omega,\ f(x) \neq 0 \text{ pro } x < a, \quad \text{nebo} \quad (a, \infty) \subseteq \Omega,\ f(x) \neq 0 \text{ pro } x > a.$$
- Vnitřek úsečky, pokud existují čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $(a, b) \subseteq \Omega$, $f(x) \neq 0$ pro $x \in (a, b)$ a
$$f(a) = 0 \text{ nebo } a \notin \Omega \quad \text{a současně} \quad f(b) = 0 \text{ nebo } b \notin \Omega.$$
V případě $a \in \Omega$, $b \in \Omega$ se jedná o heteroklinickou trajektorii.
- Stacionární bod $x^* \in \Omega$, pokud $f(x^*) = 0$.

Orientaci trajektorie je bezprostředně vidět z grafu funkce f, viz Obr. 4.1. Je-li trajektorií přímka nebo vnitřek polopřímky nebo úsečky, pak je trajektorie orientovaná souhlasně s orientací osy x, pokud $f(x) > 0$ ve všech bodech této přímky nebo vnitřku polopřímky nebo úsečky. Takovým trajektoriím odpovídají rostoucí řešení rovnice (4.7). Pokud je zde $f(x) < 0$, pak je trajektorie orientována proti orientaci osy x.

Nechť x^* je stacionárním bodem rovnice (4.7) takovým, že existuje jeho pravé ryzí okolí $(x^*, x^* + \varepsilon) \subseteq \Omega$ tak, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in (x^*, x^* + \varepsilon)$. Trajektorie odpovídající řešení rovnice (4.7) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0 \in (x^*, x^* + \varepsilon)$ směřují ke stacionárnímu, resp. od stacionárního, bodu x^*, pokud $f(x) < 0$, resp. $f(x) > 0$, na intervalu $(x^*, x^* + \varepsilon)$. Analogicky můžeme vyšetřit směr trajektorií nalevo od stacionárního bodu.

Nechť nyní x^* je vnitřní stacionární bod rovnice (4.7), tj. $x^* \in \Omega^\circ$ a $f(x^*) = 0$. Pokud je funkce f diferencovatelná a $f'(x^*) \neq 0$, pak je tento stacionární bod izolovaný, tj. existuje jeho ryzí okolí, v němž $f(x) \neq 0$. Je-li přitom $f'(x^*) > 0$, resp. $f'(x^*) < 0$, pak všechny trajektorie začínající v okolí bodu x^* směřují od stacionárního, resp. ke stacionárnímu, bodu x^*.

Směřování trajektorií od stacionárního bodu nebo k němu inspiruje klasifikaci stacionárních bodů:



Obrázek 4.1: Příklad pravé strany $f(x)$ autonomní rovnice (4.7) a příslušného potenciálu $V(x)$. Stacionární bod x_1^* je sedlo, x_2^* je nestabilní uzel a x_3^* je stabilní uzel.

Definice 14. Nechť x^* je izolovaný stacionární bod rovnice (4.7), tj. $f(x^*) = 0$ a existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(x^*) = (x^* - \varepsilon, x^*) \cup (x^*, x^* + \varepsilon)$ takové, že $f(x) \neq 0$ pro x z $\mathcal{O}(x^*)$. Equilibrium x^* se nazývá

stabilní uzel nebo *stok (sink),* pokud všechny trajektorie začínající v okolí $\mathcal{O}(x^*)$ směřují k bodu x^*,

nestabilní uzel nebo *zdroj (source)* pokud všechny trajektorie začínající v $\mathcal{O}(x^*)$ směřují od bodu x^*,

sedlo, pokud existují dvě trajektorie začínající v $\mathcal{O}(x^*)$, z nichž jedna směřuje k bodu x^* a druhá od něho (všechny trajektorie začínající v $\mathcal{O}(x^*)$ jsou orientovány stejně).

Evidentně platí (viz Obr. 4.1):

Tvrzení 13. Nechť x^* je izolovaný stacionární bod rovnice (4.7) a $\mathcal{O}(x^*)$ je jeho ryzí okolí zavedené v předchozí definici. Pokud funkce f nemění na $\mathcal{O}(x^*)$ znaménko, pak je x^* sedlo. Pokud je funkce f na $\overline{\mathcal{O}(x^*)}$ ryze rostoucí, pak je x^* nestabilní uzel, pokud je funkce f na $\overline{\mathcal{O}(x^*)}$ ryze klesající, pak je x^* stabilní uzel.

Je-li funkce f na okolí bodu x^* diferencovatelná a $f'(x^*) > 0$, resp $f'(x^*) < 0$, pak je x^* nestabilní, resp stabilní uzel.

Je-li funkce f na okolí bodu x^* dvakrát diferencovatelná a $f'(x^*) = 0 \neq f''(x^*)$, pak je x^* sedlo.

Jinou „názornou pomůckou“ pro vyšetřování orientace trajektorií je potenciál rovnice:

Definice 15. Diferencovatelná funkce $V : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá *potenciál rovnice* (4.7), pokud $-V'(x) = f(x)$ pro každý bod $x \in \Omega$.

Poněvadž o funkci f na pravé straně rovnice (4.7) předpokládáme, že je spojitá, potenciál existuje a je primitivní funkcí k funkci $-f$.

Nechť x^* je stacionární bod rovnice. Z předchozích úvah nebo z geometrického názoru (viz Obr. 4.1) plyne: pokud je bod x^* bodem ostrého lokálního minima potenciálu V, pak všechny trajektorie začínající v ryzím okolí bodu x^* směřují k bodu x^*; je-li bod x^* bodem ostrého lokálního maxima potenciálu V, pak všechny trajektorie začínající v ryzím okolí bodu x^* směřují od bodu x^*.

4.2 Autonomní systémy v rovině

V tomto oddílu se budeme zabývat systémem (4.1) pro $n = 2$, tedy systémem

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Definice 16. Křivka zadaná implicitně rovnicí $f(x,y) = 0$ (resp. $g(x,y) = 0$) se nazývá *x-nulklina* (resp. *y-nulklina*) *rovnice* (4.8).

Průsečík nulklin je stacionární bod, tečna k trajektorii v jejím průsečíku s x-nulklinou (resp. y-nulklinou) je rovnoběžná s osou y (resp. x).

Definice 17 (typy stacionárních bodů v rovině)**.** Stacionární bod (x^*, y^*) systému (4.8) se nazývá

sedlo, jestliže existuje jen konečný počet trajektorií $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$ takových, že

$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*);$$

uzel, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $\big(x(0), y(0)\big) \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)$$

a pro orientovaný úhel $\psi(t)$, který svírá vektor $\big(x(t), y(t)\big) - (x^*, y^*)$ s nějakým pevným vektorem existuje vlastní $\lim_{t\to\infty} \psi(t)$ nebo $\lim_{t\to-\infty} \psi(t)$;

ohnisko, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $\big(x(0), y(0)\big) \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)$$

a pro orientovaný úhel $\psi(t)$, který svírá vektor $\big(x(t), y(t)\big) - (x^*, y^*)$ s nějakým pevným vektorem platí

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty \text{ nebo } \lim_{t\to\infty} \psi(t) = -\infty \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = \infty \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = -\infty$$

(trajektorie se přibližuje ke stacionárnímu bodu (nebo se od něho vzdaluje) po spirále);

bod rotace, jestliže v jeho libovolném okolí leží cyklus, obsahující (x^*, y^*) ve svém vnitřku;

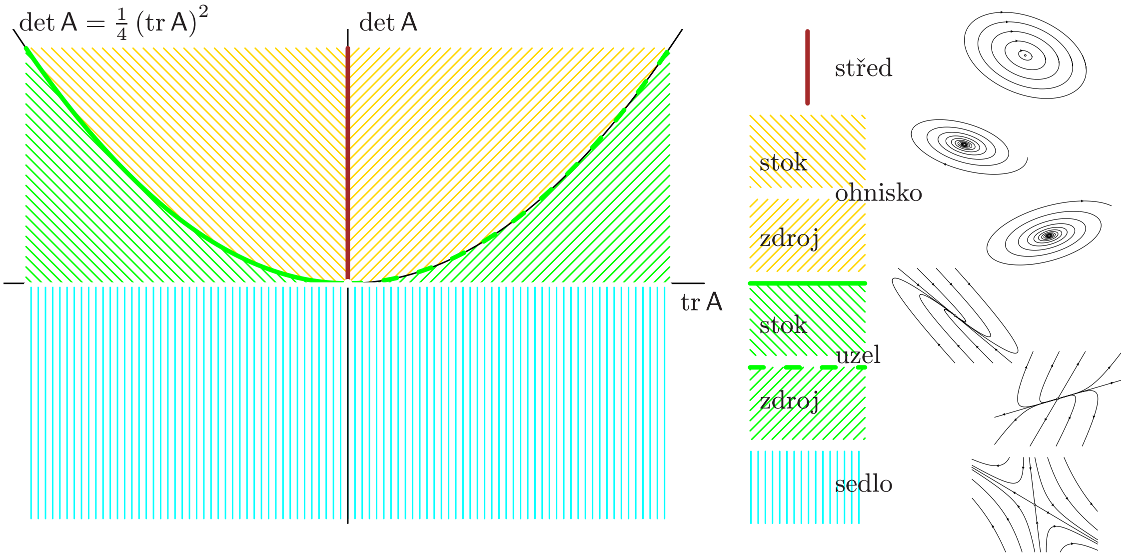
střed, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že každá trajektorie s $\big(x(0), y(0)\big) \in U$ je cyklem obsahujícím (x^*, y^*) ve svém vnitřku (střed je speciálním případem bodu rotace).

Poznamenejme, že střed je speciálním případem bodu rotace.
Ohnisko nebo uzel se nazývá *stabilní,* resp. *nestabilní,* pokud pro každé řešení systému (4.8) s počáteční hodnotou v ryzím okolí U bodu (x^*, y^*) platí $\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)$, resp. $\lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)$.

Příklad: typy stacionárního bodu autonomního lineárního systému

Systém (3.24) má v případě $\det \mathsf{A} \neq 0$ jako jediný izolovaný stacionární bod počátek $(0, 0)$. Tento systém je explicitně vyřešen na závěr části 3.3.1. Z výsledků vidíme:

- $\det \mathsf{A} < 0$**:** Trajektorie tohoto systému jsou jednak dvě polopřímky $\big\{\pm e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w}_1 : t \in \mathbb{R}\big\}$, které odpovídají kladné vlastní hodnotě λ_1 a příslušnému vlastnímu vektoru $\boldsymbol{w}_1$, a proto jsou orientované směrem od počátku, jednak dvě polopřímky $\big\{\pm e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{w}_2 : t \in \mathbb{R}\big\}$, které odpovídají záporné vlastní hodnotě λ_2 a příslušnému vlastnímu vektoru $\boldsymbol{w}_2$ a jsou orientovány směrem k počátku. Pro ostatní trajektorie $\big\{c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{w}_2 : t \in \mathbb{R}\big\}$ platí $\lim_{t\to\infty} \big\|c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{w}_2\big\| = \lim_{t\to-\infty} \big\|c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{w}_2\big\| = \infty$.
  Stacionární bod $(0, 0)$ je tedy sedlo.



Obrázek 4.2: Typy izolovaných stacionárních bodů dvourozměrného autonomního lineárního homogenního systému (3.24) v závislosti na hodnotách stopy a determinantu jeho matice.

- $\det \mathsf{A} > 0$**:**
  - ◦ $\left(\operatorname{tr}\mathsf{A}\right)^2 \geq 4\det \mathsf{A}$**:** Nechť vlastní hodnoty jsou označeny taky že $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ a $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ jsou příslušné vlastní vektory. Není-li vlastní hodnota λ_1 dvojnásobná jednoduchého typu, pak trajektorie systému jsou dvě polopřímky $p_{1,2} = \left\{\pm \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{w}_1 : t \in \mathbb{R}\right\}$, které jsou orientovány směrem od počátku (pokud $\lambda_1 > 0$) nebo směrem k počátku (pokud $\lambda_1 < 0$); ostatní trajektorie jsou orientovány shodně směrem od nebo k počátku a polopřímky $p_{1,2}$ jsou jejich polotečny. V opačném případě jsou trajektoriemi všechny polopřímky vycházející z počátku a orientované k němu (pokud $\lambda_1 < 0$) nebo od něho (pokud $\lambda_1 > 0$). V každém případě je stacionární bod $(0,0)$ uzlem, který je stabilní pro $\lambda_1 < 0$ a nestabilní pro $\lambda_1 > 0$. Znaménko vlastní hodnoty je určeno stopou matice A.
    - ∘ $\operatorname{tr}\mathsf{A} < 0$**:** Stacionární bod $(0,0)$ je stabilní uzel.
    - ∘ $\operatorname{tr}\mathsf{A} > 0$**:** Stacionární bod $(0,0)$ je nestabilní uzel.
  - ◦ $\left(\operatorname{tr}\mathsf{A}\right)^2 < 4\det \mathsf{A}$**:** Vlastní hodnoty jsou komplexně sdružené $\lambda_{1,2} - \alpha \pm \beta\mathrm{i}$ a trajektorie jsou
  $$\left\{\mathrm{e}^{\alpha t}\left((c_1\cos\beta t + c_2\sin\beta t)\boldsymbol{u} + (c_1\cos\beta t - c_2\sin\beta t)\boldsymbol{v}\right) : t \in \mathbb{R}\right\},$$
  kde $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ jsou lineárně nezávislé vektory. Trajektorie jsou tedy logaritmické spirály (pokud $\alpha \neq 0$) nebo elipsy (pokud $\alpha = 0$). Spirály jsou orientovány směrem k počátku pro ($\alpha < 0$) nebo od něho (pro $\alpha > 0$); spirály i elipsy jsou orientovány v kladném symyslu, pokud koeficient c systému (3.24) je kladný, v záporném smyslu, pokud $c < 0$.
    - ∘ $\operatorname{tr}\mathsf{A} < 0$**:** Stacionární bod $(0,0)$ je stabilní ohnisko.
    - ∘ $\operatorname{tr}\mathsf{A} = 0$**:** Stacionární bod $(0,0)$ je střed.
    - ∘ $\operatorname{tr}\mathsf{A} > 0$**:** Stacionární bod $(0,0)$ je nestabilní ohnisko.

Výsledky provedené analýzy lineárního dvourozměrného systému (3.24) s konstantní maticí jsou shrnuty graficky na obrázku 4.2. ■

<table>
<tr><td>$\det \mathsf{J}^* < 0$</td><td colspan="3">sedlo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\det \mathsf{J}^* > 0$</td><td></td><td>$(\operatorname{tr} \mathsf{J}^*)^2 \geq 4 \det \mathsf{J}^*$</td><td>$(\operatorname{tr} \mathsf{J}^*)^2 < 4 \det \mathsf{J}^*$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tr} \mathsf{J}^* < 0$</td><td>stabilní uzel</td><td>stabilní ohnisko</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tr} \mathsf{J}^* > 0$</td><td>nestabilní uzel</td><td>nestabilní ohnisko</td></tr>
</table>

Tabulka 4.1: Kvalitativní vlastnosti řešení systému (4.8) v okolí stacionárního bodu (x^*, y^*); $\mathsf{J}^* = \mathsf{J}(x^*, y^*)$ je variační matice tohoto systému ve stacionárním bodě.

Na základě úvah provedených na str. 83 usuzujeme, že v okolí izolovaného stacionárního bodu (x^*, y^*) ležícího uvnitř stavového prostoru se trajektorie systému (4.8) „chovají podobně“ jako trajektorie jeho linearizace. Přesněji:

Věta 11. *Nechť funkce f a g jsou dvakrát spojitě diferencovatelné a*

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

je linearizace systému (4.8) v okolí izolovaného stacionárního bodu $(x^*, y^*) \in \Omega^\circ$. Pak platí:

- *Je-li počátek uzel, ohnisko nebo sedlo systému (4.9), pak stacionární bod (x^*, y^*) systému (4.8) je stejného typu;*
- *Je-li počátek střed systému (4.9), pak stacionární bod (x^*, y^*) systému (4.8) je bod rotace nebo ohnisko systému (4.8).*

Důkaz za poněkud obecnějších předpokladů je proveden v monografii P. Hartman: *Ordinary Differential Equations.* John Willey&Sons, New York-London-Sydney 1964, kap. VIII. □

S použitím terminologie zavedené v definici 13 můžeme část tohoto tvrzení přeformulovat: Je-li (x^*, y^*) hyperbolický stacionární bod systému (4.8), pak je stejného typu jako stacionární bod (0,0) linearizace tohoto systému ve stacionárním bodě (x^*, y^*). S využitím výsledků předchozího příkladu můžeme toto tvrzení vyjádřit formou Tabulky 4.1.

Věta 12 (Dulacovo kritérium)**.** *Nechť funkce f, g jsou spojitě diferencovatelné na Ω a existují jednoduše souvislá otevřená množina $B \subseteq \Omega$ a spojitě diferencovatelná funkce $q : B \to \mathbb{R}$ tak, že výraz*

$$F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} q(x, y) f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} q(x, y) g(x, y)$$

je pro všechna $(x, y) \in B$ nezáporný nebo je pro všechna $(x, y) \in B$ nekladný, přičemž množina $\{(x, y) \in B : F(x, y) = 0\}$ má míru 0. Pak v množině B neexistuje cyklus systému (4.8).

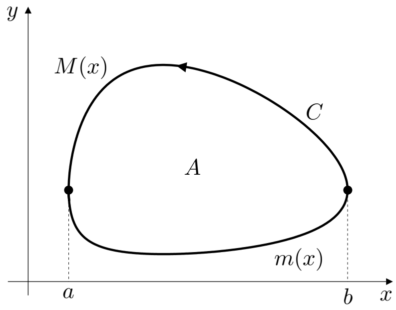
Důkaz: Připusťme, že existuje cyklus $C \subseteq B$ rovnice (4.8) a nechť jeho parametrické vyjádření je

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

přitom funkce φ, ψ vyjadřují ω-periodické řešení systému (4.8), tedy

$$\varphi'(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big), \qquad \psi'(t) = g\big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$

Předpokládejme, že křivka C je orientována kladně a má tvar oválu, tj. existují na ní právě dva body, v nichž je tečna rovnoběžná s osou y a právě dva body, v nichž je tečna rovnoběžná s osou x. Označme A množinu ohraničenou křivkou C, $[a,b]$ průmět množiny A na osu x, t_0 hodnotu parametru pro niž $\varphi(t_0) = \varphi(t_0+\omega) = b$, α nejmenší kladné číslo pro něž $\varphi(t_0+\alpha) = a$.



Dále zavedeme funkce $m = m(x)$, resp. $M = M(x)$, takové, že jejich graf na intervalu $[a,b]$ splývá s dolním, resp. horním, obloukem křivky C. Pak

$$m(x) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = \psi(t) \text{ pro } t \in [t_0+\alpha, t_0+\omega],$$
$$M(x) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = \psi(t) \text{ pro } t \in [t_0, t_0+\alpha].$$

Z předpokladů věty a obecných vlastností integrálu plyne, že

$$\iint\limits_A F(x,y) \neq 0. \tag{4.10}$$

Podle Fubiniovy věty nyní platí

$$I = \iint\limits_A \frac{\partial}{\partial y} q(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$= \int_a^b \left(\int_{m(x)}^{M(x)} \frac{\partial}{\partial y} q(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \big[q(x,y)g(x,y)\big]_{y=m(x)}^{M(x)} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b q\big(x, M(x)\big)g\big(x, M(x)\big)\mathrm{d}x - \int_a^b q\big(x, m(x)\big)g\big(x, m(x)\big)\mathrm{d}x.$$

V integrálech zavedeme substituci $x = \varphi(t)$, tedy $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\mathrm{d}t$,

$$I = \int_{t_0+\alpha}^{t_0} q\big(\varphi(t), \psi(t)\big) g\big(\varphi(t), \psi(t)\big) f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\mathrm{d}t -$$
$$- \int_{t_0+\alpha}^{t_0+\omega} q\big(\varphi(t), \psi(t)\big) g\big(\varphi(t), \psi(t)\big) f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\mathrm{d}t =$$
$$= - \int_{t_0}^{t_0+\omega} q\big(\varphi(t), \psi(t)\big) g\big(\varphi(t), \psi(t)\big) f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\mathrm{d}t =$$
$$= - \oint\limits_C q\big(\varphi(t), \psi(t)\big) g\big(\varphi(t), \psi(t)\big) f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\mathrm{d}s,$$

kde $\oint\limits_C \Phi(x,y)\mathrm{d}s$ označuje křivkový integrál z funkce Φ přes uzavřenou křivku C. Analogicky ukážeme, že

$$J = \iint\limits_A \frac{\partial}{\partial x} q(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_C q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)g\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\mathrm{d}s.$$

Odtud plyne, že

$$\iint\limits_A F(x,y) = \iint\limits_A \left(\frac{\partial\big(q(x,y)f(x,y)\big)}{\partial x} + \frac{\partial\big(q(x,y)g(x,y)\big)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = J + I = 0,$$

což je ve sporu s (4.10).

V případě, že by křivka byla orientovaná záporně, provedeme důkaz stejně s příslušnou změnou znamének.

Pokud by na křivce C existovalo $k > 2$ bodů, v nichž je tečna rovnoběžný s osou y, rozdělili bychom interval $[t_0, t_0+\omega]$ na k subintervalů $[t_0, t_0+\alpha_1]$, $[t_0+\alpha_1, t_0+\alpha_1+\alpha_2]$, ..., $[t_0+\omega-\alpha_k, t_0+\omega]$ takových, že na každém z nich oblouk křivky C splyne s grafem nějaké funkce proměnné x. □

Důsledek 6 (Bendixsonovo kritérium). *Nechť funkce f, g jsou spojitě diferencovatelné na Ω a existuje jednoduše souvislá otevřená množina $B \subseteq \Omega$ tak, že výraz*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

je pro všechna $(x,y) \in B$ nezáporný nebo je pro všechna $(x,y) \in B$ nekladný, přičemž množina, na níž je tento výraz nulový má míru 0. Pak v množině B neexistuje cyklus systému (4.8).

Příklad: Jednoduchý model producent-konzument

V tomto modelu si pod pojmem „producent“ můžeme představit populaci, která využívá nějaký neomezený zdroj[1], např. zelené rostliny, které využívají sluneční světlo a atmosférický uhlík. Taková populace by rostla s nějakým kladným růstovým koeficientem, sr. str. 2–4.

„Konzumentem“ budeme rozumět populaci, pro niž producent představuje zdroj; může jít například o herbivora živícího se příslušnou rostlinou[2]. Pro populaci konzumenta je kapacita prostředí (sr. str. 4) určená velikostí populace producenta. V nejjednodušším přiblížení můžeme tyto veličiny považovat za úměrné.

Populace konzumenta spotřebovává, a tím ničí, jedince z populace producenta; jinak řečeno, zvětšuje úmrtnost producentů. Budeme opět jednoduše předpokládat, že toto zvětšení úmrtnosti producentů je úměrné velikosti populace konzumentů.

Označme $N_1 = N_1(\tau)$, resp. $N_2 = N_2(\tau)$, velikost populace producenta, resp. konzumenta, v čase τ. Vývoj těchto velikostí můžeme na základě uvedených zjednodušujících předpokladů

[1] Ve skutečnosti žádný zdroj není neomezený. Populace navíc potřebuje prostor, který je konečný. Přesnější by tedy bylo říkat, že pro potřeby modelu zanedbáváme nebo neuvažujeme všechna přirozená omezení.

[2] Stručně můžeme mluvit o modelu „tráva-kráva“.

(užitím analogických úvah jako na str. 2–4) modelovat systémem dvou autonomních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}\tau} &= N_1(r_1 - aN_2),\\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}\tau} &= r_2N_2\left(1 - \frac{N_2}{bN_1}\right).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Parametry r_1, r_2, a, b jsou kladné; r_1 je čistý růstový koeficient populace producenta (relativní přírůstek velikosti za jednotku času v případě, že populace producenta není konzumovaná), a je koeficient úměrnosti mezi úmrtností producentů způsobenou konzumenty a velikostí populace konzumentů (podíl producentů zkonzumovaných populací konzumentů o jednotkové velikosti za jednotku času v populaci jednotkové velikosti), r_2 je maximální možný růstový koeficient populace konzumenta (relativní přírůstek velikosti populace za jednotku času v případě, že má neomezený přísun poptravy), b je koeficient úměrnosti mezi úživností prostředí pro konzumenta a velikostí populace producenta.

Velikosti populací jsou čísla nezáporná. Velikost populace producenta v uvažovaném modelu musí navíc být nenulová, neboť je ve jmenovateli zlomku na pravé straně druhé z rovnic (4.11). To znamená, že stavový prostor systému (4.11) je množina $\Omega = (0, \infty) \times [0, \infty)$.

Velikosti populací i čas vyjádříme v nějakých „přirozených jednotkách“. Měřítko závisle i nezávisle proměnných (stavových proměnných i času) změníme tak, že položíme

$$x = \frac{ab}{r_1}N_1, \quad y = \frac{a}{r_1}N_2, \quad t = r_1\tau, \qquad \varrho = \frac{r_2}{r_1}.$$

Pak je

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\frac{ab}{r_1}N_1}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{ab}{r_1}(r_1 - aN_2)\,N_1\frac{1}{r_1} = \frac{ab}{r_1^2}\left(r_1 - a\frac{r_1}{a}y\right)\frac{r_1}{ab}x = (1-y)x,$$

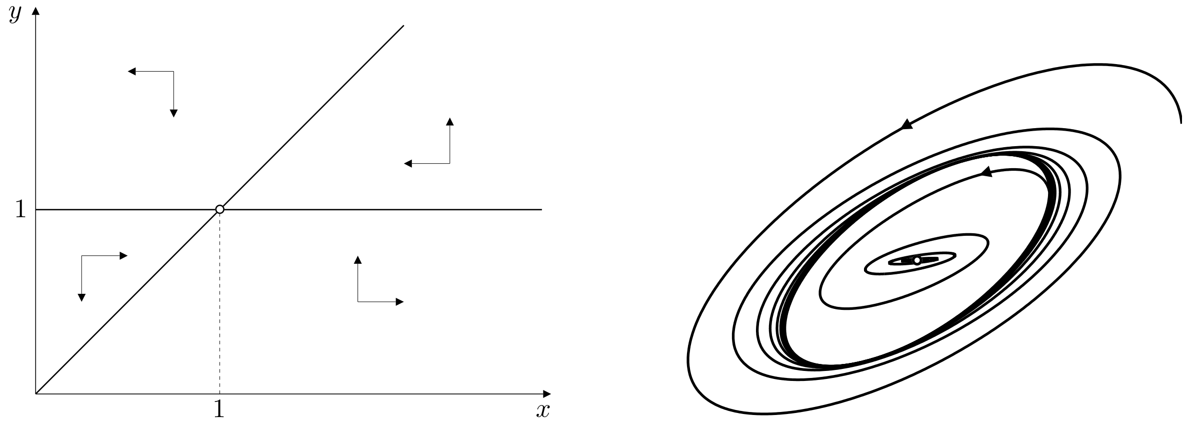
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\frac{a}{r_1}N_2}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{r_1}r_2N_2\left(1 - \frac{N_2}{bN_1}\right)\frac{1}{r_1} = \frac{ar_2}{r_1^2}\frac{r_1}{a}y\left(1 - \frac{r_1}{a}y\frac{a}{r_1x}\right) = \varrho y\left(1 - \frac{y}{x}\right),$$

Použitá substituce tedy transformuje systém (4.11) na jednodušší systém

$$\begin{aligned}x' &= (1-y)x,\\ y' &= \varrho y\left(1 - \frac{y}{x}\right)\end{aligned} \tag{4.12}$$

s jediným kladným bezrozměrným parametrem ϱ. Stavovým prostorem je opět množina $\Omega = (0, \infty) \times [0, \infty)$.

Poněvadž $x \neq 0$, má systém (4.12) jedinou x-nulklinu, polopřímku $y = 1$, a jedinou y-nulklinu, polopřímku $y = x$. V důsledku toho má jediný stacionární bod $(x^*, y^*) = (1, 1)$. Pod polopřímkou $y = 1$ směřují trajektorie doprava, nad ní směřují doleva. Nad polopřímkou $y = x$ směřují trajektorie dolů, pod ní nahoru. Fázový portrét systému (4.12) je zobrazen na obr. 4.3 vlevo. Z něho je vidět, že trajektorie mohou obíhat v kladném smyslu stacionární bod. Není ovšem jasné, zda se k němu přibližují, vzdalují se od něho nebo tvoří uzavřené křivky. Z fázového portrétu tedy není možné uhodnout průběh řešení systému (4.12).



Obrázek 4.3: Vlevo: fázový portrét systému (4.12). Vpravo: hypotetická možnost existence cyklu v případě, že stacionární bod je ohnisko a stok.

Vyšetříme linearizaci systému (4.12). Máme

$$\mathrm{D}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ \varrho\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & \varrho - 2\varrho\dfrac{y}{x} \end{pmatrix},$$

tedy

$$\mathsf{J}^* = \mathsf{J}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \varrho & -\varrho \end{pmatrix}$$

a dále

$$\operatorname{tr}\mathsf{J}^* = -\varrho < 0, \quad \det\mathsf{J}^* = \varrho > 0, \quad (\operatorname{tr}\mathsf{J}^*)^2 - 4\det\mathsf{J}^* = \varrho(\varrho-4).$$

Odtud vidíme, že stacionární bod $(1,1)$ je stok. V případě $\varrho > 4$ je to uzel, v případě $\varrho < 4$ je to ohnisko.

Tento výsledek ovšem ještě nevylučuje, že by ve stavovém prostoru nemohl být cyklus. Ten by mohl být uzavřenou křivkou, na niž se z jejího vnějšku trajektorie navíjejí a do vnitřku se z ní trajektorie odvíjejí; taková možnost je naznačena na obr 4.3 vpravo. Existenci cyklu systému (4.12) vyloučíme Dulacovým kriteriem (Věta 12). Položíme

$$q(x,y) = \frac{1}{xy}.$$

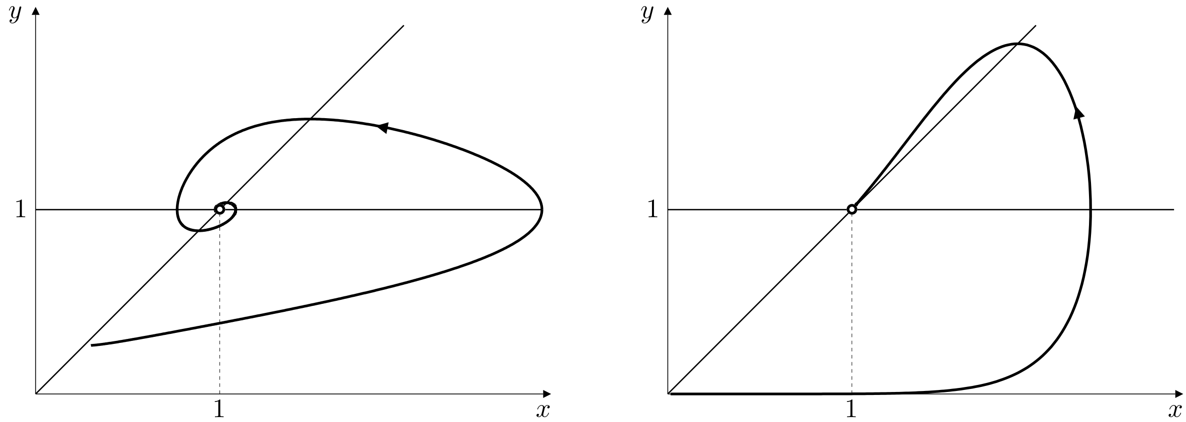
Pak je

$$F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} - 1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\varrho\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\right) = -\frac{\varrho}{x^2} < 0$$

pro všechna $x > 0$ a proto neexistuje cyklus systému (4.12) v kladném kvadrantu $(0,\infty) \times (0,\infty)$.

Trajektorie systému (4.12) pro dvě různé hodnoty parametru ϱ jsou zobrazeny na obr. 4.4; vlevo je stacionární bod $(1,1)$ ohniskem, vpravo uzlem. ∎

Věta 13 (Poincaré (1854–1912)-Bendixson (1861-1935))**.** *Jestliže rovnice* (4.1) *má trajektorii* $C^+ = \{\boldsymbol{x}(t) : t \geq 0\}$, *která je ohraničená a její uzávěr neobsahuje stacionární body rovnice* (4.1), *pak existuje cyklus rovnice* (4.1), *který leží v* $\overline{C^+}$.



Obrázek 4.4: Trajektorie systému (4.12) se dvěma různými hodnotami parametru ϱ. Vlevo: $\varrho = 0{,}5$ a stacionární bod je ohnisko, vpravo: $\varrho = 8$ a stacionírní bod je uzel.

Důkaz: P. Hartman: *Ordinary Differential Equations.* John Willey&Sons, New York-London-Sydney 1964, kap. VII. $\square$

4.3 Konzervativní systémy

Nejprve připomeneme dva pojmy, jeden z analýzy a druhý z lineární algebry: Operátor ∇ (nabla, gradient) přiřazuje spojitě diferencovatelné skalární funkci F proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorovou funkci

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^T .$$

stejných proměnných.

Matice A se nazývá *antisymetrická* (*polosymetrická*, anglicky *skew-symmetric*), pokud platí rovnost $\mathsf{A} = -\mathsf{A}^T$.

Definice 18. Funkce $U : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá *první integrál* (*invariant*) systému (4.1), je-li spojitě diferencovatelná a v každém bodě $\boldsymbol{x} \in \Omega$ pro její derivaci vzhledem k systému (4.1) platí

$$\dot{U}(\boldsymbol{x}) = \nabla U(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Řekneme, že systém (4.1) je *konzervativní*, jestliže existuje jeho první integrál.

Věta 14. *Nechť $U : \Omega \to \mathbb{R}$ je první integrál systému (4.1) a nechť $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ je řešení systému (4.1). Pak je funkce $U\big(\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)\big)$ konstantní.*

Důkaz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U\big(\boldsymbol{x}(t)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{x}(t)\big) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{x}(t)\big) f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) = 0.$$

$\square$

První integrál tedy vyjadřuje veličinu, která je na trajektoriích systému (4.1) konstantní, tj. veličinu, která se v průběhu vývoje systému zachovává; název „invariant“ je tedy adekvátní.

Systém je konzervativní, pokud zachovává (konzervuje) veličinu U. V aplikacích může jít např. o celkovou energii nebo hmotu a podobně.

Větu lze přeformulovat i takto: trajektorie systému (4.1) jsou vrstevnicemi prvního integrálu. Znalost prvního integrálu tedy poskytuje informaci o řešení systému (4.1).

Znalost několika prvních integrálů umožňuje také zmenšit dimenzi systému (4.1). Uvažujme systém (4.1) s počáteční podmínkou (4.3). Nechť k je přirozené číslo splňující nerovnosti $1 \leq k < n$, $U_1, U_2, \dots, U_k$ jsou první integrály systému (4.1) a nechť vektory $\nabla U_1(\boldsymbol{x_0}), \nabla U_2(\boldsymbol{x_0}), \dots, \nabla U_k(\boldsymbol{x_0})$ jsou lineárně nezávislé. Definujme zobrazení $\boldsymbol{\Phi} =: \Omega \to \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k)^T$ předpisem

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} U_1(\boldsymbol{x}) - U_1(\boldsymbol{x_0}) \\ U_2(\boldsymbol{x}) - U_2(\boldsymbol{x_0}) \\ \vdots \\ U_k(\boldsymbol{x}) - U_k(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix}.$$

Toto zobrazení je spojitě diferencovatelné. Označme

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x_0} = \big((\boldsymbol{x_0})_1, (\boldsymbol{x_0})_2, \dots, (\boldsymbol{x_0})_n)\big)^T = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})^T \\ \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T, \quad \boldsymbol{z} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)^T, \\ \boldsymbol{y_0} = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,k})^T, \quad \boldsymbol{z_0} = (x_{0,k+1}, x_{0,k+2}, \dots, x_{0,n})^T. \end{gathered}$$

Pak je $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{o}$ a z lineární nezávislosti vektorů $\nabla U_1(\boldsymbol{x_0}), \nabla U_2(\boldsymbol{x_0}), \dots, \nabla U_k(\boldsymbol{x_0})$ plyne

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\Phi_1(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) & \frac{\partial}{\partial y_2}\Phi_1(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k}\Phi_1(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\Phi_2(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) & \frac{\partial}{\partial y_2}\Phi_2(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k}\Phi_2(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\Phi_k(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) & \frac{\partial}{\partial y_2}\Phi_k(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k}\Phi_k(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}U_1(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial}{\partial x_2}U_1(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k}U_1(\boldsymbol{x_0}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}U_2(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial}{\partial x_2}U_2(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k}U_2(\boldsymbol{x_0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}U_k(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial}{\partial x_2}U_k(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k}U_k(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Jsou splněny předpoklady věty o implicitním zobrazení (viz např. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, Věta 8.5). To znamená, že existuje jediné spojité zobrazení $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k)^T : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ takové, že $\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{z_0}), \boldsymbol{z_0}\big) = \boldsymbol{o}$. Substitucí

$$z_1 = x_{k+1}, \; z_2 = x_{k+2}, \; \dots, \; z_{n-k} = x_n$$

přejde systém (4.1) na systém

$$\begin{aligned} z_1' &= f_{k+1}(\Psi_1(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), \Psi_2(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), \dots, \Psi_k(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), \\ z_2' &= f_{k+2}(\Psi_1(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), \Psi_2(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), \dots, \Psi_k(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), \\ &\vdots \\ z_{n-k}' &= f_n(\Psi_1(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), \Psi_2(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), \dots, \Psi_k(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}), z_1, z_2, \dots, z_{n-k}). \end{aligned}$$

Stručně řečeno, složky $x_1, x_2, \dots, x_k$ vypočítáme ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= U_1(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}), \\ U_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= U_2(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}), \\ &\vdots \\ U_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &= U_k(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}), \end{aligned}$$

tak, že je vyjádříme v závislosti na složkách $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$, a pak je dosadíme do posledních $n-k$ rovnic systému (4.1). Obecněji: vyjádříme k neznámých funkcí pomocí zbývajících $n-k$ a dosadíme je do příslušných $n-k$ z původních diferenciálních krovnic.

Příklad

Uvažujme dvourozměrný systém

$$\begin{aligned} x' &= x(y-1), \\ y' &= -xy \end{aligned} \tag{4.13}$$

se stavovým prostorem $\Omega = (0, \infty) \times (0, \infty)$. První integrál tohoto systému lze hledat tak, že druhou rovnici vydělíme rovnicí první. Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{xy}{x(y-1)} = \frac{y}{1-y},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, sr. 1.1. Její řešení je implicitně dáno rovnicí

$$x + y - \ln y = const.$$

Funkce $U : \Omega \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$U(x, y) = x + y - \ln y \tag{4.14}$$

je prvním integrálem systému (4.13), neboť

$$\dot{U}(x, y) = 1 \cdot x(y-1) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) \cdot (-xy) = xy - x - xy + x = 0.$$

Pokud funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$ jsou řešením systému (4.13) s počáteční podmínkou

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \tag{4.15}$$

pak pro všechna $t \geq 0$ platí

$$x(t) + y(t) - \ln y(t) = U\big(x(t), y(t)\big) = U(x_0, y_0) = x_0 + y_0 - \ln y_0,$$

tedy

$$x(t) = y(t) + \ln y(t) + x_0 + y_0 - \ln y_0. \tag{4.16}$$

Dosazením tohoto vyjádření funkce x do druhé rovnice systému (4.13) dostaneme

$$y' = -y\left(y + \ln\frac{y}{y_0} + x_0 + y_0\right). \tag{4.17}$$

Druhá složka řešení počátečního problému (4.13), (4.15) je tedy řešením (skalární autonomní) rovnice (4.17) s počáteční podmínkou $y(0) = y_0$; jeho první složka je pak dána rovností (4.16).
■

Definice 19. Nechť existuje antisymetrická matice S a spojitě diferencovatelná funkce $H : \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $\boldsymbol{x}$ je $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{S}\nabla H(\boldsymbol{x})$. Pak se systém (4.1) nazývá *hamiltonovský*, funkce H se nazývá *hamiltonián* systému (4.1).

Hamiltonovský systém je tedy tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{S}\nabla H(\boldsymbol{x}).$$

Věta 15. *Hamiltonovský systém je konzervativní, hamiltonián je jeho invariantem.*

Důkaz: Nejprve si všimněme, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a antisymetrickou matici S řádu n platí

$$\boldsymbol{v}^T\mathsf{S}\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{v}^T\mathsf{S}\boldsymbol{v}\right)^T = \boldsymbol{v}^T\mathsf{S}^T\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}^T\mathsf{S}\boldsymbol{v}$$

a tedy $\boldsymbol{v}^T\mathsf{S}\boldsymbol{v} = 0$. Odtud plyne, že

$$\nabla H(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \nabla H(\boldsymbol{x})^T\mathsf{S}\nabla H(\boldsymbol{x}) = 0.$$

□

Příklad

Systém (4.13) vyjádříme v logaritmických souřadnicích, tj. zavedeme substituci

$$\xi = \ln x, \quad \eta = \ln y. \tag{4.18}$$

Pak je

$$\xi' = \frac{x'}{x} = y - 1 = \mathrm{e}^\eta - 1, \qquad \eta' = \frac{y'}{y} = -x = -\mathrm{e}^\xi.$$

Transformace (4.18) převádí systém (4.13) na systém tvaru

$$\begin{aligned} \xi' &= \mathrm{e}^\eta - 1,\\ \eta' &= -\mathrm{e}^\xi, \end{aligned} \tag{4.19}$$

který můžeme vektorově zapsat jako

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^\xi\\ \mathrm{e}^\eta - 1\end{pmatrix}.$$

Matice na pravé straně této rovnice je antisymetrická. K tomu, aby funkce $H = H(\xi, \eta)$ byla hamiltoniánem systému (4.19) stačí, aby splňovala vztahy

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \mathrm{e}^\xi, \qquad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \mathrm{e}^\eta - 1,$$

tj. aby byla kmenovou funkcí diferenciálu $\mathrm{e}^\xi \mathrm{d}\xi + (\mathrm{e}^\eta - 1)\,\mathrm{d}\eta$. Zřejmě stačí volit

$$H(\xi, \eta) = \mathrm{e}^\xi + \mathrm{e}^\eta - \eta.$$

Ještě si můžeme povšimnout, že hamiltonián H systému (4.19) je invariantem (4.14) systému (4.13) transformovaným substitucí (4.18). ■

Definice 20. Existuje-li přirozené číslo k, $1 \le k < n$ a existují-li zobrazení

$$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \dots, g_k) : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k, \qquad \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{n-k}) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$$

tak, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in \Omega$ je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) &= \big(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = \\ &= \big(g_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), g_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), \dots, g_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), \\ &\qquad h_1(x_1, x_2, \dots, x_k), h_2(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, h_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_k)\big),\end{aligned}$$

pak se systém (4.1) nazývá *bipartitní.*

Při označení $\boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\boldsymbol{z} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ lze bipartitní systém zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}), \qquad \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}).$$

Neznámé funkce jsou rozlišeny na dvě sady; derivace funkcí z první sady závisí pouze na funkcích z druhé sady a naopak.

Příklad (Newtonovy zákony pohybu)

Uvažujme hmotný bod X o hmotnosti m, který má v čase t souřadnice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ a na nějž působí síla $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$, která může záviset na poloze bodu X. Polohu bodu X lze zapsat jako vektor $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$. Označme po řadě $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$, $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$, $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ rychlost, zrychlení a hybnost bodu X.

Zákon setrvačnosti říká, že pokud je hmotný bod v klidu nebo vykonává rovnoměrný přímočarý pohyb, pak jeho hybnost („množství pohybu“) je konstantní a úměrná rychlosti s koeficientem úměrnosti m, tj. $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Ze zákona setrvačnosti tak dostáváme

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} \quad \text{a dále} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}'' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}', \ \text{tj. } \boldsymbol{p}' = m\boldsymbol{a}.$$

Síla působí zrychlení hmotného bodu; definujeme ji jako úměrnou tomuto zrychlení opět s koeficientem úměrnosti m, tj. $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. První dva Newtonovy pohybové zákony tedy můžeme vyjádřit ve tvaru bipartitního systému

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}). \tag{4.20}$$

Nechť nejprve nepůsobí žádná síla, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{o}$. Pak funkce

$$U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = U(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = p_x + p_y + p_z$$

je prvním integrálem systému

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{o}. \tag{4.21}$$

Vskutku

$$\nabla U(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)^T, \quad \boldsymbol{f}(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \left(\frac{p_x}{m}, \frac{p_y}{m}, \frac{p_z}{m}, 0, 0, 0\right)^T,$$

takže $\nabla U^T \boldsymbol{f} = 0$. Analogicky se lze přesvědčit, že každá z funkcí

$$U_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = p_x, \quad U_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = p_y, \quad U_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = p_z, \quad U_4 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

je prvním integrálem systému (4.21); uvedené první integrály U_4, resp. U_1, U_2, U_3, vyjadřují zákon zachování hybnosti, resp. jejích složek.

Uvažujme nyní centrální sílu působící v počátku, tj. sílu, která bod X přitahuje k počátku nebo ho od něj odpuzuje. O velikosti síly budeme předpokládat, že je přímo úměrná hmotnosti bodu X a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti bodu X od počátku (takovou přitažlivou silou je například síla gravitační). Platí tedy

$$F_x(x,y,z) = c\frac{m}{x^2+y^2+z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad F_y(x,y,z) = c\frac{m}{x^2+y^2+z^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$F_z(x,y,z) = c\frac{m}{x^2+y^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \text{tj. } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x},$$

kde $\|\cdot\|$ nyní označuje euklidovskou velikost (normu) vektoru. Je-li konstanta úměrnosti c kladná, jedná se o přitažlivou sílu, je-li záporná, jedná se o sílu odpudivou. Systém (4.20) je nyní tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}' = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}. \tag{4.22}$$

V souřadnicích ho lze rozepsat

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{m}p_x, & p_x' &= \frac{cm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}x,\\ y' &= \frac{1}{m}p_y, & p_y' &= \frac{cm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}y,\\ z' &= \frac{1}{m}p_z, & p_z' &= \frac{cm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}z. \end{aligned}$$

Fázový prostor tohoto systému je množina $\Omega = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}^{3+3} : \|\boldsymbol{x}\| > 0\right\}$. Pro funkci $H : \Omega \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{\|\boldsymbol{p}\|^2}{2m} + \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}, \text{ tj. } H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + \frac{cm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

platí

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{cmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{cmy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{cmz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}. \tag{4.23}$$

Tedy $\nabla H^T \boldsymbol{f} = 0$ a funkce H je prvním integrálem systému (4.22). Výraz

$$\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) = \frac{1}{2m}(m^2x'^2+m^2y'^2+m^2z'^2) = \frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2) = \frac{1}{2}m\left\|\boldsymbol{x}'\right\|^2 = \frac{1}{2}m\left\|\boldsymbol{v}\right\|^2$$

vyjadřuje kinetickou energii hmotného bodu X, výraz

$$\frac{cm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

vyjadřuje jeho energii potenciální. První integrál je tedy celkovou mechanickou energií hmotného bodu X, která se zachovává.

Z vyjádření (4.23) vidíme, že systém (4.22) lze také zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) \\ \frac{\partial}{\partial y} H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) \\ \frac{\partial}{\partial z} H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) \\ \frac{\partial}{\partial p_x} H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) \\ \frac{\partial}{\partial p_y} H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) \\ \frac{\partial}{\partial p_z} H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) \end{pmatrix}$$

nebo stručně

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{E} \\ -\mathsf{E} & \mathsf{O} \end{pmatrix} \nabla H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}),$$

kde O, resp. E, je nulová, resp. jednotková, matice. Odtud vidíme, že první integrál H je současně hamiltoniánem systému (4.22). Označíme-li nyní

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T, \qquad \nabla_{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial p_x}, \frac{\partial}{\partial p_y}, \frac{\partial}{\partial p_z}\right)^T$$

můžeme systém (4.22) také zapsat jako hamiltonovský systém

$$\boldsymbol{x}' = \nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), \qquad \boldsymbol{p}' = -\nabla_{\boldsymbol{x}} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}).$$ ■

4.4 Stabilita

Definice 21 (Persidskij (1903–1970)). Nechť $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t)$ je řešení systému (4.1) definované na intervalu $[0, \infty)$. Řešení $\boldsymbol{x_0}$ se nazývá *stejnoměrně stabilní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_0 \geq 0$ všechna řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ systému (4.1) splňující podmínku $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_0(t_0)\| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_0$ a splňují pro ně nerovnost $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0(t)\| < \varepsilon$.

Není-li řešení $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x}_0(t)$ systému (4.1) stejnoměrně stabilní, nazývá se *nestabilní*.

Definice 22 (Ljapunov (1857–1918)). Nechť $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t)$ je řešení systému (4.1) definované na intervalu $[0, \infty)$. Řešení $\boldsymbol{x_0}$ se nazývá *stejnoměrně asymptoticky stabilní*, je-li stejnoměrně stabilní a existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq 0$ a všechna řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ systému (4.1) splňující podmínku $\|\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{x_0}(t_1)\| < \delta$ platí $\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_0}(t)\| = 0$.

Ze struktury prostoru řešení lineárního homogenního systému s konstantními koeficienty (sr. 3.3) plynou následující tři věty.

Věta 16. *Buď* A *konstantní matice. Jestliže všechny kořeny její charakteristické rovnice* $\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{E}) = 0$ *(vlastní čísla matice* A*) mají nekladnou reálnou část a ty s nulovou reálnou částí jsou jednoduché, pak řešení* $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ *lineárního autonomního systému*

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x} \tag{4.24}$$

je stejnoměrně stabilní.

Věta 17. *Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice* A *má kladnou reálnou část, pak řešení* $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ *lineárního autonomního systému* (4.24) *je nestabilní.*

Věta 18. *Řešení* $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ *lineárního autonomního systému* (4.24) *je stejnoměrně asymptoticky stabilní právě tehdy, když každé vlastní číslo matice* A *má zápornou reálnou část.*

Uvažujme nyní *perturbovaný lineární systém s konstantními koeficienty*

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,. \tag{4.25}$$

Věta 19. *Buď* $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t)$ *fundamentální matice řešení systému* (4.24)*. Jestliže existují konstanty* $K > 0$ *a* $\gamma < \dfrac{1}{K}$ *takové, že*

$$\int_0^t \left\| \mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(s)^{-1} \right\| \mathrm{d}s \;\leq\; K \qquad \text{pro } t \geq 0 \tag{4.26}$$

a $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\| \leq \gamma \|\boldsymbol{x}\|$ *pro* $\boldsymbol{x} \in \Omega$*, pak řešení* $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ *systému* (4.25) *je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Důkaz: J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 130–131. □

Poznámka 4. Podmínka (4.26) zaručí stejnoměrnou asymptotickou stabilitu nulového řešení systému (4.24). Věta říká, že je-li perturbace $\boldsymbol{g}$ v jistém smyslu dostatečně malá, zůstává zachována stejnoměrná asymptotická stabilita nulového řešení rovnice (4.25).

Z hlediska aplikací je důležité vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability konstantních řešení (stacionárních bodů) rovnice (4.1).

Je-li funkce $\boldsymbol{f}$ dvakrát spojitě diferencovatelná a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{o}$, pak podle Taylorovy věty pro funkce více proměnných platí

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*)\,,$$

kde $\mathsf{A} = (a_{ij}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^*)\right)$ a $\boldsymbol{r_1}$ je příslušný Taylorův zbytek. Vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability konstantních řešení rovnice (4.1) lze transformací $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$ převést na vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability nulového řešení rovnice

$$\boldsymbol{y}' \;=\; \mathsf{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}),$$

kde $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}^*)$ a tu vyšetřit podle věty 19.

Věta 20. *Buď $\boldsymbol{x}^*$ stacionární bod systému (4.1) a nechť zobrazení $\boldsymbol{f}$ je spojitě diferencovatelné.*

Mají-li všechna vlastní čísla variační matice $\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ záporné reálné části, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (4.1) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Pokud existuje vlastní číslo variační matice $\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ s kladnou reálnou částí, pak je konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (4.1) nestabilní.

Důkaz: J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 137–138. □

První tvrzení věty 20 říká, že stok je asymptoticky stabilní, sr. def. 13.

Pojmy „stabilní“ a „nestabilní“ se objevily již v Definicích 14 a 17. Porovnáním s Definicemi 21 a 22 vidíme, že byly použity korektně. Déle porovnáním Vět 20 a 11 vidíme, že pojmy „stabilní“ a „nestabilní“ použité v Tabulce 4.1 odpovídají terminologii zavedené v této části textu.

4.4.1 Přímá Ljapunovova metoda

V této části budeme symbolem $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x_0}) = \big(\varphi_1(t;\boldsymbol{x_0}),\ldots,\varphi_n(t;\boldsymbol{x_0})\big)$ označovat řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2).

Definice 23. Buď $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ a G okolí bodu $\hat{\boldsymbol{x}}$ ve fázovém prostoru Ω. Spojitá funkce $V : G \to \mathbb{R}$ se nazývá *ljapunovská funkce systému* (4.1) *v bodě* $\hat{\boldsymbol{x}}$, jestliže

(i) $V(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$ a $V(\boldsymbol{x}) > 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in G \setminus \{\hat{\boldsymbol{x}}\}$.

(ii) Pro každé $\boldsymbol{\eta} \in G$ je složená funkce $V \circ \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\eta})$ (tj. $V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big)$ chápeme jako funkci jedné reálné proměnné t) nerostoucí pro všechna $t \geq 0$.

Věta 21. *Existuje-li ljapunovská funkce systému (4.1) v bodě $\boldsymbol{x}^*$, pak $\boldsymbol{x}^*$ je stacionárním bodem systému (4.1) a konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ tohoto systému je stejnoměrně stabilní.*

Pokud navíc podmínku (ii) z definice 23 lze nahradit silnější podmínkou

(ii) Pro každé $\boldsymbol{\eta} \in G$ je složená funkce $V \circ \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\eta})$ klesající pro všechna $t \geq 0$,*

pak je konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (4.1) stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Důkaz: Pokud by existovalo $\tau > 0$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(\tau;\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{x}^*$, pak by $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\tau;\boldsymbol{x}^*)\big) > 0 = V\big(\boldsymbol{\varphi}(0;\boldsymbol{x}^*)\big)$ a funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{x}^*)\big)$ by nebyla nerostoucí. Bod $\boldsymbol{x}^*$ je tedy stacionárním bodem systému (4.1).

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$. V opačném případě bychom totiž mohli systém (4.1) substitucí $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$ transformovat na systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^*)$, pro který je $\boldsymbol{o}$ stacionárním bodem.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo takové, že $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \leq \varepsilon\} \subseteq G$ a označme

$$\gamma = \min\left\{V(\boldsymbol{x}) : \|\boldsymbol{x}\| = \varepsilon\right\}.$$

Pak $\gamma > 0$ a $V(\boldsymbol{x}) \geq \gamma$ pro každé $\boldsymbol{x}$ takové, že $\|\boldsymbol{x}\| = \varepsilon$. Ze spojitosti funkce V plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že $|V(\boldsymbol{x}) - 0| = V(\boldsymbol{x}) < \gamma$ pro všechna $\boldsymbol{x}$ taková, že $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$. Zřejmě je $\delta < \varepsilon$.

Buď dále $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ takové, že $\|\boldsymbol{\xi}\| < \delta$. Pak $V\big(\boldsymbol{\varphi}(0;\boldsymbol{\xi})\big) < \gamma$ a poněvadž funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\big)$ je nerostoucí, platí

$$V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\big) < \gamma \quad \text{pro všechna } t > 0 \text{ z definičního oboru funkce } \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi}). \tag{4.27}$$

Kdyby nyní existovalo $t_1 > 0$ takové, že $\|\boldsymbol{\varphi}(t_1,\boldsymbol{\xi})\| \geq \varepsilon$, pak by ze spojitosti funkce $\|\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\|$ a z Bolzanovy věty plynula existence $t_0 \in (0, t_1)$ takového, že $\|\boldsymbol{\varphi}(t_0;\boldsymbol{\xi})\| = \varepsilon$ a platilo by $V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_0;\boldsymbol{\xi})\big) \geq \gamma$, což by byl spor s (4.27).

Pro všechna $t > 0$ z definičního oboru funkce $\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})$ tedy platí $\|\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\| < \varepsilon$. Odtud navíc podle důsledku 3 věty 5 plyne, že $\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})$ je definována pro všechna $t > 0$. Tvrzení o stejnoměrné stabilitě je tedy dokázáno.

V případě, že $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}^*$, platí: $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$ pro každé $t \geq 0$, takže $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}^*$.

Nechť $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$ a funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\big)$ je klesající. Poněvadž funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\big)$ je monotonní, existuje

$$\lim_{t\to\infty} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\big) = \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.28}$$

a z nezápornosti funkce V plyne $\alpha \geq 0$. Připusťme $\alpha > 0$. Z toho, že

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} V(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x}^*) = 0,$$

plyne existence $t_2 > 0$ a $\beta > 0$ takových, že $\|\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\| \geq \beta$ pro všechna $t \geq t_2$. Pro všechna $t \geq t_2$ je tedy

$$\beta \leq \|\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\| \leq \varepsilon.$$

Položme $v(\boldsymbol{z}) = V\big(\boldsymbol{\varphi}(1;\boldsymbol{z})\big) - V\big(\boldsymbol{\varphi}(0;\boldsymbol{z})\big)$. Funkce v je podle věty 7 spojitá na kompaktní množině $\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \beta \leq \|\boldsymbol{z}\| \leq \varepsilon\}$ a je zde záporná. Podle Weierstrassových vět existuje

$$\Delta = \max\{v(\boldsymbol{z}) : \beta \leq \|\boldsymbol{z}\| \leq \varepsilon\};$$

je $\Delta < 0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k;\boldsymbol{\xi})\big) &= V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k;\boldsymbol{\xi})\big) - V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) = \\ &= v\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) = \dots \\ &\dots = \sum_{i=1}^{k} v\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+i-1;\boldsymbol{\xi})\big) + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{\xi})\big) \leq k\Delta + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{\xi})\big). \end{aligned}$$

Poněvadž $\lim\limits_{k\to\infty} k\Delta = -\infty$, je také $\lim\limits_{k\to\infty} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k;\boldsymbol{\xi})\big) = -\infty$, což je spor s (4.28). Tento spor dokazuje, že $\alpha = 0$. Ze spojitosti funkce V, z faktu $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) \neq \boldsymbol{x}^*$ pro $t > 0$ a $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{x}^*$, z podmínky (i) v definici 23 a ze vztahu (4.28) nyní plyne $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}^*$. Tím je dokázáno i tvrzení o stejnoměrné asymptotické stabilitě. □

Důsledek 7. *Buď $V : G \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce, která splňuje podmínku (i) z definice 23 a nechť pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ platí*

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0. \tag{4.29}$$

Funkce V je ljapunovskou funkcí systému (4.1) v bodě $\boldsymbol{x}^*$ a tedy konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ tohoto systému je stejnoměrně stabilní.

Jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in G \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ platí $\dot{V}(\boldsymbol{x}^*) < 0$, pak funkce V splňuje podmínku (ii) z věty 21 a tedy konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ tohoto systému je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Důkaz: Pro každé $\boldsymbol{\eta} \in G$ a každé $t \geq 0$ je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\eta}) \in G$ a podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) \frac{\mathrm{d}\varphi_i(t;\boldsymbol{\eta})}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) f_i\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}) = \dot{V}(\boldsymbol{x}).$$

Odtud a ze známých vět o vyšetřování průběhu funkce jedné proměnné pomocí derivace plynou obě tvrzení. □

Je-li U diferencovatelná funkce definovaná na $G \subseteq \Omega$, pak výraz $\dot{U}(\boldsymbol{x})$ definovaný vztahem

$$\dot{U}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x})$$

se nazývá *derivace funkce U vzhledem k systému* (4.1).

Příklad
Uvažujme Verhulstovu logistickou rovnici

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right). \tag{4.30}$$

Kladné stacionární řešení této rovnice je $x \equiv K$. Položme $G = (0, \infty)$ a

$$V(x) = \frac{K}{2r}(x-K)^2.$$

Pak $V(K) = 0$, $V(x) > 0$ pro $x \neq K$ a dále

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{K}{2r}(x-K)^2\right) rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) = \frac{K}{2r} 2(x-K) rx \frac{K-x}{K} = -x(x-K)^2 < 0$$

pro každé $x > 0$, $x \neq K$. Funkce V je tedy ljapunovskou funkcí rovnice (4.30) a její stacionární řešení $x \equiv K$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Položme nyní

$$W(x) = \int_K^x \frac{\xi - K}{\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Pak $W(K) = 0$. Pro $x > K$ je horní mez integrálu větší než dolní a integrujeme kladnou funkci; pro $x \in (0, K)$ naopak je horní mez integrálu menší než dolní a integrujeme zápornou funkci. Integrál je tedy pro jakékoliv $x \neq K$ kladný, takže $W(x) > 0$ pro $x \in G \smallsetminus \{K\}$. Dále pro tato x platí

$$\dot{W}(x) = \frac{x-K}{x} rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) = -\frac{r}{K}(x-K)^2 \leq 0$$

pro každé $x > 0$, přičemž rovnost nastane pouze pro $x = K$. Funkce W je tedy také ljapunovskou funkcí Verhulstovy logistické rovnice (4.30).

Příklad především ukazuje, že ljapunovských funkcí rovnice (a tím spíše systému) může být více. Pokud však Verhulstovu rovnici chápeme jako model růstu populace (sr. str. 4), pak má druhá z uvedených ljapunovských funkcí i jistou interpretaci.

Integrovaný výraz vyjadřuje relativní odchylku velikosti populace od kapacity prostředí (tj. od rovnovážné velikosti) vzhledem k velikosti populace. To lze chápat jako jakousi „sílu“ nebo „napětí“, které na populaci dané velikosti působí. Tuto „sílu“ jsme integrovali podle velikosti populace na intervalu od rovnováhy do jisté hodnoty velikosti populace, což vyjadřuje „něco jako práci“, kterou je potřeba vykonat na vychýlení velikosti populace z rovnovážné hodnoty. Jinak řečeno, výraz $W(x)$ vyjadřuje jakousi „potenciální energii populace“ o velikosti x.

Tuto „fyzikální metaforu“ lze ještě vylepšit. Populace se musí nacházet na nějakém území. Jeho rozlohu označíme S; vyjadřujeme ji v jednotkách, které jsou druhou mocninou jednotky délky (m^2). Za velikost populace budeme považovat její celkovou biomasu na uvažovaném území; vyjadřujeme ji v jednotkách hmotnosti (kg). Pro populaci velikosti x zavedeme její „potenciální energii“ výrazem

$$E(x) = r^2 SW(x).$$

Růstový koeficient r je vyjádřen v jednotkách, které jsou převrácenou hodnotou jednotky času (s^{-1}) a veličina W je vyjádřena ve stejných jednotkách, jako velikost populace (kg). Veličina E zavedená předchozí rovností je tedy vyjádřena v jednotkách $\mathrm{kg\,m^2s^{-2}}$, tj. v joulech. Ještě poznamenejme, že integrací můžeme funkci E vyjádřit ve tvaru

$$E(x) = r^2 S \left[x - K\left(1 + \ln\frac{x}{K}\right)\right].$$

Funkce E nabývá svého minima v hodnotě K, tj. v hodnotě, ke které se přibližuje velikost populace. Výsledek lze nyní zformulovat: populace se vyvíjí tak, aby minimalizovala svou potenciální energii. ■

Důsledek 8. *Buď $V : G \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce, která splňuje podmínku (i) z definice 23 a nechť pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ platí nerovnost (4.29). Jestliže existuje diferencovatelná funkce $F : G \to \mathbb{R}$ taková, že*

$$A = \left\{\boldsymbol{x} :\ \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\right\} = \{\boldsymbol{x} :\ F(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

a pro každé $\boldsymbol{x} \in A \smallsetminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ platí

$$\dot{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}) \neq 0, \tag{4.31}$$

pak funkce V splňuje podmínku (ii) z věty 21 a tedy konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (4.1) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Důkaz: Množina A je $(n-1)$-rozměrná diferencovatelná varieta (nadplocha) a vektor

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)^T$$

je normálovým vektorem k této varietě v bodě $\boldsymbol{x} \in A$.

Nechť nyní bod $\boldsymbol{x} \in A \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ je libovolný. Vektor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ je tečným vektorem k trajektorii systému (4.1) v bodě $\boldsymbol{x}$. Z nerovnosti (4.31) nyní plyne, že vektory $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ nejsou kolmé, tedy že vektor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ není tečným vektorem k varietě A v bodě $\boldsymbol{x}$. Jinak řečeno, trajektorie varietu A v bodě $\boldsymbol{x}$ protíná pod nějakým nenulovým úhlem, přechází z jedné její strany na druhou. Jestliže tedy existuje nějaké $t_1 \geq 0$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(t_1; \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{x}$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(t_1 + \tau; \boldsymbol{\eta}) \notin A$ a $\boldsymbol{\varphi}(t_1 - \tau; \boldsymbol{\eta}) \notin A$, tj. $\dot{V}\big(\boldsymbol{\varphi}(t_1 + \tau; \boldsymbol{\eta})\big) < 0$ a $\dot{V}\big(\boldsymbol{\varphi}(t_1 - \tau; \boldsymbol{\eta})\big) < 0$, pro všechna $\tau \in (0, \varepsilon)$. Funkce $\dot{V} \circ \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,; \boldsymbol{\eta})$ je tedy v bodě t_1 klesající. Poněvadž bod $\boldsymbol{x} \in A \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ byl libovolný, je tato funkce klesající v každém $t \geq 0$. □

Příkladem na použití tohoto tvrzení je vyšetřování stability kladného stacionárního řešení v modelu trofického řetězce, viz 5.5.

4.5 Podmnožiny stavového prostoru

Definice 24. Neprázdná podmnožina A fázového prostoru Ω systému (4.1) se nazývá

pozitivně invariantní (invariantní vpřed, forward invariant), pokud pro libovolné řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ systému (4.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in A$ platí, že $\boldsymbol{x}(t) \in A$ pro všechna $t \geq 0$;

negativně invariantní (invariantní vzad, backward invariant), jestliže pro každé řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ systému (4.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in A$ platí, že $\boldsymbol{x}(t) \in A$ pro všechna $t \leq 0$;

invariantní, je-li současně pozitivně i negativně invariantní.

Poznámka 5. Povšimněme si ještě dvou vlastností invariantních množin:

1. Jsou-li množiny $A, B \in \Omega$ pozitivně (resp. negativně) invariantní, pak také množiny $A \cap B$ a $A \cup B$ jsou pozitivně (resp. negativně) invariantní.

2. Libovolná trajektorie C systému (4.1) je invariantní množinou tohoto systému.

Definice 25. Nechť $A, B \subseteq \Omega$, $B \neq \emptyset$ a ϱ je nějaká metrika na Ω ekvivalentní s euklidovskou. Řekneme, že

množina A atrahuje (přitahuje) množinu B (množina A je atraktorem množiny B), jestliže pro každé řešení systému (4.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in B$ platí, že

$$\lim_{t \to \infty} \varrho\big(\boldsymbol{x}(t), A\big) = 0;$$

množina A je (globální) atraktor, jestliže A přitahuje Ω;

množina A absorbuje množinu B, jestliže A je pozitivně invariantní a ke každému řešení $\boldsymbol{x}$ systému (4.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in B$ existuje $T \geq 0$ takové, že $\boldsymbol{x}(T) \in A$;

množina A je globálně absorbující, jestliže absorbuje množinu Ω.

Poznámka 6. Nechť $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ je řešením systému (4.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} \in \Omega$. Pokud množina A je ω-limitní množinou řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$, pak je pozitivně invariantním atraktorem množiny $\{\boldsymbol{x_0}\}$.

Poznámka 7. Trajektorii C systému (4.1) nazveme *limitní trajektorií*, jestliže existuje množina $B \subseteq \Omega$ taková, že $B \cap (\Omega \setminus C) \neq \emptyset$ a C atrahuje množinu B. Je-li C navíc cyklem, nazveme ho *limitním cyklem.*

Poznámka 8. Buď $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jestliže existují kladné konstanty K, δ takové, že pro každý bod $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ splňující podmínku $|x_i| \geq K$ platí

$$(\operatorname{sgn} x_i) f_i(\boldsymbol{x}) \leq -\delta |x_i|,$$

pak množina $A_i = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega : |x_i| \leq K\}$ je globálně absorbující množinou systému (4.1).

Důkaz: Nejprve ukážeme, že každá trajektorie protíná množinu A_i. Připusťme, že existuje řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,) = \big(x_1(\,\cdot\,), x_2(\,\cdot\,), \ldots, x_n(\,\cdot\,)\big)$ systému (4.1) takové, že pro všechna $t \geq 0$ je $|x_i(t)| > K$. Položme $u(t) = |x_i(t)|$. Pak pro všechna $t \geq 0$ je

$$u'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x_i(t)| = \big(\operatorname{sgn} x_i(t)\big) f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) \leq -\delta |x_i(t)| = -\delta u(t),$$

neboli

$$\frac{u'(t)}{u(t)} \leq -\delta.$$

Integrací této nerovnosti v mezích od 0 po t dostaneme $\ln u(t) - \ln u(0) \leq -\delta t$, tj.

$$0 \leq |x_i(t)| = u(t) \leq u(0)\mathrm{e}^{-\delta t} = |x_i(0)|\mathrm{e}^{-\delta t}$$

pro libovolné $t \geq 0$. Odtud plyne, že $\lim\limits_{t\to\infty} |x_i(t)| = 0$, což je ve sporu s předpokladem $|x_i(t)| > K > 0$.

Množina A_i má neprázdný průnik s libovolnou trajektorií, je tedy neprázdná. Ukážeme, že je navíc pozitivně invariantní. Připusťme, že existuje řešení

$$\boldsymbol{x}(\,\cdot\,) = \big(x_1(\,\cdot\,), x_2(\,\cdot\,), \ldots, x_n(\,\cdot\,)\big)$$

systému (4.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in A_i$ takové, že pro jisté $t_1 > 0$ je $\boldsymbol{x}(t_1) \notin A_i$, tj. $|x_i(t_1)| > K$. Položme

$$M = \{t \in \mathbb{R} : \ 0 \leq t < t_1, |x_i(t)| \leq K\}\,.$$

Pak $0 \in M$, takže M je neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Existuje tedy $T = \sup M$. Ze spojitosti funkce $x_i(\,\cdot\,)$ a z vlastností suprema plyne, že $T < t_1$, $x_i(T) = K$ a funkce $x_i(\,\cdot\,)$ je v bodě T rostoucí. Avšak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x_i(t)|\bigg|_{t=T} = \big(\operatorname{sgn} x_i(T)\big) f_i\big(\boldsymbol{x}(T)\big) \leq -\delta |x_i(t)| = -\delta K < 0,$$

což je spor s faktem, že funkce $x_i(\,\cdot\,)$ je v T rostoucí. $\square$

Definice 26. Systém (4.1) se nazývá *dissipativní*, jestliže existuje ohraničená globálně absorbující množina.

Z definice bezprostředně plyne:

Poznámka 9. Je-li systém (4.1) dissipativní, pak každé jeho řešení je ohraničené.

V aplikacích budou užitečné následující vlastnosti dissipativních systémů:

Poznámka 10. Jestliže existují kladné konstanty K, δ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a všechna $\boldsymbol{x} \in \Omega$ taková, že $\|\boldsymbol{x}\| \geq K$ platí

$$(\operatorname{sgn} x_i) f_i(\boldsymbol{x}) \leq -\delta,$$

pak je systém (4.1) dissipativní a globálně absorbující je množina $A = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \|\boldsymbol{x}\| \leq K\}$.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že každá trajektorie protíná množinu A. Připusťme, že existuje řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ systému (4.1) takové, že $\boldsymbol{x}(t) \notin A$ pro všechna $t \geq 0$. Pak $\|\boldsymbol{x}(t)\| > K$ pro všechna $t > 0$, a tedy pro libovolné $t > 0$ platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |x_i(t)| = \sum_{i=1}^{n} \big(\operatorname{sgn} x_i(t) \big) x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \big(\operatorname{sgn} x_i(t) \big) f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) \leq \sum_{i=1}^{n} (-\delta) = -n\delta.$$

Integrací této nerovnosti dostaneme $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \|\boldsymbol{x}(0)\| - n\delta t$, takže pro $t \geq \dfrac{\|\boldsymbol{x}(0)\| - K}{n\delta}$ je $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq K$, což je spor. Každá trajektorie má tedy s množinou A neprázdný průnik, což také znamená, že množina A je neprázdná.

Ukážeme, že množina A je navíc pozitivně invariantní. Nechť $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ je řešením systému (4.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(0) \in A$. Připusťme, že existuje $t_1 > 0$, pro něž $\boldsymbol{x}(t_1) \notin A$. Pak $\|\boldsymbol{x}(t_1)\| > K$. Položme

$$M = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t < t_1, \|\boldsymbol{x}(t)\| \leq K\}\,.$$

Pak $0 \in M$, takže M je neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Existuje tedy $T = \sup M$. Ze spojitosti funkce $\|\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)\|$ a z vlastností suprema plyne, že $\|\boldsymbol{x}(T)\| = K$ a funkce $\|\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)\|$ je v bodě T rostoucí. Avšak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\boldsymbol{x}(t)\| \bigg|_{t=T} = \sum_{i=1}^{n} \big(\operatorname{sgn} x_i(T) \big) x_i'(T) = \sum_{i=1}^{n} \big(\operatorname{sgn} x_i(T) \big) f_i\big(\boldsymbol{x}(T)\big) \leq -n\delta < 0,$$

což je spor s tím, že funkce $\|\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)\|$ je v bodě T rostoucí. Pro všechna $t > 0$ je tedy $\boldsymbol{x} \in A$ a množina A je invariantní. □

Poznámka 11. Nechť ke každému $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existují kladné konstanty K_i, δ_i takové, že pro všechna $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ z nerovnosti $|x_i| \geq K_i$ plyne nerovnost

$$(\operatorname{sgn} x_i) f_i(\boldsymbol{x}) \leq -\delta_i |x_i|.$$

Pak je systém (4.1) dissipativní s globálně absorbující množinou

$$A = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega : |x_1| \leq K_1, |x_2| \leq K_2, \dots, |x_n| \leq K_n\}\,.$$

Důkaz: Položme $A_i = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : |x_i| \leq K_i\}$. Pak každá z množin A_i je podle poznámky 8 globálně absorbující množinou a $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$. Podle poznámky 5 je množina A pozitivně invariantní. Ukážeme, že je také globálně absorbující.

Buď $\boldsymbol{x}(t)$ libovolné řešení systému (4.1). Podle poznámky 8 existuje $t_1 \geq 0$ takové, že $|x_1(t_1)| \leq K_1$ pro všechna $t \geq t_1$. Dále existuje $t_2 \geq t_1$ takové, že pro všechna $t \geq t_2$ je $|x_2(t_2)| \leq K_2$ atd. Nakonec existuje $t_n \geq t_{n-1}$ takové, že $|x_n(t)| \leq K_n$ pro všechna $t \geq t_n$. Takže pro všechna $t \geq t_n$ je $|x_1(t)| \leq K_1, |x_2(t)| \leq K_2, \dots, |x_n(t)| \leq K_n$, tj. $\boldsymbol{x}(t) \in A$. □

Část II

Aplikace

Kapitola 5

Lotkovy-Volterrovy systémy

$$x_i' = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Tyto systémy modelují vývoj společenstva (časové změny velikostí jednotlivých populací, z nichž se společenstvo skládá). Neznámé funkce a parametry interpretujeme následovně:

$x_i = x_i(t)$ . . . velikost i-té populace

b_i . . . růstový koeficient izolované i-té populace (vnitřní koeficient růstu i-té populace)

- $b_i > 0$ . . . i-tá populace je soběstačná (producent)
- $b_i \le 0$ . . . i-tá populace závisí na jiných populacích (konzument)

a_{ii} . . . koeficient vnitrodruhových vztahů i-té populace

- $a_{ii} > 0$ . . . v i-té populaci se projevuje vnitrodruhová konkurence
- $a_{ii} < 0$ . . . v i-té populaci se projevuje vnitrodruhová kooperace

a_{ij} . . . koeficient vlivu j-té populace na i-tou

- $\min\{a_{ij}, a_{ji}\} > 0$ . . . i-tá a j-tá populace jsou ve vztahu konkurence
- $\max\{a_{ij}, a_{ji}\} < 0$ . . . i-tá a j-tá populace jsou ve vztahu mutualismu (symbiózy)
- $a_{ij} < 0 < a_{ji}$ . . . j-tá populace je kořistí (hostitelem) i-té populace;
  i-tá populace je predátorem (parazitem) j-té populace
- $a_{ij} > 0$ . . . j-tá populace je amenzalistou i-té populace
- $a_{ij} < 0$ . . . j-tá populace je komenzalistou i-té populace

Fázový prostor systému (5.1) je n-rozměrný uzavřený kladný orthant

$$\bar{\mathbb{R}}_+^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\}.$$

5.1 Vztah Lotkových-Volterrových systémů a Verhulstovy logistické rovnice

Logistickou rovnici

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

v níž jsou oba parametry r (vnitřní koeficient růstu) a K (kapacita prostředí pro modelovanou populaci) kladné, lze považovat za jednorozměrný Lotkův-Volterrův systém s $b_1 = r$ a $a_{11} = r/K$, tedy za model soběstačné populace s vnitrodruhovou konkurencí (tak byla Verhulstova rovnice sestavena). Také platí $K = b_1/a_{11}$; odtud lze usoudit, že pro soběstačnou populaci s vnitrodruhovou konkurencí představuje podíl vnitřního koeficientu růstu a koeficientu vnitrodruhové konkurence kapacitu prostředí neovlivněnou ostatními populacemi společenstva.

Jinou interpretaci logistické rovnice lze získat následující úvahou: Označme

$$y = 1 - \frac{x}{K} = \frac{K - x}{K}.$$

Poněvadž $y' = -x'/K$, dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= rxy \\ y' &= -\frac{r}{K}xy. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Jedná se o dvojrozměrný Lotkův-Volterrův systém s parametry

$$b_1 = b_2 = 0, \quad a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = r, \quad a_{21} = -\frac{r}{K}.$$

Proměnnou y lze interpretovat jako relativní dostupnost zdrojů pro modelovanou populaci vzhledem k celkové kapacitě prostředí K. Velikost populace a relativní dostupnost zdrojů jsou tedy ve vztahu predace, obě tyto „složky společenstva“ nejsou ani producenty ani konzumenty a neprojevuje se u nich žádný vnitrodruhový vztah.

Poznamenejme, že systém (5.2) nemá izolované stacionární body.

Systém (5.2) lze také přepsat ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \frac{r}{K}\begin{pmatrix} 0 & xy \\ -xy & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ K \end{pmatrix} = \frac{r}{K}\begin{pmatrix} 0 & xy \\ -xy & 0 \end{pmatrix}\nabla(x + Ky).$$

Matice

$$\mathsf{S} = \mathsf{S}(x,y) = \frac{r}{K}\begin{pmatrix} 0 & xy \\ -xy & 0 \end{pmatrix}$$

je antisymetrická. To znamená, že systém (5.2) je hamiltonovský a funkce $H(x,y) = x + Ky$ je jeho hamiltoniánem (sr. definici 19 a větu 15). Invariantem systému (5.2) je součet velikosti populace a (absolutní) dostupnosti zdrojů. Tento invariant je podle definičního vztahu proměnné y také roven

$$x + Ky = x + K\left(1 - \frac{x}{K}\right) = K,$$

což je kapacita prostředí z Verhulstovy logistické rovnice. Tyto výsledky jsou matematicky triviální, umožňují ale alternativní interpretaci kapacity prostředí a tím snad i lepší vhled do problematiky populační ekologie.

5.2 Obecné vlastnosti Lotkových-Volterrových systémů

Zavedeme označení

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

matice A se nazývá *matice interakcí společenstva.* Pro libovolný vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ položíme

$$\operatorname{diag} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_n \end{pmatrix}$$

a vektory ze standardní orthonormální báze n-rozměrného vektorového prostoru označíme $\boldsymbol{e_j}$,

$$\boldsymbol{e^j} = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \text{ je Kroneckerův symbol.}$$

Systém (5.1) lze zapsat jako vektorovou rovnici

$$\boldsymbol{x}' = \operatorname{diag} \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}). \tag{5.3}$$

Je-li matice A regulární, existuje nejvýše jeden stacionární bod $\boldsymbol{x^*} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ systému (5.1) takový, že všechny jeho složky jsou kladné. Takový stacionární bod budeme nazývat *vnitřní.* Pokud vnitřní stacionární bod existuje, lze tuto skutečnost interpretovat jako možnou koexistenci všech populací společenstva, přičemž koexistující populace mají dynamicky stálé velikosti dané složkami vektoru $\boldsymbol{x}^*$.

Parciální derivace pravé strany rovnice (5.3) podle j-té proměnné je

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{diag} \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \right) (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) + \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) \right) = \\ = \operatorname{diag} \boldsymbol{e}^j\, (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) + \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \left(-\mathsf{A} \cdot \boldsymbol{e}^j \right)$$

a pro vnitřní stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ platí $\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^* = \mathsf{O}$. Proto variační matice systému (5.1) ve vnitřním stacionárním bodě $\boldsymbol{x}^*$ je

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*) = -\operatorname{diag} \boldsymbol{x}^* \cdot \mathsf{A}.$$

Odtud a z 20 plyne:

Věta 22. *Buď $\boldsymbol{x}^*$ stacionární bod systému (5.1), jehož všechny složky jsou nenulové. Mají-li všechna vlastní čísla matice $\operatorname{diag} \boldsymbol{x}^* \cdot \mathsf{A}$ kladnou reálnou část, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Pokud existuje vlastní číslo matice $\operatorname{diag} \boldsymbol{x}^* \cdot \mathsf{A}$ které má zápornou reálnou část, pak je konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) nestabilní.

Poznámka 12. Pro čtvercovou matici M položme $\mathcal{S}\mathsf{M} = \frac{1}{2}\left(\mathsf{M} + \mathsf{M}^T\right)$. Matice $\mathcal{S}\mathsf{M}$ je zřejmě symetrická.

Pro každý n-rozměrný vektor $\boldsymbol{v}$ a čtvercovou matici M řádu n platí

$$\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T\mathcal{S}\mathsf{M}\boldsymbol{v}.$$

Důkaz: Poněvadž $\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v}$ je číslo, tj. čtvercová matice řádu 1, platí

$$\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v}\right)^T = \boldsymbol{v}^T\mathsf{M}^T\boldsymbol{v}.$$

Odtud plyne

$$\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}^T\left(\frac{1}{2}(\mathsf{M} + \mathsf{M}^T) - \frac{1}{2}\mathsf{M}^T\right)\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}^T\,\mathcal{S}\mathsf{M}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^T\mathsf{M}^T\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}^T\,\mathcal{S}\mathsf{M}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v}$$

a tato rovnost je již ekvivalentní s dokazovaným vztahem. □

Věta 23. *Buď $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ vnitřní stacionární bod systému (5.1). Jestliže existuje konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ se všemi složkami kladnými a existuje okolí U bodu $\boldsymbol{x}^*$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in U$ je výraz*

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T\ \mathcal{S}(\operatorname{diag}\boldsymbol{c}\,\mathsf{A})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \tag{5.4}$$

nezáporný, pak funkce

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{\xi - x_i^*}{\xi}\mathrm{d}\xi$$

je ljapunovskou funkcí systému (5.1), tj. konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) je stejnoměrně stabilní.

Pokud je výraz (5.4) pro všechna $\boldsymbol{x} \in U \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ kladný, pak je toto řešení stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Důkaz: Funkce V je definována pro všechna $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$. Platí

$$V(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_i^*}^{x_i^*} \frac{\xi - x_i^*}{\xi}\mathrm{d}\xi = 0.$$

Pro každé $x_i > 0$ je

$$\int_{x_i^*}^{x_i} \frac{\xi - x_i^*}{\xi}\mathrm{d}\xi \geq 0,$$

neboť integrovaná funkce je kladná pro $x_i > x_i^*$ (tj. v případě, že horní mez integrálu je větší, než dolní mez) a záporná pro $x_i < x_i^*$ (horní mez integrálu menší než dolní mez). Rovnost nastane právě tehdy, když $x_i = x_i^*$. Odtud plyne, že pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$ a takové, že všechny jeho složky jsou kladné, platí $V(\boldsymbol{x}) > 0$.

Dále podle věty o derivaci integrálu jako funkce horní meze platí

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = c_i\frac{x_i - x_i^*}{x_i},$$

a poněvadž $\boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^*$, platí dále

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*,$$

takže derivace funkce V vzhledem k systému (5.1) je

$$\dot V(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{x_i - x_i^*}{x_i} x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i - x_i^*\right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(x_i - x_i^*\right) c_i a_{ij} \left(x_j - x_j^*\right) = -\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\right)^T \left(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\, \mathsf{A}\right) \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\right) =$$
$$= -\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\right)^T \mathcal{S}\left(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\, \mathsf{A}\right) \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\right)$$

(poslední rovnost plyne z poznámky 12). Věta nyní plyne z věty 21 a jejího důsledku 7. □

Důsledek 9. *Nechť systém (5.1) má vnitřní stacionární bod $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.*

Jestliže existuje konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ se všemi složkami kladnými takový, že matice

$$\mathcal{S}\left(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\, \mathsf{A}\right) \tag{5.5}$$

je pozitivně semidefinitní, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) je stejnoměrně stabilní.

Pokud je matice (5.5) pozitivně definitní, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Poznámka 13. Nechť jsou splněny předpoklady Věty 23. Ljapunovská funkce systému (5.1) je tvaru

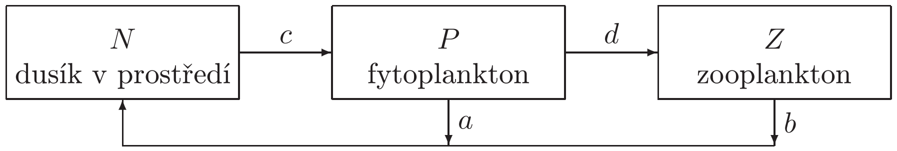
$$V(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i - x_i^* \left(1 - \ln \frac{x_i}{x_i^*} \right) \right)$$

a její derivace vzhledem k systému (5.1) je rovna

$$\dot V(\boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T \mathcal{S}(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\mathsf{A})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*).$$

5.3 Koloběh dusíku v planktonu

Uvažujme proces schématicky znázorněný na obrázku 5.1: Ve fytoplanktonu probíhá fotosyntéza a při ní se dusík z okolního prostředí váže v jeho buňkách; fytoplankton slouží jako potrava pro zooplankton, takže dusík ze zkonzumovaného fytoplanktonu se stává součástí zooplanktonu. Plankton v důsledku svého metabolismu dusík opět vylučuje do okolního prostředí a také při rozkladu mrtvého planktonu se dusík uvolňuje. Dusík z prostředí není odebírán ani není nějakým způsobem do něho přidáván. Dusíku vylučovaného planktonem je tím více, čím je více planktonu, dusíku vázaného ve fytoplanktonu přibývá tím více, čím je více volného dusíku a fytoplanktonu; dusíku vázaného v zooplanktonu přibývá tím více, čím více je fytoplanktonu pozřeného zooplanktonem a toho je tím více, čím více je fytoplanktonu i zooplanktonu. Označme po řadě N, P a Z množství dusíku v prostředí, vázaného ve fytoplanktonu a vázaného v zooplanktonu. Všechny tyto veličiny se mění s časem, tj. $N = N(t)$,



Obrázek 5.1: Schéma koloběhu dusíku

$P = P(t)$ a $Z = Z(t)$. Celkové množství dusíku v systému je rovno $V = N + P + Z$. Koloběh dusíku lze nejjednodušeji modelovat systémem rovnic

$$\begin{aligned} N' &= aP + bZ - cNP, \\ P' &= cNP - dPZ - aP, \\ Z' &= dPZ - bZ; \end{aligned}$$

všechny parametry a, b, c, d jsou kladné.

Nejprve si všimněme, že $V' = N' + P' + Z' = 0$, což znamená, že celkové množství dusíku V je konstantní. Proto lze množství dusíku v prostředí vyjádřit jako $N(t) = V - P(t) - Z(t)$ a dosadit do druhé a třetí rovnice systému. Dostaneme

$$\begin{aligned} P' &= (Vc - a)P - cP^2 - (c + d)PZ = P\big(Vc - a - cP - (c + d)Z\big), \\ Z' &= -bZ + dPZ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; = Z\big(-b + dP\big). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Jedná se tedy o Lotkův-Volterrův systém s vektorem růstových koeficientů a maticí interakcí

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} Vc - a \\ -b \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} c & -(c + d) \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

To je systém typu dravec-kořist; dravcem je zooplankton, kořistí fytoplankton. Variační matice systému (5.6) v obecném bodě je

$$\mathsf{J}(P, Z) = \begin{pmatrix} Vc - a - 2cP - (c + d)Z & -(c + d)P \\ dZ & -b + dP \end{pmatrix},$$

Systém (5.6) má vždy triviální stacionární bod

$$\boldsymbol{s_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vyjadřující nepřítomnost planktonu. Variační matice v triviálním stacionárním bodě, její stopa a determinant jsou

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0}) = \begin{pmatrix} Vc - a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr}\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big) = c\left(V - \frac{a}{c}\right) - b, \quad \det\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big) = -bc\left(V - \frac{a}{c}\right),$$

Pokud pro množství dusíku platí

$$V > \frac{a}{c}, \tag{5.7}$$

pak $\det\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big) < 0$ a podle Věty 11 spolu s Tabulkou 4.1 to znamená, že triviální stacionární bod $\boldsymbol{s_0}$ je sedlo. Pokud naopak

$$V < \frac{a}{c},$$

pak $\det\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big) > 0$, $\operatorname{tr}\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big) < -b < 0$ a $\Big(\operatorname{tr}\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big)\Big)^2 - 4\det\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big) = (Vc - a + b)^2 \geq 0$, což znamená, že $\boldsymbol{s_0}$ je stabilní uzel.

Je-li splněna nerovnost (5.7), pak má systém (5.6) další stacionární bod

$$\boldsymbol{s_1} = \begin{pmatrix} V - \dfrac{a}{c} \\ 0 \end{pmatrix},$$

vyjadřující dynamicky stálé množství fytoplanktonu bez přítomnosti zooplanktonu. Variační matice systému (5.7) ve stacionárním bodě $\boldsymbol{s_1}$ je

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1}) = \begin{pmatrix} -c\left(V - \frac{a}{c}\right) & -(c+d)\left(V - \frac{a}{c}\right) \\ 0 & d\left(V - \frac{a}{c}\right) - b \end{pmatrix},$$

její stopa a determinant jsou

$$\operatorname{tr}\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1})\big) = d\left(V - \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right) - c\left(V - \frac{a}{c}\right), \quad \det\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1})\big) = -cd\left(V - \frac{a}{c}\right)\left(V - \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right).$$

Pokud navíc množství dusíku splňuje podmínku

$$V > \frac{a}{c} + \frac{b}{d}, \tag{5.8}$$

pak $\det\big(\mathsf{J}(s_1)\big) < 0$ a stacionární bod je sedlo. Je-li naopak

$$V < \frac{a}{c} + \frac{b}{d},$$

pak $\det\big(\mathsf{J}(s_1)\big) < 0$, $\operatorname{tr}\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1})\big) < 0$ a

$$\Big(\operatorname{tr}\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1})\big)\Big)^2 - 4\det\big(\mathsf{J}(s_1)\big) = \left[d\left(V - \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right) + c\left(V - \frac{a}{c}\right)\right]^2 \geq 0,$$

což znamená, že stacionární bod je stabilní uzel.

Vnitřní stacionární bod systému (5.6) je

$$\begin{pmatrix} P^* \\ Z^* \end{pmatrix} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{d(c+d)}\begin{pmatrix} 0 & -(c+d) \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Vc - a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{d} \\ \dfrac{c}{c+d}\left(V - \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}\right) \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $P^* > 0$ a pokud je splněna podmínka (5.8), pak také $Z^* > 0$; v takovém případě je tedy možná koexistence fyto- i zooplanktonu. Dále platí

$$\mathsf{J}(P^*, Z^*) = -\begin{pmatrix} \dfrac{b}{d} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \dfrac{c}{c+d}\left(V - \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -(c+d) \\ d & c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b(c+d)}{d} \\ -\dfrac{cd}{c+d}\left(V - \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}\right) & -\dfrac{c^2}{c+d}\left(V - \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}\right) \end{pmatrix}.$$

Je-li splněna podmínka (5.8), pak

$$\operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(P^*,Z^*)\right) = -\frac{c^2}{c+d}\left(V-\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right) < 0, \quad \det\left(\mathsf{J}(P^*,Z^*)\right) = bc\left(V-\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right) > 0,$$

což znamená, že reálná část vlastních čísel variační matice $\mathsf{J}(P^*,Z^*)$ je záporná, a tedy vnitřní stacionární řešení (P^*,Z^*) systému (5.6) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Povšimněme si, že kladná stacionární hodnota P^* nezávisí na celkovém množství dusíku V. Pokud se tedy zvětší přísun živin, nemá z toho užitek fytoplankton, ale jeho predátor zooplankton.

Z dosud provedených úvah a výpočtů lze učinit závěr, že přežívání planktonu je závislé na celkovém množství dusíku v prostředí:

(i)	$V < \dfrac{a}{c}$	plankton nepřežívá,
(ii)	$\dfrac{a}{c} < V < \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d}$	přežívá pouze fytoplankton,
(iii)	$\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} < V$	fyto- i zooplankton dlouhodobě koexistují.

Povšimněme si, že podmínku (iii) lze splnit pouze v případě

$$V > \frac{b}{d}; \tag{5.9}$$

v opačném případě by totiž mělo být $V - \dfrac{b}{d} > \dfrac{a}{c} > 0$ a současně $V - \dfrac{b}{d} \leq 0$.

Výsledky lze ovšem interpretovat i jinak. Předpokládejme, že platí podmínka (5.9) a příslušné nerovnosti i závěry z nich plynoucí přepíšeme do tvaru:

(i)	$c < \dfrac{a}{V}$	plankton nepřežívá,
(ii)	$\dfrac{a}{V} < c < \dfrac{a}{V} + \dfrac{ab}{V(Vd-b)}$	přežívá pouze fytoplankton,
(iii)	$\dfrac{a}{V} + \dfrac{ab}{V(Vd-b)} < c$	fyto- i zooplankton dlouhodobě koexistují.

Koeficient c vyjadřuje, s jakou intenzitou je dusík z prostředí vázán do biomasy fytoplanktonu. Tato vazba vzniká procesem fotosyntézy, jejíž intenzita roste s množstvím slunečního světla a to se mění s ročním obdobím. Při stálém množství dusíku se s rostoucím množstvím světla nejprve objeví fytoplankton, poté i zooplankton; v zimě se plankton nevyskytuje, na jaře se nejprve objeví fytoplankton a poté s prodlužujícím se dnem i zooplankton.

5.4 Dissipativita konkurenčních systémů

Uvažujme společenstvo n soběstačných populací, z nichž každá projevuje vnitrodruhovou konkurenci a každá z populací je amenzalistou jiné nebo ji neovlivňuje (zejména tedy každé dvě populace mohou být ve vztahu konkurence). Vývoj takového společenstva lze modelovat systémem (5.1) s kladnými parametry b_i, a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ a s nezápornými parametry a_{ij}

pro $i \neq j$. S využitím poznámky 11 ukážeme, že takový systém je dissipativní, tedy že všechny složky jeho řešení jsou ohraničené:

Nechť $\varepsilon > 0$ a $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou libovolná. Položme

$$K_i = \frac{b_i}{a_{ii}} + \varepsilon, \qquad \delta_i = \varepsilon a_{ii}.$$

Pak $K_i > 0$, $\delta_i > 0$ a pro všechna $x_j \geq K_j$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$x_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \leq x_i(b_i - a_{ii}x_i) \leq x_i(b_i - a_{ii}K_i) = x_i a_{ii}\left(\frac{b_i}{a_{ii}} - K_i\right) =$$
$$= x_i a_{ii}(K_i - \varepsilon - K_i) = -\varepsilon x_i a_{ii} = -\delta_i x_i,$$

takže předpoklady poznámky 11 jsou splněny.

Poněvadž kladná konstanta ε je libovolně malá, pro každé řešení

$$\boldsymbol{x}(\,\cdot\,) = \big(x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)\big)$$

systému (5.1) s $b_i > 0, a_{ii} > 0, a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ existuje $T \geq 0$ takové, že pro všechna $t \geq T$ je

$$x_1(t) \leq \frac{b_1}{a_{11}}, \ x_2(t) \leq \frac{b_2}{a_{22}}, \ \dots, \ x_n(t) \leq \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

V dlouhém časovém horizontu populace nepřekračují velikost danou kapacitou prostředí pro populace izolované.

5.5 Trofický řetězec

Trofický řetězec je takové společenstvo, v němž je první druh producentem a každý jiný druh je nesoběstačným specializovaným predátorem právě jednoho dalšího druhu. Označíme x_1 velikost populace producenta, x_2 velikost populace jeho predátora, x_3 velikost populace, která je predátorem populace o velikosti x_2, atd. Každá z populací na některé trofické úrovni nemusí být tvořena jedním biologickým druhem, může jít o společenstvo organismů majících stejný způsob obživy. Trofický řetěz o n úrovních lze tedy modelovat systémem

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1(r - ax_1) - p_1x_1x_2 \\
x_2' &= -d_2x_2 + q_2x_1x_2 - p_2x_2x_3 \\
&\ \vdots \\
x_k' &= -d_kx_k + q_kx_{k-1}x_k - p_kx_kx_{k+1} \\
&\ \vdots \\
x_{n-1}' &= -d_{n-1}x_{n-1} + q_{n-1}x_{n-2}x_{n-1} - p_{n-1}x_{n-1}x_n \\
x_n' &= -d_nx_n + q_nx_{n-1}x_n,
\end{aligned} \tag{5.10}$$

parametry $r, d_2, d_3, \dots, d_n, q_2, q_3, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ jsou kladné, parametr a je nezáporný (producent může, ale nemusí projevovat vnitrodruhovou konkurenci).

Existence vnitřního stacionárního bodu

Hledejme nyní podmínky, které zaručí existenci takového stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$. Jeho souřadnice splňují n-rozměrný systém algebraických rovnic

$$\begin{aligned} ax_1^* + p_1 x_2^* &= r, \\ q_k x_{k-1}^* - p_k x_{k+1}^* &= d_k, \quad k = 2, 3, \dots, n-1. \\ q_n x_{n-1}^* &= d_n. \end{aligned} \tag{5.11}$$

„Prostřední“ rovnice tohoto systému lze přepsat ve tvaru rekurentních formulí

$$x_{k-1}^* = \frac{1}{q_k}\left(p_k x_{k+1}^* + d_k\right) \quad \text{nebo} \quad x_{k+1}^* = \frac{1}{p_k}\left(q_k x_{k-1}^* - d_k\right), \quad k = 2, 3, \dots, n-1. \tag{5.12}$$

Poněvadž všechny koeficienty p_k, q_k, d_k jsou kladné, plyne z tohoto vyjádření:

(i) je-li $x_{\ell_0}^* > 0$ pro nějaké $l_0 \in \{2, 3, \dots, n\}$,

$$\text{pak je } x_\ell^* > 0 \text{ pro všechna } \ell \in \left\{\ell_0, \ell_0 - 2, \ell_0 - 4, \dots, \frac{1}{2}\left(3 + (-1)^{\ell_0}\right)\right\};$$

(ii) je-li $x_{\ell_1}^* \le 0$ pro nějaké $\ell_1 \in \{1, 3, \dots, n-2\}$,

$$\text{pak je } x_\ell^* < 0 \text{ pro všechna } \ell \in \left\{\ell_1 + 2, \ell_1 + 4, \dots, n - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{\ell_1 + n}\right)\right\}.$$

Podle poslední rovnice systému (5.11) je

$$x_{n-1}^* = \frac{d_n}{q_n}.$$

Z první rekurentní formule (5.12) postupně vyjádříme

$$x_{n-3}^* = \frac{1}{q_{n-2}}\left(p_{n-2} x_{n-1}^* + d_{n-2}\right) = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\frac{d_n}{q_n} + \frac{d_{n-2}}{q_{n-2}},$$

$$x_{n-5}^* = \frac{1}{q_{n-4}}\left(p_{n-4} x_{n-3}^* + d_{n-4}\right) = \frac{p_{n-4}}{q_{n-4}}\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\frac{d_n}{q_n} + \frac{p_{n-4}}{q_{n-4}}\frac{d_{n-2}}{q_{n-2}} + \frac{d_{n-4}}{q_{n-4}},$$

atd. Celkem dostaneme

$$x_{n-(2\ell+1)}^* = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{d_{n-2i}}{q_{n-2i}} \prod_{j=i+1}^{\ell} \frac{p_{n-2j}}{q_{n-2j}}, \quad \text{pro } \ell = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \tag{5.13}$$

kde $[\xi]$ označuje celou část z čísla ξ a klademe $\prod\limits_{j=k}^{k-1} \alpha_j = 1$ pro libovolné přirozené k a každou posloupnost $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$.[1] Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že (5.13) je skutečně řešením druhé až n-té rovnice systému (5.11).

[1] Uvedená konvence je přirozeným rozšířením rovnosti $\prod\limits_{j=m}^{k} \alpha_j = \alpha_k \prod\limits_{j=m}^{k-1} \alpha_j$, která platí pro libovolné $k > m$, také pro $k = m$.

Nechť nejprve je n sudé. V tomto případě lze rovnost (5.13) přepsat na tvar

$$x^*_{2k-1} = x^*_{n-(2(\frac{n}{2}-k)+1)} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-k} \frac{d_{n-2i}}{q_{n-2_i}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n}{2}-k} \frac{p_{n-2j}}{q_{n-2j}} = \sum_{i=k}^{\frac{n}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}.$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ s lichými indexy jsou kladné. Pro jeho první souřadnici platí

$$x^*_1 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{5.14}$$

Z první rovnice systému (5.11) nyní dostaneme

$$x^*_2 = \frac{r - ax^*_1}{p_1},$$

a ze druhé rekurentní formule (5.12)

$$x^*_4 = \frac{1}{p_3}(q_3 x^*_2 - d_3) = \frac{q_3}{p_3}\frac{r - ax^*_1}{p_1} - \frac{d_3}{p_3},$$

$$x_6 = \frac{1}{p_5}(q_5 x^*_4 - d_5) = \frac{q_5}{p_5}\frac{q_3}{p_3}\frac{r - ax^*_1}{p_1} - \frac{q_5}{p_5}\frac{d_3}{p_3} - \frac{d_5}{p_5},$$

atd. Obecně

$$x^*_{2k} = \frac{r - ax^*_1}{p_1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_{2i+1}}{p_{2i+1}} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{2i+1}}{p_{2i+1}} \prod_{j=i+1}^{k-1} \frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}.$$

Souřadnice x^*_1 je vyjádřena formulí (5.14). Tedy platí

$$\begin{aligned} x^*_n = x^*_{2\frac{n}{2}} &= \frac{r - ax^*_1}{p_1} \prod_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{q_{2\ell+1}}{p_{2\ell+1}} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{p_{2i+1}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}} = \\ &= \left(\prod_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{q_{2\ell+1}}{p_{2\ell+1}} \right) \left(\frac{r - ax^*_1}{p_1} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{p_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{p_1} \prod_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{q_{2\ell+1}}{p_{2\ell+1}} \right) \left(r - a \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}} - p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} \right). \end{aligned}$$

Nutnou a dostatečnou podmínkou pro to, aby všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ byly kladné, je tedy podle tvrzení (i) a (ii) nerovnost

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + a \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{5.15}$$

Nechť nyní je n liché. V tomto případě lze rovnost (5.13) přepsat na tvar

$$x_{2k}^* = x_{n-(2(\frac{n-1}{2}-k)+1)} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \frac{d_{n-2i}}{q_{n-2i}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n-1}{2}-k} \frac{p_{n-2j}}{q_{n-2j}} = \sum_{i=k}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}},$$
$$k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}.$$

Z něho je vidět, že všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ se sudými indexy jsou kladné. Zejména jeho druhá souřadnice je

$$x_2^* = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}. \tag{5.16}$$

Je-li $a \neq 0$, dostaneme z první rovnice systému (5.11)

$$x_1^* = \frac{r - p_1 x_2^*}{a},$$

ze druhé rekurentní formule (5.12) nyní můžeme postupně vyjádřit

$$x_3^* = \frac{1}{p_2}\left(q_2 x_1^* - d_2\right) = \frac{q_2}{p_2} \frac{r - p_1 x_2^*}{a} - \frac{d_2}{p_2},$$
$$x_5^* = \frac{1}{p_4}\left(q_4 x_3^* - d_4\right) = \frac{q_4}{p_4} \frac{q_2}{p_2} \frac{r - p_1 x_2^*}{a} - \frac{q_4}{p_4} \frac{d_2}{p_2} - \frac{d_4}{p_4},$$

atd. Obecně dostaneme

$$x_{2k-1}^* = \frac{r - p_1 x_2^*}{a} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_{2i}}{p_{2i}} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{2i}}{p_{2i}} \prod_{j=i+1}^{k-1} \frac{q_{2j}}{p_{2j}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}.$$

Odtud s využitím (5.16) vyjádříme

$$\begin{aligned} x_n^* = x_{2\frac{n+1}{2}-1}^* &= \frac{r - p_1 x_2^*}{a} \prod_{\ell=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_{2\ell}}{p_{2\ell}} - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i}}{p_{2i}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_{2j}}{p_{2j}} = \\ &= \left(\frac{1}{a} \prod_{\ell=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_{2\ell}}{p_{2\ell}}\right) \left(r - p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} - a \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}\right). \end{aligned}$$

Pro liché n a $a \neq 0$ tedy dostáváme jako nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ byly kladné, nerovnost

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + a \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{5.17}$$

Pokud je n liché a $a = 0$, dostaneme z první rovnice systému (5.11) rovnost

$$x_2^* = \frac{r}{p_1}.$$

Současně však musí platit rovnost (5.16), takže soustava rovnic (5.11) má řešení (a to nekonečně mnoho řešení; stacionární bod není v takovém případě izolovaný) pouze tehdy, když

$$r = p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

Pravděpodobnost, že tato rovnost bude splněna pro systém (5.10) modelující reálné společenstvo, je však nulová.

Povšimněme si ještě, že nerovnosti (5.15) a (5.17) lze zapsat jednotně ve tvaru

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + a \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{5.18}$$

Závěr: Je-li $a > 0$ (základní zdroj je omezený, v populaci producenta je vnitropopulační konkurence), pak vnitřní stacionární bod systému (5.10) existuje (je možná koexistence všech populací tvořících trofický řetězec) právě tehdy, když je splněna podmínka (5.18) (vnitřní koeficient růstu producenta je dostatečně velký).

Je-li $a = 0$ (základní zdroj je neomezený), pak vnitřní stacionární bod systému (5.10) existuje pouze pro sudé n (je možná koexistence pouze sudého počtu trofických úrovní); vnitřní stacionární bod v takovém případě existuje právě tehdy, když je splněna podmínka

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

Stabilita vnitřního stacionárního bodu

Matice interakcí a vektor růstových koeficientů jsou

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -q_2 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -q_{n-1} & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -q_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} r \\ -d_2 \\ -d_3 \\ \vdots \\ -d_{n-1} \\ -d_n \end{pmatrix}.$$

Položme

$$c_1 = 1,\ c_2 = \frac{p_1}{q_2},\ c_3 = \frac{p_1 p_2}{q_2 q_3},\ \ldots,\ c_{n-1} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_{n-2}}{q_2 q_3 \cdots q_{n-1}},\ c_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}{q_2 q_3 \cdots q_n}.$$

Pak je

$$\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\,\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -p_1 & 0 & \dfrac{p_1p_2}{q_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{p_1p_2}{q_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{p_1p_2\cdots p_{n-2}}{q_2q_3\cdots q_{n-2}} & 0 & \dfrac{p_1p_2\cdots p_{n-1}}{q_2q_3\cdots q_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{p_1p_2\cdots p_{n-1}}{q_2q_3\cdots q_{n-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

takže

$$\mathcal{S}\,(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\,\mathsf{A}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z čehož plyne

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T\, \mathcal{S}(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\,\mathsf{A})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) = a(x_1 - x_1^*)^2 \geq 0.$$

Pokud existuje vnitřní stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ uvažovaného systému, pak je příslušné konstantní řešení stejnoměrně stabilní.

Podle Poznámky 13 je derivace ljapunovské V funkce vzhledem k systému (5.1) rovna

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -a(x_1 - x_1^*)^2.$$

Je-li $a = 0$ (zdroje pro primárního producenta, tj. pro populaci na nejnižší trofické úrovni, jsou neomezené), pak je $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$ pro všechna $\boldsymbol{x}$ z fázového prostoru systému (5.1).

Nechť $a > 0$. Stejnoměrnou asymptotickou stabilitu stacionárního řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ v tomto případě ukážeme podle Důsledku 8 Věty 21. Máme

$$M = \left\{\boldsymbol{x} : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\right\} = \{\boldsymbol{x} : x_1 - x_1^* = 0\}\,.$$

Položíme-li $F(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_1^*$, je

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

takže pro $\boldsymbol{x} \in M$ platí

$$\dot{F}(\boldsymbol{x}) = x_1^*(r - ax_1^*) - p_1x_1^*x_2 = x_1^*(r - ax_1^* - p_1x_2).$$

Připomeňme, že pro první dvě souřadnice vnitřního stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ podle (5.11) platí

$$r - ax_1^* - p_1x_2^* = 0.$$

Celkem tak dostáváme, že $\dot{F}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ pro $\boldsymbol{x} \in M \smallsetminus \{\boldsymbol{x}^*\}$, což znamená, že stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Tento výsledek můžeme přeformulovat tak, že vnitrodruhová konkurence na nejnižší trofické úrovni (omezení zdrojů) stabilizuje společenstvo.

5.6 Společenstvo se dvěma trofickými úrovněmi

Uvažujme společenstvo tvořené dvěma skupinami druhů — producenty (kořistí) a konzumenty (predátory). Mezi druhy uvnitř jednotlivých trofických úrovní nejsou žádné interakce a konzumenti nemohou bez producentů přežít. Je-li takové společenstvo tvořeno n druhy producentů a m druhy konzumentů, lze jeho vývoj popsat systémem Lotkových-Volterrových rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\left(r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k\right), \qquad i = 1,2,\dots,n,\\ y_j' &= y_j\left(-s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right), \quad j = 1,2,\dots,m; \end{aligned} \tag{5.19}$$

x_i označuje velikost i-tého druhu producentů, y_j velikost j-tého druhu konzumentů, parametry r_i, s_j, a_{ij}, b_{ji} jsou kladné. Systém (5.19) můžeme při zavedení vektorů $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m)^T$, a matic

$$\mathsf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = (b_{ji})_{\substack{1\le j\le m\\1\le i\le n}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

zapsat vektorově

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \operatorname{diag}\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{r} - \mathsf{A}\boldsymbol{y}),\\ \boldsymbol{y}' &= \operatorname{diag}\boldsymbol{y}\,(-\boldsymbol{s} + \mathsf{B}\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

nebo ve tvaru

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}' = \operatorname{diag}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ -\boldsymbol{s}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{A}\\ \mathsf{B} & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}\right],$$

kde O označuje nulovou matici.

Příklad: klasický Lotkův-Volterrův systém dravec-kořist

Uvažujme společenstvo jednoho producenta a jednoho konzumenta (jednoho dravce a jeho kořisti). V takovém případě je $n = m = 1$ a systém (5.19) je tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x(r - ay),\\ y' &= y(-s + bx). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Tento systém má vnitřní stacionární bod

$$(p, q) = \left(\frac{s}{b}, \frac{r}{a}\right).$$

Systém (5.20) můžeme přepsat na tvar

$$\begin{aligned} \frac{x'}{x} &= r - ay, \\ \frac{y'}{y} &= -s + bx, \end{aligned} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln x &= r - ay,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln y &= -s + bx. \end{aligned}$$

Při označení $u = \ln x$, $v = \ln y$ dostaneme

$$\begin{aligned} u' &= r - a\mathrm{e}^v, \\ v' &= -s + b\mathrm{e}^u, \end{aligned}$$

což je systém bipartitní. Bezprostředně vidíme, že tento systém můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial}{\partial v}\left(rv - a\mathrm{e}^v\right), \\ v' &= -\frac{\partial}{\partial u}\left(su - b\mathrm{e}^u\right), \end{aligned}$$

nebo vektorově

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla\left(su - b\mathrm{e}^u + rv - a\mathrm{e}^v\right). \tag{5.21}$$

Systém (5.20) je tedy ekvivalentní s hamiltonovským systémem (5.21). Jeho hamiltonián (invariant) v původních proměnných je

$$\begin{aligned} H(x,y) = s\ln x - bx + r\ln y - ay = b\left(\frac{s}{b}\ln x - x\right) + a\left(\frac{r}{a}\ln y - y\right) = \\ = b\left((p\ln x - x) + \frac{a}{b}(q\ln y - y)\right). \end{aligned}$$

Transformace systému (5.19) na systém bipartitní

Stavové proměnné x_i, y_j transformujeme na nové, které označíme u_i, v_j a definujeme rovnostmi

$$u_i = \ln x_i, \quad v_j = \ln y_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.22}$$

Pak

$$u_i' = \frac{x_i'}{x_i} = r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k = r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\mathrm{e}^{v_k}, \qquad v_j' = -s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\mathrm{e}^{u_k}.$$

Zavedeme označení

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{u}} = \left(\mathrm{e}^{u_1}, \mathrm{e}^{u_2}, \ldots, \mathrm{e}^{u_n}\right), \qquad \mathrm{e}^{\boldsymbol{v}} = \left(\mathrm{e}^{v_1}, \mathrm{e}^{v_2}, \ldots, \mathrm{e}^{v_m}\right).$$

Systém (5.19) se transformuje na tvar

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{r} - \mathsf{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{v}}, \qquad \boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{s} + \mathsf{B}\mathrm{e}^{\boldsymbol{u}}; \tag{5.23}$$

derivace první sady proměnných závisí pouze na druhé sadě, derivace druhé sady proměnných závisí pouze na první sadě. Systém (5.19) lze tedy substitucí (5.22) transformovat na systém bipartitní.

Invariant systému (5.19)

Hodnota a_{ij} vyjadřuje množství i-tého druhu kořisti, kterou za jednotku času zničí predátoři j-tého druhu za předpokladu, že populace i-tého druhu kořisti i j-tého druhu predátora měly jednotkovou velikost. Stručněji, a_{ij} je specifická úmrtnost i-tého druhu kořisti způsobená populací j-tého druhu predátora o jednotkové velikosti. Hodnota b_{ji} je specifická porodnost

j-tého druhu predátora po konzumaci jednotkového množství populace i-tého druhu kořisti. Poměr b_{ji}/a_{ij} lze tedy chápat jako efektivitu, s jakou se úbytek i-tého druhu kořisti přeměňuje do růstu populace j-tého druhu predátora. Předpokládejme nyní, že každý druh predátora využívá všechny druhy kořisti stejně efektivně, tj. že ke každému $j = 1, 2, \dots, m$ existuje konstanta $c_j > 0$ taková, že

$$\frac{b_{ji}}{a_{ij}} = c_j \quad \text{pro všechny indexy } i = 1, 2, \dots, n.$$

Jinak řečeno, nechť existuje vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T$ pro nějž platí

$$\mathsf{B}^T = \mathsf{A}\ \mathrm{diag}\, \boldsymbol{c}, \quad \text{neboli} \quad \mathsf{B} = \mathrm{diag}\, \boldsymbol{c}\, \mathsf{A}^T. \tag{5.24}$$

Předpokládejme dále, že existuje vnitřní stacionární bod systému (5.19), tj. že existují vektory $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T$ se všemi složkami kladnými, takové že $\mathsf{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$, $\mathsf{B}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s}$, tj.

$$r_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} q_k \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \qquad s_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} p_k \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, m. \tag{5.25}$$

Poznamenejme, že v případě $m \neq n$ nemusí být některý z vektorů $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ určen jednoznačně. Pak vnitřní stacionární bod není izolovaný.

Definujme nyní funkci $H : \mathbb{R}_+^{n+m} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = H(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} (p_i \ln x_i - x_i) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} (q_j \ln y_j - y_j).$$

Pokud $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou řešením systému (5.19), která mají všechny složky v každém čase kladné, pak platí

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \frac{x_i'}{x_i} - x_i' \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} \left(q_j \frac{y_j'}{y_j} - y_j' \right) = \sum_{i=1}^{n} (p_i - x_i) \frac{x_i'}{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} (q_j - y_j) \frac{y_j'}{y_j} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_i - x_i) \left(r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} \left(-s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \right) (q_j - y_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_i - x_i) \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} q_k - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} \left(-\sum_{k=1}^{n} b_{jk} p_k + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \right) (q_j - y_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (p_i - x_i) a_{ik} (q_k - yk) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (p_k - x_k) \frac{b_{jk}}{c_j} (q_j - y_j) = 0,
\end{aligned}$$

neboť $b_{jk}/c_j = a_{kj}$. Jinak řečeno, funkce H je na trajektoriích systému (5.19) konstantní, je invariantem (prvním integrálem) tohoto systému.

Transformace systému (5.19) na hamiltonovský

Opět použijeme transformaci (5.22) a s využitím vztahů (5.25) vyjádříme transformovaný systém (5.23) jako $\boldsymbol{u}' = \mathsf{A}(\boldsymbol{q} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{v}})$, $\boldsymbol{v}' = -\mathsf{B}(\boldsymbol{p} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{u}})$. Podmínka (5.24) nyní umožňuje přepsat tento systém ve tvaru

$$\boldsymbol{u}' = \mathsf{A}(\boldsymbol{q} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{v}}), \qquad \boldsymbol{v}' = -(\mathsf{A} \cdot \mathrm{diag}\, \boldsymbol{c})^T (\boldsymbol{p} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{u}}). \tag{5.26}$$

Invariant H systému (5.19) vyjádříme také v proměnných $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$,

$$H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n}(p_i u_i - \mathrm{e}^{u_i}) + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{c_j}(q_j v_j - \mathrm{e}^{v_j}).$$

Platí

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = p_i - \mathrm{e}^{u_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial v_j}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{c_j}(q_j - \mathrm{e}^{v_j}), \qquad i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,m.$$

Při označení $\nabla_{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_n}\right)^T$, $\nabla_{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v_m}\right)^T$ tedy je

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{u}}, \qquad \nabla_{\boldsymbol{v}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\operatorname{diag}\boldsymbol{c})^{-1}(\boldsymbol{q} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{v}}),$$

takže systém (5.26) je tvaru

$$\boldsymbol{u}' = \mathsf{A}\operatorname{diag}\boldsymbol{c}\,\nabla_{\boldsymbol{v}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{v}' = -(\mathsf{A}\operatorname{diag}\boldsymbol{c})^T\,\nabla_{\boldsymbol{u}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),$$

neboli

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{A}\operatorname{diag}\boldsymbol{c}\\ -(\mathsf{A}\operatorname{diag}\boldsymbol{c})^T & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{u}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\\ \nabla_{\boldsymbol{v}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\end{pmatrix},$$

symbol O označuje nulovou matici. Pokud tedy platí (5.24) a existuje vnitřní stacionární bod systému (5.19), lze tento systém transformovat na systém hamiltonovský.

Modely společenstev tvořených producenty a jejich konzumenty, které mají vnitřní stacionární bod a splňují podmínku (5.24)*, mají v populační ekologii podobný význam jako Newtonovy zákony v mechanice* (srov. 4.3).

5.7 Grossbergovy systémy (zobecněné Lotkovy-Volterrovy)

Vlivy populací tvořících společenstvo na růst jednotlivých populací nemusí být tvaru přímé úměrnosti. Proto může být realističtější místo systému (5.1) uvažovat systém

$$x_i' = g_i(x_i)\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j)\right), \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{5.27}$$

Funkce f_i, g_i, $i = 1,2,\ldots,n$ jsou definovány a spojité na intervalu $[0,\infty)$ a splňují podmínky:

- $(\forall i) g_i(0) = 0$ … je-li velikost i-té populace nulová (tj. i-tá populace ve společenstvu není), pak nulovou zůstane; uvažujeme tedy izolovaná společenstva, kde nedochází k imigraci nových druhů.
- $(\forall i)(\forall \xi > 0) g_i(\xi) > 0$ … skutečnost, zda je i-tá populace soběstačná nebo ne, nezávisí na její velikosti; neuvažujeme tedy např. Alleeho efekt.
- $(\forall j) f_j(0) = 0$ … není-li j-tá populace ve společenstvu přítomná, nijak neovlivňuje růst ostatních populací.

- $(\forall j) f_j$ je rostoucí ... s rostoucí velikostí populace roste i její vliv na růst populací ostatních.

Systém (5.27) lze zapsat vektorově:

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{G}(\boldsymbol{x})\big(\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big),$$

kde

$$\mathsf{G}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{G}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{diag}\big(g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)\big),$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)\big)^T.$$

Poněvadž všechny složky zobrazení $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou rostoucí (tedy prosté) funkce, je toto zobrazení prosté a existuje k němu zobrazení inverzní $\boldsymbol{f}^{-1} = (f_1^{-1}, f_2^{-1}, \dots, f_n^{-1})$. Je-li matice interakcí společenstva A regulární, existuje nejvýše jeden vnitřní stacionární bod

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \boldsymbol{f}^{-1}\left(\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\right)$$

systému (5.27), tj. takový bod, že $x_1^* > 0, x_2^* > 0, \dots, x_n^* > 0$, který lze opět interpretovat jako dynamicky stálé velikosti všech populací koexistujících ve společenstvu.

Analogicky jako v důkazu věty 23 ověříme, že pokud existuje okolí U vnitřního stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ a existuje konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ se všemi složkami kladnými, pro něž je výraz

$$\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)^T \mathcal{S}(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\,\mathsf{A})\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\right)$$

nezáporný pro každé $\boldsymbol{x} \in U$, pak je funkce

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{f_i(\xi) - f_i(x_i^*)}{g_i(\xi)} \mathrm{d}\xi$$

ljapunovskou funkcí systému (5.27) ve stacionárním bodě $\boldsymbol{x}^*$. Odtud je vidět, že tvrzení důsledku 9 platí také pro systém (5.27).

Kapitola 6

Model populace produkující škodlivé odpady

Označme $N = N(t)$ velikost nějaké populace v čase t. *Specifická míra růstu* nebo *růstový koeficient* p této populace je definován jako relativní změna velikosti populace, tj.

$$p = \frac{N'}{N}.$$

Vývoj populace je tedy modelován diferenciální rovnicí

$$N' = pN. \tag{6.1}$$

V případě konstantního růstového koeficientu dostaneme klasický Malthusův[1] model růstu populace $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{pt}$, kde $N_0 = N(0)$ je počáteční velikost populace. V něm je exponenciální růst (pro $p > 0$) nebo úbytek (pro $p < 0$) velikosti populace nerealistický.

Model (6.1) se přiblíží realitě, pokud specifickou míru růstu p nebudeme považovat za nezávislou konstantu populace, ale za veličinu závislou na její velikosti, tedy $p = p(N)$, nebo obecněji na nějakých „projevech" její velikosti, tj. $p = p\big(\mathcal{F}(N)\big)$, kde $\mathcal{F}$ je nějaký funkcionál, tedy zobrazení z množiny funkcí do množiny reálných čísel.

V tomto oddílu budeme uvažovat populaci, která produkuje odpady svého metabolismu, které jsou toxické, nebo přinejmenším zmenšují schopnost přežívání populace. Tyto odpady se v prostředí hromadí, ale také rozkládají, mizí nebo přeměňují v něco, co populaci neomezuje. Budeme tedy předpokládat:

1. V čistém prostředí (bez uvažovaných odpadů) je specifická míra růstu rovna nějaké konstantě r (*vnitřnímu koeficientu růstu, intrinsic growth rate*).

2. V každém okamžiku populace produkuje odpad, jehož množství je úměrné velikosti populace. Množství odpadu vyprodukovaného v čase t označíme $P_p(t)$; platí pro něho $P_p(t) = cN(t)$, kde c je nějaká kladná konstanta.

3. Odpad se rozkládá konstantní relativní rychlostí $\delta > 0$, tj. označíme-li $P(t)$ množství odpadu v čase t a neuvažujeme jeho produkci, platí

$$P'(t) = -\delta P(t). \tag{6.2}$$

[1] Správněji malthusovský, Thomas Robert Malthus (1766–1834) model v takovém tvaru nikdy nepublikoval.

4. Specifická míra růstu populace klesá s rostoucím množstvím odpadu. Budeme uvažovat nejjednodušší možnost, že tato závislost je lineární.

5. Existuje jistá velikost populace $K > 0$, při které je populace se svým prostředím v dynamické rovnováze, její velikost se v čase nemění. Konstanta K představuje *kapacitu prostředí* (*úživnost*) pro uvažovanou populaci.

Uvažujme na chvíli idealizovanou situaci, že pouze v čase s vzniklo množství $P_p(s)$ odpadu a žádný další odpad není do prostředí dodáván. Množství odpadu v čase $t > s$ tedy bude podle předpokladů 2. a 3. řešením rovnice (6.2) s počáteční podmínkou $P(s) = P_p(s) = cN(s)$, tj. $P(t) = cN(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}$. V reálné situaci se však odpad v prostředí kumuluje, v čase t ho tedy bude množství, které zůstalo ze všech odpadů vzniklých až do okamžiku t, tj. množství odpadu závislé na celé předchozí historii velikosti populace bude

$$\mathcal{F}(N) = \int_{-\infty}^{t} cN(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s.$$

Předpoklad 4. lze nyní přepsat ve tvaru

$$p = p\big(\mathcal{F}(N)\big) = \alpha - \beta\mathcal{F}(N),$$

kde $\beta > 0$. Z předpokladu 1. plyne, že $p(0) = r$, tj. $\alpha = r$. Pro funkci $\tilde{N} = \tilde{N}(t) \equiv K$ podle předpokladu 5. nyní platí

$$0 = p\big(\mathcal{F}(\tilde{N})\big) = r - \beta\mathcal{F}(\tilde{N}) = r - \beta c \int_{-\infty}^{t} K\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s = r - \frac{\beta cK}{\delta}\left[\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\right]_{s=-\infty}^{t} = r - \frac{\beta cK}{\delta}.$$

Odtud dostaneme, že $\beta c = \dfrac{r\delta}{K}$ a specifická míra růstu populace je

$$p = r\left(1 - \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{t} N(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s\right).$$

Model (6.1) je tedy nyní ve tvaru integrodiferenciální[2] rovnice

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{t} N(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s\right). \tag{6.3}$$

Zavedeme nové neznámé funkce x a y novou nezávisle proměnnou τ následujícími vztahy:

$$\tau = rt, \quad x(\tau) = \frac{\delta}{rK}N\left(\frac{\tau}{r}\right), \quad y(\tau) = \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s.$$

[2]V této rovnici vystupuje neznámá funkce N za znakem integrálu i jako derivovaná.

Pak

$$x'(\tau) = \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\delta}{rK}N'\left(\frac{\tau}{r}\right)\frac{1}{r} = \frac{\delta}{r^2K}rN\left(\frac{\tau}{r}\right)\left(1 - \frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \frac{\delta}{rK}\frac{rK}{\delta}x(\tau)\left(1 - \frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s\right) = x(\tau)\big(1-y(\tau)\big),$$

$$y'(\tau) = \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\delta}{K}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{\delta}{K}\left(\frac{1}{r}N\left(\frac{\tau}{r}\right)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-\frac{\tau}{r}\right)} - \frac{\delta}{r}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \frac{\delta}{rK}N\left(\frac{\tau}{r}\right) - \frac{\delta}{r}\frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s = x(\tau) - \frac{\delta}{r}y(\tau).$$

Rovnice (6.3) se tedy transformuje na dvourozměrný autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= x(1-y),\\ y' &= x - \frac{\delta}{r}y. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Nejprve si všimněme, že uzavřený první kvadrant $\bar{\mathbb{R}}^2_+ = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0, y\geq 0\big\}$ je pozitivně invariantní množinou tohoto systému. Uzavřená polopřímka $\{(0,y) : y\geq 0\}$ je totiž pozitivně invariantní množinou ($x(t)\equiv 0$, $y(t) = y_0\mathrm{e}^{-(\delta/r)t}$ je řešením systému (6.4) pro každé $y_0\geq 0$), pro řešení s počáteční podmínkou $x(0)=x_0>0$, $y(0)=0$ platí $x'(0)>0$, $y'(0)>0$ a tedy příslušná trajektorie směřuje dovnitř prvního kvadrantu.

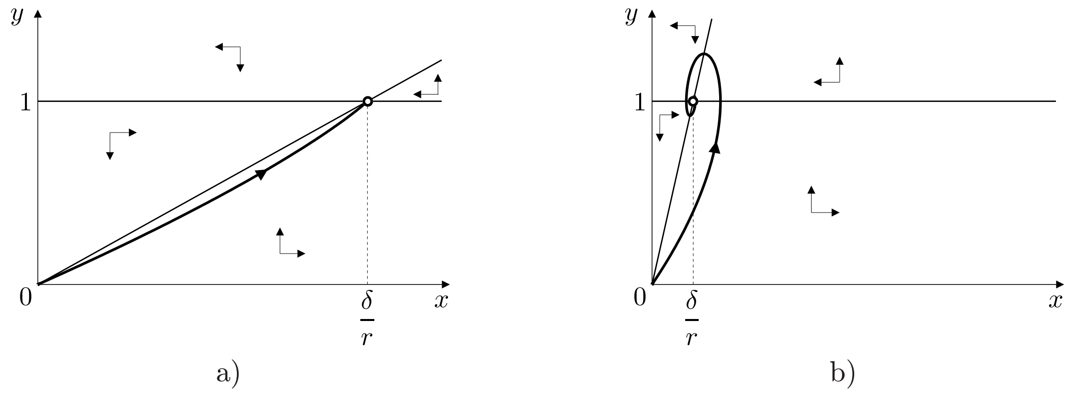
Systém (6.4) má stacionární body$(0,0)$ a $(x^*,y^*) = \left(\frac{\delta}{r},1\right)$ a jeho variační matice je

$$\mathsf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x\\ 1 & -\frac{\delta}{r}\end{pmatrix}.$$

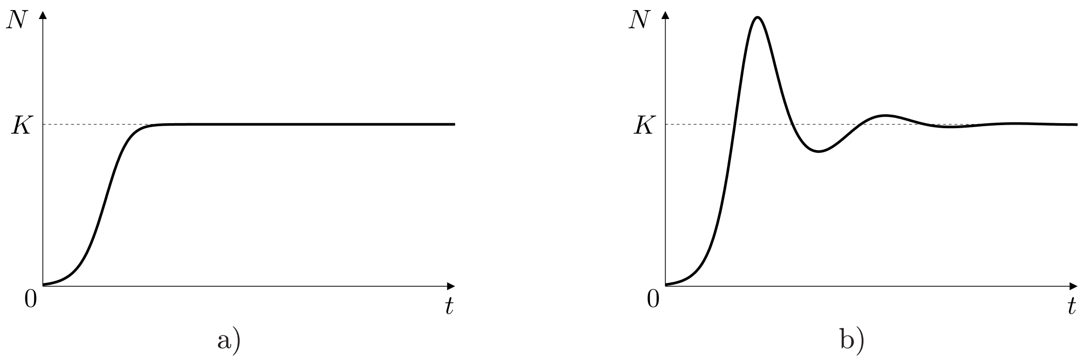
Tedy $\mathsf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & -\frac{\delta}{r}\end{pmatrix}$, $\det\mathsf{J}(0,0) = -\frac{\delta}{r} > 0$, takže stacionární bod $(0,0)$ je sedlo. Dále

$$\mathsf{J}(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\delta}{r}\\ 1 & -\frac{\delta}{r}\end{pmatrix}, \quad \det\mathsf{J}(x^*,y^*) = \frac{\delta}{r} > 0, \quad \operatorname{tr}\mathsf{J}(x^*,y^*) = -\frac{\delta}{r} < 0,$$

$$\big(\operatorname{tr}\mathsf{J}(x^*,y^*)\big)^2 - 4\det\mathsf{J}(x^*,y^*) = \frac{\delta}{r^2}(\delta-4r),$$



Obrázek 6.1: Fázový portrét systému (6.4) a jeho trajektorie s počáteční podmínkou $0 < x(0) \ll 1$, $y(0) = 0$. a) $\delta \geq 4r$, b) $\delta < 4r$. Oba obrázky mají stejné měřítko na ose x.



Obrázek 6.2: Průběh řešení úlohy (6.3), (6.5). a) $\delta = 4r$, b) $\delta = \frac{1}{2}r$.

takže v případě $\delta \geq 4r$ je vnitřní stacionární bod (x^*, y^*) stabilní uzel, v opačném případě se jedná o stabilní ohnisko. Fázové portréty systému systému (6.4) v obou případech jsou znázorněny na obr. 6.1.

S využitím Dulacova kriteria (věta 12) vyloučíme existenci cyklu v prvním kvadrantu. Položíme $q(x,y) = \dfrac{1}{x}$. Pak

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x}x(1-y) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x}\left(x - \frac{\delta}{r}y\right) = -\frac{\delta}{rx} < 0$$

pro všechna $x > 0$. Uvnitř prvního kvadrantu tedy neexistuje cyklus systému (6.4).

Uvažujme nyní situaci, že na počátku (v čase $t = 0$) se dostane malá populace do nového prostředí. K rovnici (6.3) přidáme tedy počáteční podmínky

$$N(0) = N_0, \qquad N(t) = 0 \text{ pro } t < 0. \tag{6.5}$$

Počáteční podmínky pro systém (6.4) v tomto případě budou

$$x(0) = \frac{\delta}{rK}N_0, \qquad y(0) = \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{0} N(s)\mathrm{e}^{\delta s}\mathrm{d}s = 0;$$

Trajektorie systému (6.4) s těmito počátečními podmínkami jsou také zobrazeny na obr. 6.1. Z provedené analýzy systému (6.4) plyne, že pro řešení N počáteční úlohy (6.3), (6.5) platí

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{rK}{\delta} x^* = K;$$

funkce N konverguje k hodnotě K v případě $\delta \geq 4r$ monotonně, viz obr. 6.2 a), v opačném případě s tlumenými oscilacemi, viz obr. 6.2 b).

Kapitola 7

Chemická kinetika

7.1 Základní reakce enzymů

Uvažujme reakci nějakého substrátu S a enzymu E, které spolu vytvoří nestabilní komplex SE, z kterého dále vznikne nějaký produkt P a volný enzym.[1] Schematicky tuto reakci můžeme zapsat takto

$$S+E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE, \qquad SE \overset{k_2}{\to} P+E,$$

nebo stručně

$$S+E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE \overset{k_2}{\to} P+E.$$

Dvojitá šipka $\rightleftharpoons$ vyjadřuje, že reakce je vratná, jednoduchá šipka $\to$ vyjadřuje, že reakce může probíhat jen jedním směrem. Kladné parametry k_1, k_{-1}, k_2 označují reakční rychlost. Zhruba řečeno, za jednotku času vznikne z jednotkového množství substrátu S za přítomnosti jednotkového množství enzymu E množství k_1 komplexu SE a podobně. Přesně budou reakční rychlosti zavedeny dále.

Označme $s=s(t)\dots$ koncentrace substrátu S v čase t,
$e=e(t)\dots$ koncentrace enzymu E v čase t,
$c=c(t)\dots$ koncentrace komplexu SE v čase t,
$p=p(t)\dots$ koncentrace produktu P v čase t.

Michaelis a Menten[2] navrhli jako model vývoje koncentrací v čase následující systém čtyř obyčejných nelineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= -k_1se + k_{-1}c,\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= -k_1se + (k_{-1}+k_2)c,\\
\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} &= k_1se - (k_{-1}+k_2)c,\\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= k_2c
\end{aligned} \tag{7.1}$$

[1] Místo o enzymu bychom mohli mluvit o katalyzátoru, substrát by představoval výchozí látku a produkt výslednou.

[2] L. Michaelis, M. I. Menten. Die Kinetik der Invertinwirkung. *Biochem. Z.* **49**, 333-369, 1913

Tento model vyjadřuje, že změny koncentrací považujeme za přímo úměrné koncentracím, reakční rychlosti k jsou příslušné koeficienty úměrnosti. Budeme předpokládat, že na počátku je koncentrace substrátu rovna s_0 a koncentrace enzymu je rovna e_0, komplex SE ani produkt P nejsou na počátku přítomny. Spolu se systémem (7.1) tedy uvažujeme počáteční podmínky

$$s(0) = s_0, \quad e(0) = e_0, \quad c(0) = 0, \quad p(0) = 0. \tag{7.2}$$

Nejprve si všimněme, že veličina p se nevyskytuje v prvních třech rovnicích systému (7.1). Koncentrace s, e a c jsou tedy řešením prvních tří rovnic z (7.1), koncentraci produktu můžeme vyjádřit ze čtvrté rovnice integrací

$$p(t) = k_2 \int_0^t c(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{7.3}$$

Množství enzymu E se v průběhu reakce nemění a enzym se vyskytuje jednak jako volný a jednak jako vázaný v komplexu SE. To vzhledem k počáteční podmínce (7.2) znamená, že by mělo platit $e(t) + c(t) = e_0$ pro všechna $t \geq 0$. Model (7.1) je skutečně v tomto smyslu adekvátní, neboť

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e + c) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = 0, \quad (e + c)(0) = e_0.$$

Veličina $e+c$ je prvním integrálem systému (7.1) a proto koncentraci enzymu můžeme vyjádřit jako

$$e(t) = e_0 - c(t) \tag{7.4}$$

a dosadit do první a třetí rovnice systému (7.1). Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -k_1e_0s + (k_1s + k_{-1})c, \qquad \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = k_1e_0s - (k_1s + k_{-1} + k_2)c. \tag{7.5}$$

Časový průběh koncentrací substrátu S a komplexu SE je tedy řešením systému dvou obyčejných autonomních nelineárních diferenciálních rovnic (7.5) s počáteční podmínkou

$$s(0) = s_0, \quad c(0) = 0, \tag{7.6}$$

průběh koncentrací volného enzymu E a produktu P je dána výrazy (7.4) a (7.3).

Změníme měřítko tak, aby všechny veličiny byly bezrozměrné, tj. zavedeme substituci

$$\tau = k_1e_0t, \qquad x = \frac{s}{s_0}, \qquad y = \frac{c}{e_0}; \tag{7.7}$$

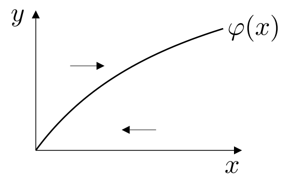
veličina x vyjadřuje koncentraci substrátu a veličina y koncentraci komplexu SE v jednotkách počáteční koncentrace substrátu a enzymu. Časová jednotka je určena rychlostí reakce substrátu a enzymu. Platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{s}{s_0}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{s_0}\big(-k_1e_0s + (k_1s + k_{-1})c\big)\frac{1}{k_1e_0} = -\frac{s}{s_0} + \frac{c}{e_0}\frac{s}{s_0} + \frac{k_{-1}}{s_0k_1}\frac{c}{e_0} = \\ = -x + \left(x + \frac{k_{-1}}{k_1s_0}\right)y,\end{aligned}$$

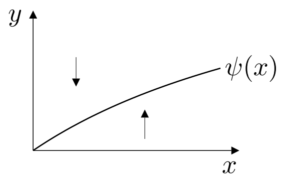
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c}{e_0}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{e_0}\big(k_1e_0s - (k_1s + k_{-1} + k_2)c\big)\frac{1}{k_1e_0} = \frac{s}{e_0} - \frac{s}{e_0}\frac{c}{e_0} - \frac{k_{-1}+k_2}{k_1e_0}\frac{c}{e_0} =$$
$$= \frac{s_0}{e_0}x - \frac{s_0}{e_0}\left(x + \frac{k_{-1}+k_2}{k_1s_0}\right)y.$$

Při označení
$$K = \frac{k_{-1}+k_2}{k_1s_0}, \qquad \lambda = \frac{k_2}{k_1s_0}, \qquad \varepsilon = \frac{e_0}{s_0} \tag{7.8}$$
se systém (7.5) substitucí (7.7) transformuje na systém
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -x + (x + K - \lambda)y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\big(x - (x+K)y\big) \tag{7.9}$$
s počátečními podmínkami
$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \tag{7.10}$$
Poznamenejme, že parametry K, λ a ε jsou kladné a $K > \lambda$.

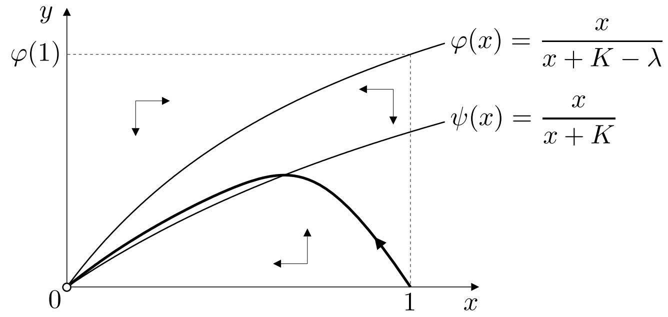
Úlohu (7.9), (7.10) nelze řešit explicitně. Proto ji budeme analyzovat ve fázovém prostoru. Nulklinu proměnné x můžeme vyjádřit jako graf funkce
$$\varphi(x) = \frac{x}{x + K - \lambda}.$$



Derivace $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$ je pro $y > \varphi(x)$ kladná, pro $y < \varphi(x)$ záporná. Situace je znázorněna na obrázku:



Podobně vyjádříme y-nulklinu jako graf funkce $\psi(x) = \dfrac{x}{x+K}$ a vyšetříme znaménka derivací:
Poněvadž $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ a $\varphi(x) > \psi(x)$ pro všechna $x > 0$, vypadá fázový portrét systému (7.9) tak, jak je znázorněno na obr. 7.1 Vidíme, že systém (7.9) má jediný stacionární bod $(0,0)$ a že množina $M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \varphi(1)\big\}$ je jeho pozitivně invariantní množinou (na úsečce $\{(x,0) : 0 \le x \le 1\}$ směřují trajektorie nahoru, na úsečce $\big\{\big(x,\varphi(1)\big) : 0 \le x \le 1\big\}$ dolů, na úsečce $\{(0,y) : 0 \le v \le \varphi(1)\}$ směřují trajektorie doprava a na úsečce $\{(1,y) : 0 \le v \le \varphi(1)\}$ doleva). Variační matice systému (7.9) v obecném bodě (x,y) je
$$\mathsf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y - 1 & x + K - \lambda \\ \dfrac{1}{\varepsilon}(1-y) & -\dfrac{1}{\varepsilon}(x+K) \end{pmatrix},$$
takže ve stacionárním bodě $(0,0)$ platí
$$\mathsf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & K-\lambda \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & -\dfrac{K}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathsf{J}(0,0) = -\frac{K+\varepsilon}{\varepsilon} < 0, \qquad \det\mathsf{J}(0,0) = \frac{\lambda}{\varepsilon} > 0,$$



Obrázek 7.1: Fázový portrét systému (7.9) a jeho trajektorie s počátečním bodem (7.9) a hodnotou parametru $\varepsilon = \frac{10}{11}$.

$$\left(\operatorname{tr}\mathsf{J}(0,0)\right)^2 - 4\det\mathsf{J}(0,0) = \left(\frac{K+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4\lambda}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left((K+\varepsilon)^2 - 4\lambda\varepsilon\right) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(K^2 + 2K\varepsilon + \varepsilon^2 - 4\lambda\varepsilon + \lambda^2 - \lambda^2\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(K^2 - \lambda^2 + 2K\varepsilon + (\lambda-\varepsilon)^2\right) > 0,$$

neboť $K > \lambda$. Stacionární bod $(0,0)$ je podle Věty 11 stabilní uzel (což bylo vidět z fázového portrétu i bez výpočtů). Pro řešení úlohy (7.9), (7.10) tedy platí

$$\lim_{\tau\to\infty} x(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau\to\infty} y(\tau) = 0.$$

Výsledkem reakce je vyčerpání veškerého substrátu S, nebude volný ani vázaný s enzymem v komplexu SE. Z trajektorie řešení úlohy (7.9), (7.10), která je rovněž zobrazena na obr. 7.1, je také vidět, že složka x řešení této úlohy k nule monotonně klesá. Složka y nejdříve roste, v jistém čase τ_0 dosáhne svého maxima

$$y_{\max} = \frac{x(\tau_0)}{x(\tau_0)+K} = 1 - \frac{K}{x(\tau_0)+K}$$

a pak monotonně klesá k nule.

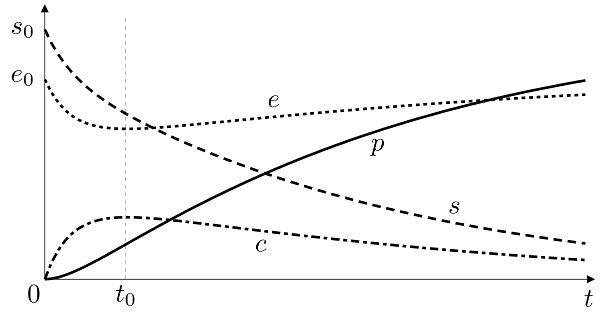
Nyní můžeme kvalitativně popsat řešení původní úlohy (7.1), (7.2), viz obr. 7.2. Koncentrace s substrátu S monotonně klesá k nule. Koncentrace c komplexu SE roste ke své maximální hodnotě, která je menší než byla počáteční koncentrace e_0 enzymu E, a pak monotonně klesá k nule. Koncentrace e volného enzymu E nejprve klesá, v okamžiku t_0, kdy je koncentrace komplexu SE maximální, dosáhne svého minima a pak monotonně roste k počáteční hodnotě e_0. Koncentrace p produktu P roste z nulové hodnoty, růst se nejprve zrychluje (funkce je konvexní), od okamžiku t_0 se začne zpomalovat (funkce je konkávní).

7.2 Přibližné řešení transformované úlohy

Charakteristickým rysem reakcí enzymu se substrátem je to, že koncentrace enzymu je výrazně menší, než koncentrace substrátu, $e_0 \ll s_0$. To vzhledem k (7.8) znamená, že

$$0 < \varepsilon \ll 1,$$

parametr ε je „skoro nula“. Také můžeme říci, že pravá strana druhé rovnice systému (7.9) je „skoro nekonečno“, nebo že pravá strana první rovnice tohoto systému je zanedbatelně malá



Obrázek 7.2: Průběh řešení úlohy (7.1), (7.2)

ve srovnání s pravou stranou druhé rovnice. Veličina x se mění „nesrovnatelně pomaleji“, než veličina y, takže veličina x je vzhledem k y „skoro konstantní“. Z těchto důvodů budeme x ve druhé z rovnic systému (7.9) považovat za konstantní parametr a tuto rovnici vyřešíme. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, takže její řešení splňující druhou podmínku z dvojice (7.10), tj. podmínku $y(0) = 0$, dostaneme ve tvaru

$$y(\tau) = \frac{x}{x+K}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x+K}{\varepsilon}\tau}\right). \tag{7.11}$$

Platí pro ně

$$y_0 = \lim_{\tau\to\infty} y(\tau) = \frac{x}{x+K}.$$

„Rychle se měnící“ proměnná veličina (funkce) y se tedy „velice rychle“ ustálí na hodnotě y_0. Ovšem hodnota x se také mění, i když „pomalu“. Tato změna je popsána první rovnicí systému (7.9). V ní můžeme proměnou y považovat za parametr rovný ustálené hodnotě y_0. S využitím počáteční podmínky (7.10) tak dostaneme počáteční úlohu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -x + (x + K - \lambda)\frac{x}{x+K} = -\lambda\frac{x}{x+K}, \qquad x(0) = 1.$$

Řešení této úlohy, které je „trochu jiné“ než řešení původní úlohy (7.9), (7.10) a proto ho označíme symbolem x_0, je implicitně dáno rovností

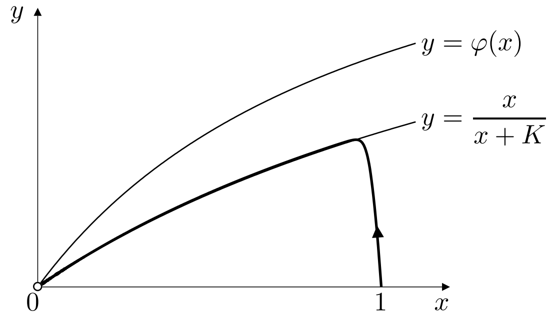
$$x_0(\tau) + K \ln x_0(\tau) = 1 - \lambda\tau. \tag{7.12}$$

Takto definovanou funkci x_0 můžeme považovat za první složku přibližného řešení úlohy (7.9), (7.10). Její druhou složku vyjádříme jako

$$y_0(\tau) = \frac{x_0(\tau)}{x_0(\tau) + K}; \tag{7.13}$$

tato funkce však nesplňuje druhou z počátečních podmínek (7.10).

Funkce $x_0(\,\cdot\,)$, $y_0(\,\cdot\,)$ definované vztahy (7.12) a (7.13) se nazývá *pseudo-* nebo *quasi-stacionární aproximace řešení* úlohy (7.9), (7.10). V mnoha aplikacích je tato aproximace dostatečně přesná. Na obrázku 7.3 je trajektorie řešení úlohy (7.9), (7.10) s hodnotou parametru $\varepsilon = \frac{1}{10}$; vidíme, že trajektorie řešení s „malou“ hodnotou parametru ε skutečně od jistého bodu téměř splývá s y-nulklinou, tj. s funkcí $y = \dfrac{x}{x+K}$.



Obrázek 7.3: Nulkliny systému (7.9) a jeho trajektorie s počáteční podmínkou (7.10) a hodnotou parametru $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

Řešení úlohy (7.9), (7.10) si tedy lze představit tak, že v „kratičkém časovém intervalu" od začátku reakce se veličina x (relativní množství substrátu) „nestačí změnit", takže má stále počáteční hodnotu 1. V tomto „kratičkém čase" veličina y (relativní množství komplexu SE vzhledem k množství enzymu) rychle dosáhne své quasi-stacionární hodnoty. Tento „rychlý nárůst" je popsán rovností (7.11) do níž je dosazeno $x = 1$, quasi-stacionární hodnota je tedy $1/(1+K)$. Dále se veličiny x a y vyvíjejí tak, jak je popsáno rovnostmi (7.12) a (7.13).

Ještě můžeme specifikovat délku zmíněného „kratičkého časového intervalu" pro dosažení quasi-stacionárního stavu. Předpokládejme, že jsme schopni měřit koncentrace s relativní přesností γ. Pak čas δ, za nějž veličina y naroste do quasi-stacionární hodnoty $1/(1+K)$ je přibližně dána přibližnou rovnicí

$$\frac{1}{1+K}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1+K}{\varepsilon}\delta}\right) \approx (1-\gamma)\frac{1}{1+K},$$

tedy

$$\delta \approx \frac{\varepsilon}{1+K} \ln \frac{1}{\gamma}. \tag{7.14}$$

Popsanou aproximaci řešení lze získat i jiným způsobem méně se odvolávajícím na intuici: řešení úlohy (7.9), (7.10) budeme hledat ve tvaru Taylorových řad v proměnné ε. Předpokládejme tedy, že řešení úlohy (7.9), (7.10) je tvaru

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\tau), \qquad y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(\tau).$$

Za předpokladu, že tyto řady, chápané jako řady funkcí proměnné τ, konvergují stejnoměrně (k tomu při $\varepsilon < 1$ stačí, aby všechny funkce $x_0(\,\cdot\,)$, $y_0(\,\cdot\,)$ byly ohraničené stejnou konstantou), platí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}\tau}, \quad \text{tj. } \varepsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}\tau}$$

a současně

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -x + (x+K-\lambda)y = -\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n x_n(\tau) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n x_n(\tau) + K - \lambda\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n y_n(\tau) = \\
= -\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n x_n(\tau) + (K-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n y_n(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right)\varepsilon^n = \\
= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x_n + (K-\lambda)y_n + \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right)\varepsilon^n = \\
= -x_0 + (x_0+K-\lambda)y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-x_n + (K-\lambda)y_n + \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right)\varepsilon^n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = x - (x+K)y = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x_n - Ky_n - \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right)\varepsilon^n = \\
= x_0 - (x_0+K)y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n - Ky_n - \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right)\varepsilon^n.
\end{aligned}
$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin ε získáme nekonečný systém rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau} &= -x_0 + (x_0+K-\lambda)y_0, & 0 &= x_0 - (x_0+K)y_0, \\
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau} &= -x_1 + (K-\lambda)y_1 + x_0y_1 + x_1y_0, & \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}\tau} &= x_1 - Ky_1 - x_0y_1 - x_1y_0, \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

Z první dvojice rovnic dostaneme

$$
y_0(\tau) = \frac{x_0(\tau)}{x_0(\tau)+K}, \qquad x_0(\tau) + K\ln x_0(\tau) = C - \lambda\tau,
$$

tedy quasi-stacionární aproximaci řešení (7.12), (7.13). V tomto případě však tato aproximace závisí na jedné integrační konstantě C a ta závisí na počátečních podmínkách. Počáteční podmínky (7.10) lze zapsat ve tvaru

$$
1 = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n x_n(0), \qquad 0 = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n y_n(0),
$$

takže z věty o jednoznačnosti Taylorových řad plyne

$$
x_0(0) = 1, \quad y_0(0) = 0, \quad x_n(0) = y_n(0) = 0 \text{ pro } n = 1, 2, \ldots
$$

První z těchto podmínek lze splnit volbou $C = 1$ stejně jako v (7.12), ale druhou z nich splnit nelze. Odtud plyne, že alespoň jedna ze složek x, y řešení úlohy (7.9), (7.10) nemůže být analytickou funkcí parametru ε.

Aby bylo možné splnit počáteční podmínky, je třeba v pravém okolí bodu $\tau = 0$ hledat řešení úlohy (7.9), (7.10) jiným způsobem. Zavedeme novou nezávisle proměnnou

$$\sigma = \frac{\tau}{\varepsilon}. \tag{7.15}$$

Pro $\varepsilon \to 0$ je $\sigma \to \infty$, takže změnou časového měřítka (7.15) „natáhneme malé okolí“ $[0, \delta)$ na „velice dlouhou dobu“. Substitucí (7.15) se úloha (7.9), (7.10) transformuje na úlohu

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\sigma} = -\varepsilon X + \varepsilon(X + K - \lambda)Y, \qquad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\sigma} = X - (X + K)Y, \tag{7.16}$$

$$X(0) = 1, \qquad Y(0) = 0. \tag{7.17}$$

Kvalitativní analýza úlohy (7.16), (7.10) dá stejné výsledky jako v 7.1.

Řešení úlohy (7.16), (7.17) budeme opět hledat ve tvaru Taylorových řad v proměnné ε, tj. ve tvaru

$$X(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n X_n(\sigma), \qquad Y(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(\sigma).$$

Pak je

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}X_0}{\mathrm{d}\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\mathrm{d}X_n}{\mathrm{d}\sigma}, \qquad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}Y_0}{\mathrm{d}\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\mathrm{d}Y_n}{\mathrm{d}\sigma}$$

a současně

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-X_{n-1} + (K - \lambda)Y_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} X_i Y_{n-i-1} \right) \varepsilon^n,$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\sigma} = X_0 - (X_0 + K)Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n - KY_n - \sum_{i=0}^{n} X_i Y_{n-i} \right) \varepsilon^n.$$

Z počátečních podmínek (7.17) dostaneme

$$X_0(0) = 1, \quad Y_0(0) = 0, \qquad X_n(0) = Y_n(0) = 0 \text{ pro } n = 1, 2, \ldots$$

Nulté aproximace X_0, Y_0 řešení úlohy (7.16), (7.10) jsou řešením počáteční úlohy

$$\frac{\mathrm{d}X_0}{\mathrm{d}\sigma} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}Y_0}{\mathrm{d}\sigma} = X_0 - (X_0 + K)Y_0, \qquad\qquad X_0(0) = 1, \qquad Y_0(0) = 0,$$

takže

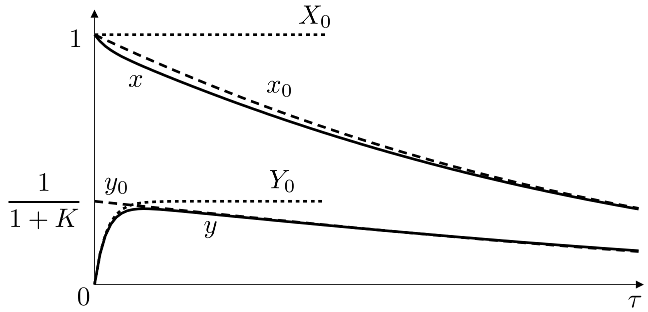
$$X_0(\sigma) = 1, \qquad Y_0(\sigma) = \frac{1}{K+1}\left(1 - \mathrm{e}^{-(K+1)\sigma}\right).$$

Vrátíme se k původní nezávisle proměnné $\tau = \varepsilon\sigma$ a dostaneme novou aproximaci řešení úlohy (7.9), (7.10) ve tvaru

$$X_0(\tau) = 1, \qquad Y_0(\tau) = \frac{1}{K+1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{K+1}{\varepsilon}\tau}\right); \tag{7.18}$$

tyto funkce splňují počáteční podmínky (7.10).

Řešení úlohy (7.9), (7.10) lze v okolí bodu $\tau = 0$, tj. na intervalu $[0, \delta)$ pro vhodné malé kladné číslo δ, aproximovat funkcemi (7.18). Tato část řešení úlohy se nazývá *singulární* nebo



Obrázek 7.4: Řešení úlohy (7.9), (7.10) s parametrem $\varepsilon = 0.2$. Plná čára — přesné řešení, čárkovaná čára — vnější řešení, tečkovaná čára — vnitřní řešení.

vnitřní řešení. Na intervalu (δ, ∞) lze použít quasi-stacionární aproximaci (7.12), (7.13); tato část řešení úlohy se nazývá *nesingulární* nebo *vnější řešení.*

No obr. 7.4 je znázorněno přibližné a přesné řešení úlohy (7.9), (7.10) s parametrem $\varepsilon = 0.2$; vidíme, že již v tomto případě je přibližné řešení dosti blízké přesnému. Navíc, první složka řešení, tj. funkce x, je i v pravém okolí nuly přesněji aproximována vnějším řešením než vitřním.

Ještě odhadneme parametr δ — časový okamžik, od něhož vnější řešení lépe než vnitřní aproximuje druhou složku řešení úlohy (7.9), (7.10). Je to taková hodnota nezávisle proměnné, v níž mají funkce y_0 a Y_0 stejnou hodnotu, $y_0(\delta) = Y_0(\delta)$. Takové číslo δ existuje podle Bolzanovy věty, neboť

$$y_0(0) - Y_0(0) = \frac{1}{1+K} > 0, \qquad \lim_{\delta\to\infty} \big(y_0(\delta) - Y_0(\delta)\big) = -\frac{1}{K+1} < 0.$$

Můžeme tedy řešit soustavu rovnic

$$\frac{1}{K+1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{K+1}{\varepsilon}\delta}\right) = \frac{\xi}{\xi+K}, \qquad \xi + K\ln\xi = 1 - \lambda\delta.$$

Vyjádřit řešení explicitně pomocí elementárních funkcí nelze, proto řešení odhadneme. Označme na chvíli $F(\xi) = \xi + K\ln\xi - 1 + \lambda\delta$. Pak je

$$F(1) = \lambda\delta > 0, \quad \lim_{\xi\to 0+} F(\xi) = -\infty < 0, \quad F'(\xi) = 1 + \frac{K}{\xi} \text{ pro } \xi > 0.$$

To znamená, že řešení druhé z rovnic, tj. rovnice $F(\xi) = 0$, leží v intervalu $(0,1)$ a funkce F je na tomto intervalu rostoucí. Odtud dále plyne, že existuje konstanta $\tilde{\xi} \in (0,1)$ taková, že pro řešení ξ druhé z rovnic platí

$$0 < \xi \le \tilde{\xi} < 1.$$

Z první rovnice nyní dostaneme

$$0 < \delta = \frac{\varepsilon}{K+1}\ln\frac{\xi+K}{K(1-\xi)} \le \frac{\varepsilon}{K+1}\ln\frac{\tilde{\xi}+K}{K(1-\tilde{\xi})}.$$

Tato nerovnost vyjadřuje, že hodnota δ je malá stejného řádu, jako ε, tj. $\delta = O(\varepsilon)$. Tento odhad souhlasí s vyjádření. (7.14).

Řešení původní úlohy (7.5), (7.6) můžeme nyní zapsat ve tvaru

$$
\begin{aligned}
s(t) &= s_0 x_0(k_1 e_0 t) + O\left(\frac{e_0}{s_0}\right), \\
c(t) &= \begin{cases} \dfrac{k_1 s_0 e_0}{k_1 s_0 + k_{-1} + k_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-(k_1 s_0 + k_{-1} + k_2)t}\right) + O\left(\dfrac{e_0}{s_0}\right), & 0 \le t \le O\left(\dfrac{e_0}{s_0}\right), \\[2ex] \dfrac{k_1 s_0 x_0(k_1 e_0 t)}{k_1 s_0 x_0(k_1 e_0 t) + k_{-1} + k_2} + O\left(\dfrac{e_0}{s_0}\right), & t \ge O\left(\dfrac{e_0}{s_0}\right); \end{cases}
\end{aligned}
$$

přitom funkce $x_0(\,\cdot\,)$ je implicitně dána rovnicí (7.12).

Kapitola 8

Makroekonomické modely

8.1 Harrodův-Domarův model ekonomického růstu

Základní ekonomickou veličinou je produkce. Produkovat může subjekt, který vlastní kapitál. Kapitálem jsou nejen peníze, ale především budovy, stroje, zařízení a podobně. Kapitál vzniká a obnovuje se investicemi. Budeme tedy uvažovat tři ekonomické ukazatele, tj. tři časově závislé proměnné – produkci $Y = Y(t)$, kapitál $K = K(t)$ a investice $I = I(t)$. Kdekoliv je vyvíjena jakákoliv ekonomická aktivita, tam je nějaká produkce; proto je veličina Y kladná. A jak již bylo řečeno, z toho, že je produkce plyne, že byl kapitál; tedy i veličina K je kladná.

První model dynamiky produkce sestavíme na základě tří postulátů:

HD1 Kapitál vzniká investicemi a mizí amortizací.

HD2 Do tvorby kapitálu je investován stálý podíl produktu.

HD3 Relativní přírůstek kapitálu se projevuje relativním přírůstkem produkce.

Označme δ podíl kapitálu, který se za jednotku času znehodnotí amortizací, κ čas, za který se z investované částky stane kapitál. Typicky je $\kappa = 1$, neboť investice z jednoho období jsou v následujícím období již kapitálem. S těmito symboly upřesníme postulát **HD1** jako rovnost

$$K(t + \Delta t) = K(t) + \frac{1}{\kappa} I(t)\Delta t - \delta K(t)\Delta(t),$$

neboli

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa} I(t) - \delta K(t).$$

Budeme dále předpokládat, že čas plyne spojitě a veličina K je diferencovatelná. Pak můžeme limitním přechodem $\Delta t \to 0$ vyjádřit postulát **HD1** ve tvaru diferenciální rovnice

$$K' = \frac{1}{\kappa} I - \delta K. \tag{8.1}$$

Předpoklad **HD2** je vyjádřen rovností

$$I = (1 - s)Y, \tag{8.2}$$

kde $s \in (0, 1)$. Parametr s vyjadřuje podíl produkce, který není investován, tedy je spotřebován nebo uspořen. Z nerovnosti $s < 1$ a kladnosti veličiny Y plyne, že také veličina I je kladná.

Předpoklad **HD3** formálně zapíšeme jako rovnost

$$\frac{K'}{K} = \frac{Y'}{Y}. \tag{8.3}$$

Z této rovnosti plyne

$$0 = \frac{K'}{K} - \frac{Y'}{Y} = \frac{K'Y - KY'}{Y^2}\frac{Y}{K} = \left(\frac{K}{Y}\right)'\frac{Y}{K}.$$

Poněvadž veličiny K a Y jsou kladné, plyne odtud, že $\left(\frac{K}{Y}\right)' = 0$ a tedy existuje konstanta $r \in \mathbb{R}$, že

$$\frac{K}{Y} = r, \tag{8.4}$$

neboli

$$K = rY. \tag{8.5}$$

Naopak, z této rovnosti plyne $K' = rY'$ a vydělením této rovnosti rovností (8.5) dostaneme rovnost (8.3). Předpoklad **HD3** lze tedy ekvivalentně vyjádřit rovností (8.3) nebo (8.5).

Z rovností (8.3), (8.1), (8.2) a (8.5) nyní dostaneme

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{(1-s)Y}{K} - \delta = \frac{1-s}{\kappa r} - \delta,$$

tedy

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{1-s}{\kappa r} - \delta = const, \tag{8.6}$$

relativní rychlost růstu produkce je za předpokladů **HD1**, **HD2** a **HD3** konstantní. Označme ji g a z rovnice (8.6) dostaneme

$$Y(t) = Y_0 e^{gt},$$

kde $Y_0 = Y(0)$ je počáteční produkce. Znaménko konstanty g určuje, zda produkce roste nebo klesá. Konstanta r je podle (8.4) poměrem produkce a kapitálu, vyjadřuje tedy *kapitálovou náročnost jednotky produkce*. Závěr analýzy modelu nyní můžeme přeformulovat:

$$\text{je-li } r < \frac{1-s}{\kappa\delta} \text{ pak produkce roste,}$$
$$\text{je-li } r = \frac{1-s}{\kappa\delta} \text{ pak produkce stagnuje,}$$
$$\text{je-li } r > \frac{1-s}{\kappa\delta} \text{ pak produkce klesá.}$$

Nebo stručně: je-li kapitálová náročnost jednotky produkce příliš velká, pak produkce nemůže růst.

8.2 Solowův-Swanův neoklasický model růstu

Budeme uvažovat uzavřenou ekonomiku, tj. takovou, že jedinými produkčními faktory jsou kapitál a práce, nikoliv zahraniční obchod. Kromě (agregátní) produkce $Y = Y(t)$, kapitálu $K = K(t)$ a investic $I = I(t)$ do modelu zahrneme i práci $L = L(t)$. Práci pro potřeby modelu stotožníme s vytvářenou hodnotou[1], měříme ji tedy ve stejných jednotkách (penězích) jako veličiny Y, K, nebo I. Práce vždy vytváří hodnotu, proto je veličina L kladná.

Budeme předpokládat, že kapitál a investice splňují postuláty **HD1** a **HD2**, tedy rovnosti (8.1) a (8.2). Dále budeme postulovat:

SS1 Relativní růst (změna) práce je konstantní, odpovídá přirozenému přírůstku (nebo úbytku) obyvatelstva.

SS2 Jedinými produkčními faktory jsou kapitál a práce.

Postulát **SS1** lze zapsat jako rovnost

$$\frac{L'}{L} = \lambda, \tag{8.7}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta. Postulát **SS2** zapíšeme rovností

$$Y = f(K, L). \tag{8.8}$$

Funkce f se nazývá *(agregátní) produkční funkce.* Poněvadž všechny tři veličiny K, L, Y považujeme za kladné, je

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty).$$

Aby funkce f vystihovala ekonomickou realitu, budeme předpokládat, že vyhovuje třem přirozeným požadavkům

pf1 Malá změna produkčního faktoru vyvolá malou změnu produkce, přitom zvětšení výrobního faktoru nevede ke zmenšení produkce.

pf2 Produkce není závislá na tom, v jakých (peněžních) jednotkách vyjadřujeme produkci a produkční faktory.

pf3 Platí *zákon klesajících výnosů:* dodatečná jednotka produkčního faktoru nevytvoří větší produkt, než jednotka předcházející a mezní produkt při neomezeném růstu produkčního faktoru klesá k nule.

Postulát **pf1** říká, že produkční funkce je spojitá a neklesající v každé své proměnné. Změna jednotky je totéž, co vynásobení proměnné nějakou kladnou konstantou. Postulát **pf2** tedy požaduje, aby pro každé $\alpha > 0$ platilo

$$f(\alpha K, \alpha K) = \alpha Y = \alpha f(K, L), \tag{8.9}$$

tj. produkční funkce je homogenní prvního řádu. Označme na chvíli jednotku kapitálu ΔK. Zákon klesajících výnosů pro kapitál nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$f(K, L) - f(K - \Delta K, L) \geq f(K + \Delta K, L) - f(K, L) \xrightarrow[K \to \infty]{} 0$$

pro libovolnou hodnotu L. Uvedenou nerovnost můžeme také přepsat ve tvaru

$$f(K, L) \geq \frac{1}{2} f(K - \Delta K, L) + \frac{1}{2} f(K + \Delta K, L).$$

[1]Poznamenejme, že hodnota obecně není totéž, co produkce.

Analogicky vyjádříme zákon klesajících výnosů pro práci. Obecně přeformulujeme (zesílíme!) postulát **pf3** výrokem: pro každé $\gamma \in (0,1)$ a všechny $K_1, K_2, L_1, L_2 > 0$ platí

$$f\big(\gamma K_1 + (1-\gamma)K_2, \gamma L_1 + (1-\gamma)L_2\big) \geq \gamma f(K_1, L_1) + (1-\gamma) f(K_2, L_2), \tag{8.10}$$

tj. funkce f je konkávní, a

$$\lim_{K\to\infty} \big(f(K+K_1, L_1) - f(K, L_1)\big) = 0 = \lim_{L\to\infty} \big(f(K, L+L_1) - f(K_1, L)\big). \tag{8.11}$$

Nyní zavedeme novou veličinu k, nazvanou *míra vybavenosti práce kapitálem,* vztahem

$$k = \frac{K}{L}. \tag{8.12}$$

S využitím rovností (8.1), (8.7), (8.2), (8.8) a (8.9) postupně dostaneme

$$\frac{k'}{k} = \frac{L}{K}\left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{L}{K}\frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta - \lambda = \frac{1-s}{\kappa}\frac{Y}{K} - (\delta+\lambda) =$$
$$= \frac{1-s}{\kappa}\frac{f(K,L)}{K} - (\delta+\lambda) = \frac{1-s}{\kappa}\frac{L}{K} f\left(\frac{K}{L}, 1\right) - (\delta+\lambda) = \frac{1-s}{\kappa}\frac{f(k,1)}{k} - (\delta+\lambda).$$

Tímto způsobem dostáváme *základní dynamickou rovnici neoklasického modelu*

$$k' = -(\delta+\lambda)k + \frac{1-s}{\kappa} f(k,1). \tag{8.13}$$

Funkci $f(\,\cdot\,,1) : (0,\infty) \to (0,\infty)$ nazýváme *produkční funkce v intenzivním tvaru.* Je to spojitá neklesající konkávní funkce, pro kterou podle (8.11) platí

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(k+k_1, 1) - f(k,1)\big) = 0$$

pro každé $k_1 > 0$. Z monotonie a nezápornosti funkce $f(\,\cdot\,,1)$ plyne existence limity

$$\lim_{k\to 0+} f(k,1) = f_0 \geq 0.$$

Fázovým prostorem jednorozměrné autonomní rovnice (8.13) je interval $(0,\infty)$. Stacionární bod k^* této rovnice splňuje rovnost

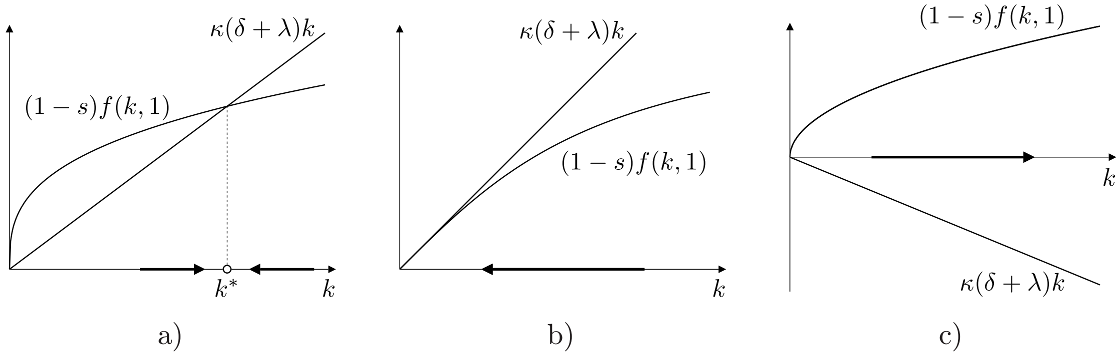
$$\kappa(\delta+\lambda)k^* = (1-s) f(k^*, 1). \tag{8.14}$$

Izolovaný stacionární bod rovnice (8.13) v jejím fázovém prostoru existuje právě tehdy, když $\delta + \lambda > 0$, tj. případný úbytek obyvatelstva (práce) je pomalejší, než amortizace kapitálu, a současně existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$f(k,1) > \kappa\frac{\delta+\lambda}{1-s}k \tag{8.15}$$

pro $k \in (0,\varepsilon)$, viz obr. 8.1. V takovém případě je pravá strana rovnice (8.13) kladná pro $k < k^*$ a záporná pro $k > k^*$. To znamená, že za takové situace pro každé řešení $k = k(t)$ rovnice (8.13) platí

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = k^*,$$



Obrázek 8.1: Řešení rovnice (8.14) pro stacionární bod k^* základní dynamické rovnice neoklasického modelu (8.13). Na vodorovné ose je současně fázový portrét rovnice (8.13). a) $\delta+\lambda > 0$ a je splněna podmínka (8.15). b) Není splněna podmínka (8.15). c) Neplatí $\delta + \lambda > 0$.

vybavenost práce kapitálem se ustálí na konstantní hodnotě $k^* > 0$.

Podle (8.9) platí rovnost

$$f(k, 1) = f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \frac{1}{L} f(K, L) = \frac{Y}{L}.$$

Odtud plyne, že pro kapitálovou náročnost produkce $r = r(t)$ platí

$$r = \frac{Y}{K} = \frac{Y}{L}\frac{L}{K} = \frac{f(k, 1)}{k}.$$

Ze spojitosti funkce $f(\,\cdot\,, 1)$ nyní plyne, že existuje limita

$$r^* = \lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{K(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f\big(k(t), 1\big)}{k(t)} = \frac{f(k^*, 1)}{k^*}, \tag{8.16}$$

tj. kapitálová náročnost produkce se ustálí na jisté hodnotě. Porovnáním se vztahem (8.4), který je ekvivalentní s postulátem **HD3** vidíme, že Harrodův-Domarův model je limitním případem modelu Solowova-Swanova. Harrodův-Domarův model popisuje *rovnovážnou ekonomiku,* v níž produkce roste stejně rychle jako kapitál.

Pokud $\delta + \lambda > 0$, ale není splněna podmínka (8.15), pak je pravá strana rovnice (8.13) záporná; každé její řešení tedy konverguje k nule. Pokud $\delta + \lambda < 0$, pak je pravá strana rovnice (8.13) kladná a každé její řešení diverguje do nekonečna. V obou takových případech ekonomika spěje ke kolapsu – vymizí kapitál nebo práce (tj. veškeré obyvatelstvo bude nezaměstnané). V reálné ekonomice tedy úbytek obyvatelstva nemůže být rychlejší než amortizace kapitálu a mezní produkt malého kapitálu musí být dostatečně velký.

8.2.1 Speciální produkční funkce

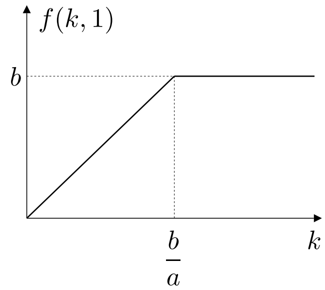
Leontiefova produkční funkce

$$f(K, L) = \min\{aK, bL\},$$

kde a, b jsou kladné konstanty, vyjadřuje předpoklad, že kapitál a práce mají na produktu pevný podíl. V případě, že $aK < bL$, tj. je nedostatek kapitálu, k produkci přispívá veškerý kapitál, ale část práce je neproduktivní. V případě, že $aK > bL$, tj. je nedostatek pracovní síly, zůstává část kapitálu ladem. Pouze v nepravděpodobném případě $aK = bL$ je veškerý kapitál i práce produktivní.

Produkční funkce v intenzivním tvaru je

$$f(k,1) = \min\{ak, b\}.$$



Kladný izolovaný stacionární bod rovnice (8.13) s Leontiefovou produkční funkcí existuje pouze tehdy, když je splněna podmínka (8.15), v tomto případě konkrétně když

$$a > \kappa\frac{\delta+\lambda}{1-s},$$

tj. podíl kapitálu na produkci je dostatečně velký, kapitál je dostatečně efektivně využíván. Za takové situace je $f(k^*,1) = b$, takže podle (8.14) je

$$\lim_{t\to\infty}\frac{K(t)}{L(t)} = k^* = \frac{(1-s)b}{\kappa(\delta+\lambda)}.$$

Odtud a z předchozí nerovnosti dostaneme

$$\lim_{t\to\infty}\frac{aK(t)}{bL(t)} = \frac{a(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)} > 1,$$

což znamená, že ve stabilizované ekonomice je $bL < aK$ a tedy v ní zůstává nevyužitý kapitál. Naopak, pokud by platila opačná nerovnost

$$a < \kappa\frac{\delta+\lambda}{1-s},$$

ekonomika by konvergovala k nulové vybavenosti práce kapitálem a v důsledku toho k nulové produkci. Ani jeden ze scénářů samozřejmě nepředstavuje žádoucí stav.

Dvakrát diferencovatelná produkční funkce

Produkční funkce $f = f(K,L)$ je podle **pf1** neklesající a podle (8.10) konkávní v obou svých proměnných. U dvakrát diferencovatelné produkční funkce tyto požadavky poněkud zesílíme – budeme předpokládat, že funkce f je v obou svých proměnných rostoucí a ryze konkávní, tj. že pro všechna kladná K, L splňuje nerovnosti

$$\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial K^2}(K,L) < 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial L}(K,L) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial L^2}(K,L) < 0. \tag{8.17}$$

Zákon klesajících výnosů ve tvaru

$$\lim_{K\to\infty}\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) = 0 = \lim_{L\to\infty}\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) \tag{8.18}$$

doplníme předpokladem: pokud se v ekonomice objeví nový produkční faktor, pak jeho mezní výnos je obrovský; přesněji řečeno, budeme předpokládat, že platí

$$\lim_{K\to 0+}\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) = \infty = \lim_{L\to 0+}\frac{\partial f}{\partial K}(K,L). \tag{8.19}$$

Podmínky (8.18) a (8.19) se nazývají *Inadovy*. Produkční funkce, která má vlastnosti (8.9), (8.17), (8.18) a (8.19) se nazývá *neoklasická*.

Tvrzení: V neoklasické funkci jsou oba produkční faktory podstatné, zmizí-li jeden z nich, zmizí i produkce, tj.

$$\lim_{K\to 0+} f(K,L) = 0 = \lim_{L\to 0+} f(K,L). \tag{8.20}$$

Pokud některý z produkčních faktorů roste neomezeně, pak neomezeně roste i produkce, tj.

$$\lim_{K\to\infty} f(K,L) = \infty = \lim_{L\to\infty} f(K,L). \tag{8.21}$$

Důkaz: Pro funkci f podle de l'Hôpitalova pravidla a podle Inadovy podmínky (8.18) platí

$$\lim_{L\to\infty} \frac{f(K,L)}{L} = \lim_{L\to\infty} \frac{\partial f(K,L)}{\partial L} = 0 \quad \text{pro libovolné } K > 0.$$

Z homogenity funkce f nyní plyne

$$0 = \lim_{L\to\infty} \frac{f(K,L)}{L} = \lim_{L\to\infty} f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \lim_{k\to 0+} f(k,1)$$

a dále

$$\lim_{K\to 0+} f(K,L) = \lim_{K\to 0+} L\, f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L \lim_{k\to 0+} f(k,1) = 0,$$

což je první z rovností (8.20).

Z homogenity funkce f, z de l'Hôpitalova pravidla a z Inadovy podmínky (8.19) plyne

$$\lim_{K\to\infty} f(K,L) = \lim_{K\to\infty} \frac{f\left(1, \frac{L}{K}\right)}{\frac{1}{K}} = \lim_{K\to\infty} \frac{-\frac{L}{K^2}\, f'_{|2}\left(1, \frac{L}{K}\right)}{-\frac{1}{K^2}} = L \lim_{l\to 0+} f'_{|2}(1,l) = \infty$$

(symbol $f'_{|2}(x,y)$ označuje parciální derivaci funkce f podle druhé proměnné v bodě (x,y)). To je první z rovností (8.21). Platnost druhých rovností (8.20) a (8.21) ukážeme analogicky. □

Z první rovnosti (8.20), de l'Hôpitalova pravidla a druhé Inadovy podmínky (8.19) plyne

$$\lim_{k\to 0+} \frac{f(k,1)}{k} = \lim_{k\to 0+} \frac{\partial f(k,1)}{\partial k} = \infty.$$

Z této rovnosti dále plyne, že je splněna podmínka (8.15).

Rovnice (8.13) s neoklasickou produkční funkcí f má jediné kladné stacionární řešení k^*, které je globálně asymptoticky stabilní.

Cobbova-Douglasova produkční funkce

$$f(K,L) = AK^bL^{1-b},$$

kde $A > 0$, $b \in (0,1)$ je neoklasická; o tom se lze přesvědčit snadným přímým výpočtem. Konstanta A vyjadřuje produkci při jednotkovém kapitálu i práci. Z rovnosti

$$Y = AK^bL^{1-b}$$

je vidět, že k danému množství kapitálu K a požadované produkci Y lze určit potřebné množství práce

$$L = \sqrt[1-b]{\frac{Y}{AK^b}},$$

které tuto produkci zajistí. Naopak, k danému množství práce L lze určit množství kapitálu

$$K = \sqrt[b]{\frac{Y}{AL^{1-b}}},$$

které zajistí požadovanou produkci Y. Cobbova-Douglasova produkční funkce tedy vyjadřuje produkci v takové ekonomice, v níž jsou *kapitál a práce neomezeně substituovatelné.*

Cobbova-Douglasova produkční funkce v intenzivním tvaru je

$$f(k,1) = Ak^b,$$

takže základní rovnice neoklasického modelu (8.13) je tvaru

$$k' = -(\delta+\lambda)k + A\frac{1-s}{\kappa}k^b. \tag{8.22}$$

To je rovnice Bernoulliova, kterou podle návodu na str. 25 řešíme substitucí

$$x = k^{1-b}.$$

Tato substituce převede rovnici (8.22) na lineární nehomogenní rovnici

$$x' = -(1-b)(\delta+\lambda)x + A\frac{(1-s)(1-b)}{\kappa},$$

která má podle (1.22) řešení

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)}\right)\mathrm{e}^{-(1-b)(\delta+\lambda)t} + \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)},$$

kde x_0 je počáteční hodnota. Poněvadž pro $\delta+\lambda > 0$ platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)},$$

dostaneme pro ustálenou hodnotu vybavenosti práce kapitálem vyjádření

$$k^* = \lim_{t\to\infty} k(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt[1-b]{x(t)} = \sqrt[1-b]{\frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)}},$$

tedy

$$(k^*)^{1-b} = \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)}.$$

Odtud s využitím definice Cobbovy-Douglasovy produkční funkce a porovnáním se vztahem (8.16) dostaneme

$$\frac{\kappa(\delta+\lambda)}{1-s} = \frac{A}{(k^*)^{1-b}} = \frac{A(k^*)^b}{k^*} = \frac{f(k^*,1)}{k^*} = r^*.$$

Poměr produkce a kapitálu v rovnovážné ekonomice s neomezeně substituovatelnou prací a kapitálem je tedy rovna konstantě

$$\kappa\frac{\delta+\lambda}{1-s}.$$

8.3 Goodwinův model hospodářského cyklu

Práce v Solowovu-Swanovu modelu je abstraktní veličina, představuje vlastně hodnotu prací vytvořenou. Nyní budeme jako práci $L = L(t)$ označovat množství zaměstnaného obyvatelstva, které za svou práci dostává mzdu $W = W(t)$. Přesněji řečeno, W označuje nějakou střední hodnotu mzdy jednoho pracovníka. Dále budeme uvažovat množství $N = N(t)$ práceschopného (nebo práceochotného) obyvatelstva. Pro zjednodušení zavedeme ještě veličiny: *produktivita práce*

$$a = \frac{Y}{L} \tag{8.23}$$

(střední množství produktu vytvořeného jedním pracujícím člověkem), *relativní zaměstnanost*

$$v = \frac{L}{N} \tag{8.24}$$

a *podíl mzdy na produkci*

$$u = \frac{W}{a} = \frac{WL}{Y}. \tag{8.25}$$

Ekonomiku budeme považovat za rovnovážnou, tj. budeme předpokládat, že produkce Y, kapitál K a investice I splňují postuláty **HD1** a **HD3** Harrodova-Domarova modelu, tedy rovnost (8.1) a ekvivalentní rovnosti (8.3), (8.4). Dále budeme postulovat:

G1 Veškerá čistá produkce, tj. produkce bez vyplacených mezd, je investována.

G2 Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.

G3 Projevuje se stálý technický pokrok, tj. konstantní relativní růst produktivity práce.

G4 Změna mzdové sazby závisí na zaměstnanosti.

Postulát **G1** nahrazuje předpoklad o investování **HD2** z Harrodova-Domarova modelu. Postuláty **G1**, **G2** a **G3** zapíšeme po řadě rovnostmi

$$I = Y - WL, \tag{8.26}$$

$$\frac{N'}{N} = \beta, \tag{8.27}$$

$$\frac{a'}{a} = \alpha, \tag{8.28}$$

kde $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ jsou nějaké konstanty. V postulátu **G4** budeme změnu považovat za relativní a postulát zpřesníme vyjádřením

$$\frac{W'}{W} = \varphi(v), \tag{8.29}$$

kde $\varphi : [0, 1) \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce, jejímž grafem je *Phillipsova křivka*. Její vlastnosti, které byly zjištěny empiricky, formálně vyjádříme tak, že funkce φ je na svém definičním oboru rostoucí a konvexní, zejména

$$\varphi'(v) > 0 \quad \text{pro } v \in [0, 1) \tag{8.30}$$

a splňuje nerovnosti

$$\varphi(0) = \varphi_0 < 0, \tag{8.31}$$

tj. při malé zaměstnanosti (velké nezaměstnanosti) mzdy klesají (je-li práce vzácná, lidé jsou ochotni pracovat za nízkou mzdu),

$$\lim_{v \to 1-} \varphi(v) = \varphi_1 > 0, \tag{8.32}$$

tj. při velké zaměstnanosti mzdy rostou (chceme-li při téměř plné zaměstnanosti získat nového pracovníka, musíme ho přeplatit); přitom připouštíme i $\varphi_1 = \infty$ (to je dokonce obvyklejší předpoklad).

Podle (8.1), (8.26), (8.4) a (8.25) platí

$$\frac{K'}{K} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{Y - WL}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{Y}{K}\left(1 - \frac{WL}{Y}\right) - \delta = \frac{r}{\kappa}(1-u) - \delta.$$

Odtud a z rovnosti (8.3) při označení $\sigma = \dfrac{r}{\kappa}$ dostaneme

$$\frac{Y'}{Y} = \sigma(1-u) - \delta. \tag{8.33}$$

Nyní vyjádříme relativní změnu zaměstnanosti pomocí rovností (8.24), (8.23), (8.27), (8.33) a (8.28).

$$\begin{aligned}\frac{v'}{v} = \frac{N}{L}\left(\frac{L}{N}\right)' = \frac{N}{L}\frac{L'N - LN'}{N^2} = \frac{L'}{L} - \frac{N'}{N} = \frac{a}{Y}\left(\frac{Y}{a}\right)' - \beta = \frac{a}{Y}\frac{Y'a - Ya'}{a^2} - \beta = \\ = \frac{Y'}{Y} - \frac{a'}{a} - \beta = \sigma(1-u) - \delta - \alpha - \beta.\end{aligned}$$

Tedy při označení $\gamma = \sigma - \alpha - \beta - \delta$ máme

$$\frac{v'}{v} = -\sigma u + \gamma. \tag{8.34}$$

Relativní změnu podílu mzdy na produkci vyjádříme pomocí rovností (8.25), (8.29) a (8.28).

$$\frac{u'}{u} = \frac{a}{W}\left(\frac{W}{a}\right)' = \frac{a}{W}\frac{W'a - Wa'}{a^2} = \frac{W'}{W} - \frac{a'}{a} = \varphi(v) - \alpha,$$

tj.

$$\frac{u'}{u} = \varphi(v) - \alpha. \tag{8.35}$$

Rovnice (8.35) a (8.34) představují model vývoje podílu mezd na produkci a relativní zaměstnanosti. Můžeme je přepsat v obvyklém tvaru

$$\begin{aligned} u' &= u\big(\varphi(v) - \alpha\big), \\ v' &= v(\gamma - \sigma u); \end{aligned} \tag{8.36}$$

připomeňme, že fázový prostor systému (8.36) je množina $\Omega = [0, \infty) \times [0, 1)$ a že parametry α, σ jsou kladné.

Ze druhé rovnice systému (8.36) plyne diferenciální nerovnost $u' \le \gamma v$ a tedy podle srovnávací věty 8 platí

$$v(t) \le v(0)\mathrm{e}^{\gamma t}.$$

Uvažujme nejprve $\gamma < 0$. Pak
$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0.$$
Ze spojitosti funkce φ a podmínky (8.30) odtud plyne, že existuje $t_1 \geq 0$ takové, že $\varphi(\big(v(t)\big) \leq 0$ pro $t \geq t_1$. Podle první rovnice systému (8.36) pro $t \geq t_1$ platí $u'(t) \leq -\alpha u(t)$, takže $u(t) \leq u(t_1)\mathrm{e}^{-\alpha t}$. Proto také
$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0.$$
Případ $\gamma < 0$ popisuje ekonomiku, která spěje k podivnému stavu – nikdo nepracuje a na produkci se mzda nepodílí[2].

Dále budeme realističtěji předpokládat, že $\gamma > 0$.

Pokud $\varphi_1 < \alpha$, pak z první rovnice systému (8.36) plyne, že $u' \leq u(\varphi_1 - \alpha)$ a tedy pro všechna $t \geq 0$ je
$$u(t) \leq u(0)\mathrm{e}^{(\varphi_1-\alpha)t}.$$
To znamená, že existuje $t_2 \geq 0$ takové, že
$$u(t) \leq \frac{\gamma}{2\sigma} \quad \text{pro } t \geq t_2.$$
Podle druhé rovnice systému (8.36) pro $t \geq t_2$ platí
$$v'(t) = v(t)\big(\gamma - \sigma u(t)\big) \geq v(t)\left(\gamma - \sigma\frac{\gamma}{2\sigma}\right) = \frac{1}{2}\gamma v(t),$$
takže $v(t) \geq v(t_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\gamma t}$. To znamená, že existuje $T \geq t_2$ takové, že
$$\lim_{t\to T-} v(t) = 1.$$
Podle věty 5 řešení nelze prodloužit za čas T. V případě $\varphi_1 < \alpha$ tedy ekonomika v konečném čase dospěje k plné zaměstnanosti, ale v tom okamžiku přestanou platit „ekonomické zákony“, ze kterých byl Goodwinův model sestaven[3].

Je-li $\varphi_1 > \alpha$ (což je zejména splněno, pokud $\varphi_1 = \infty$), pak existuje $v^* \in (0,1)$ takové, že $\varphi(v^*) = \alpha$, tj. $v^* = \varphi^{-1}(\alpha)$. Systém (8.36) má v tomto případě dva stacionární body
$$(0,0) \quad \text{a} \quad (u^*, v^*) = \left(\frac{\gamma}{\sigma}, \varphi^{-1}(\alpha)\right).$$
Variační matice systému (8.36) je
$$\mathsf{J}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi(v) - \alpha & u\varphi'(v) \\ -\sigma v & \gamma - \sigma u \end{pmatrix},$$
tedy
$$\mathsf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} \varphi_0 - \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \det \mathsf{J}(0,0) = \gamma(\varphi_0 - \alpha) < 0,$$

[2] To připomíná lidovou charakteristiku reálného socialismu, který fungoval v sedmdesátých a osmdesátých letech dvacátého století v Československé socialistické republice: „Občané předstírají, že pracují, stát předstírá, že platí.“

[3] Ekonomika s plnou zaměstnaností a s malým až zanedbatelným podílem mezd na produkci je snem komunistů — všichni budou pracovat (práce se stane první životní nutností), ale peníze již za komunismu nebudou. Tomuto ideálu se v realitě nejvíce přiblížil Pol Pot.

$$\mathsf{J}(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma}{\sigma}\varphi'(v^*) \\ -\sigma v^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det \mathsf{J}(u^*, v^*) = \gamma v^* \varphi'(v^*) > 0, \quad \operatorname{tr} \mathsf{J}(u^*, v^*) = 0.$$

Podle Tabulky 4.1 je triviální stacionární bod $(0, 0)$ sedlo. O typu stacionárního bodu (u^*, v^*) nelze podle tohoto kritéria rozhodnout.

Budeme hledat vyjádření trajektorií systému (8.36). Vydělením jeho rovnic dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v(\gamma - \sigma u)}{u\big(\varphi(v) - \alpha\big)},$$

což je obyčejná rovnice se separovanými proměnnými. Podle 1.1 je její řešení implicitně dáno rovností

$$\int \frac{\varphi(v) - \alpha}{v}\mathrm{d}v = \int \frac{\gamma - \sigma u}{u}\mathrm{d}u,$$

po úpravě

$$\sigma u - \ln\left(u^\gamma v^\alpha\right) + \int_{v_0}^{v} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = const;$$

přitom $v_0 \in (0, 1)$ je nějaká konstanta vyjadřující počáteční zaměstnanost. Levou stranu poslední rovnosti označíme $G(u, v)$. Trajektorie systému (8.36) jsou tedy vrstevnicemi funkce G.

Poněvadž platí

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \sigma - \frac{\gamma}{u} = -\frac{\gamma - \sigma u}{u}, \qquad \frac{\partial G}{\partial u}(u^*, v^*) = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\varphi(v)}{v} - \frac{\alpha}{v} = \frac{\varphi(v) - \alpha}{v}, \qquad \frac{\partial G}{\partial v}(u^*, v^*) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = \frac{\gamma}{u^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} = 0,$$

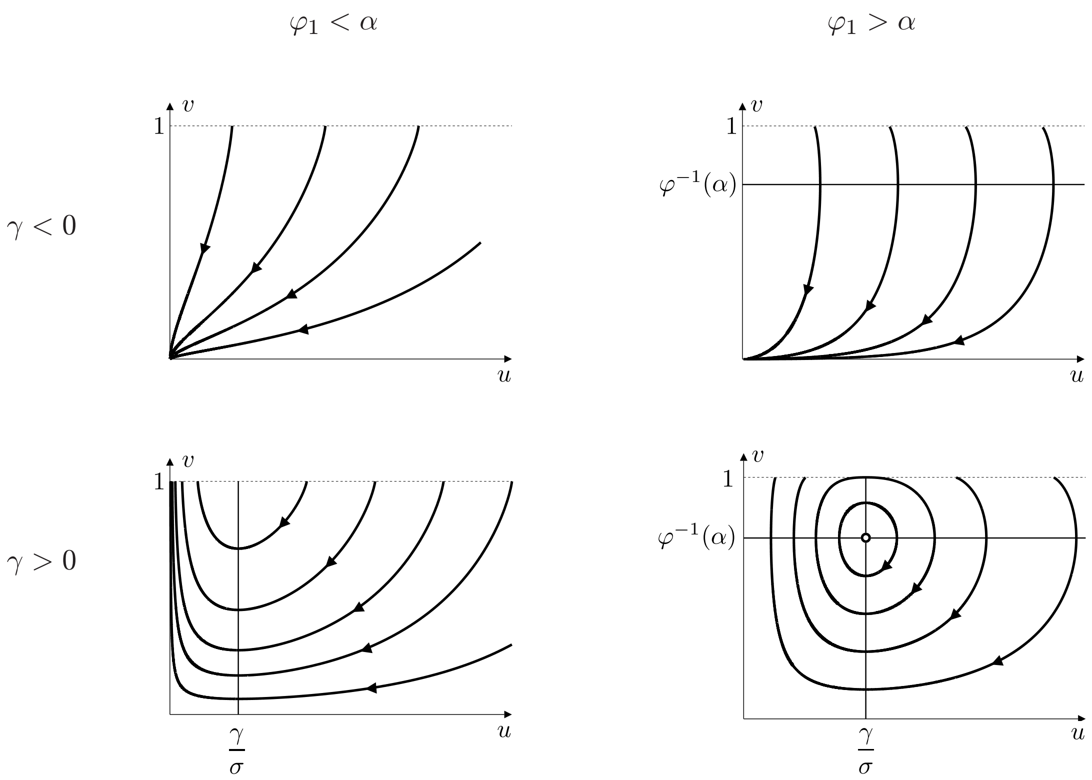
$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{v\varphi'(v) - \big(\varphi(v) - \alpha\big)}{v^2}, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(u^*, v^*) = \frac{\varphi'(v^*)}{v^*} > 0,$$

je stacionární bod (u^*, v^*) lokálním minimem funkce G, a ta je v nějakém jeho okolí konvexní. To znamená, že trajektorie systému (8.36) začínající v okolí stacionárního bodu (u^*, v^*) jsou uzavřenými křivkami, stacionární bod je střed.

Možné umístění nulklin ve fázovém prostoru spolu s trajektoriemi systému (8.36) je znázorněno na obr. 8.2. Vidíme, že i v případě $\gamma > 0$, $\varphi_1 > \alpha$ je možné, že vývoj ekonomiky dospěje v konečném čase k plné zaměstnanosti a malému podílu mzdy na produkci, pokud je počáteční stav ekonomiky dostatečně daleko od rovnováhy. Jinak zaměstnanost kolísá kolem jisté rovnovážné hodnoty, v ekonomice se střídají období prosperity a útlumu; Goodwinův model tedy svým způsobem vysvětlil vznik a nevyhnutelnost hospodářského cyklu.

Obecně platí

$$\nabla G(u, v) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma - \sigma u}{u} \\ \dfrac{\varphi(v) - \alpha}{v} \end{pmatrix}, \quad \text{tedy} \quad \nabla G(u, v)^T \begin{pmatrix} u\big(\varphi(v) - \alpha\big) \\ v(\gamma - \sigma u) \end{pmatrix} = 0,$$



Obrázek 8.2: Trajektorie a nulkliny systému (8.36) pro možné kombinace parametrů

což znamená, že funkce G je prvním integrálem (invariantem) systému (8.36). Dále při označení $x = \ln u$, $y = \ln v$ dostaneme

$$x' = \varphi\left(\mathrm{e}^y\right) - \alpha, \qquad y' = \gamma - \sigma \mathrm{e}^x. \tag{8.37}$$

Systém (8.36) lze tedy transformovat na systém bipartitní; fázovým prostorem transformovaného systému je množina $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$.

Pro funkci

$$H(x,y) = G\left(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y\right) = \sigma \mathrm{e}^x - \gamma x - \alpha y + \int_{v_0}^{\mathrm{e}^y} \frac{\varphi(\eta)}{\eta} \mathrm{d}\eta = \sigma \mathrm{e}^x - \gamma x - \alpha y + \int_{\ln v_0}^{y} \varphi(\mathrm{e}^\xi) \mathrm{d}\xi$$

(integrál jsme transformovali substitucí $\xi = \ln \eta$) platí

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \sigma \mathrm{e}^x - \gamma, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\alpha + \varphi\left(\mathrm{e}^y\right),$$

takže systém (8.37) můžeme přepsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla H(x,y).$$

Systém (8.37) je tedy hamiltonovský s hamiltoniánem H.