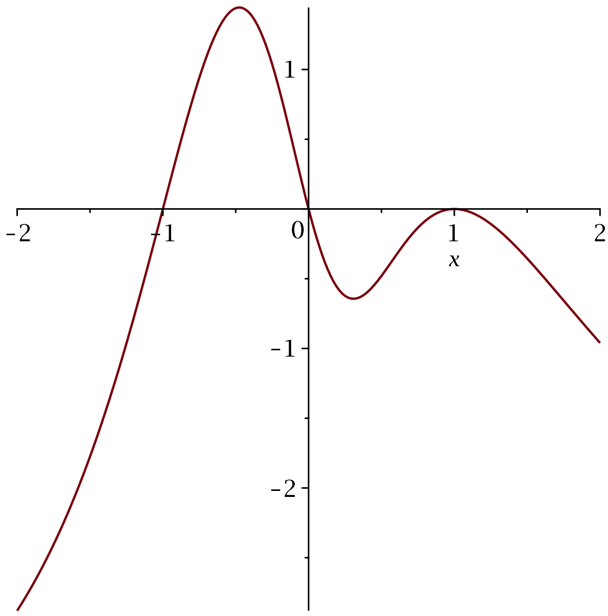
M5858 Spojité deterministické modely I, cvičenie, 10.11.2021

Príklad 1. Analyzujte riešenia nasledujúcej autonómnej rovnice:

$$x' = (x-1)\sin(4\arctan(x)).$$

Riešenie. Najprv nájdeme všetky stacionárne body. Tie sú riešením rovnice $x' = 0$, teda $(x-1)\sin(4\arctan(x)) = 0$. Rovnosť $x - 1 = 0$ vedie k bodu $x = 1$. Funkcia sínus je nulová v celočíselných násobkoch konštanty π. Keďže obor hodnôt funkcie $4\arctan(x)$ je otvorený interval $(-2\pi, 2\pi)$, je rovnosť $\sin(4\arctan(x)) = 0$ ekvivalentná s tvrdením $4\arctan(x) \in \{0, \pm\pi\}$, čo môžeme tiež vyjadriť v tvare $\arctan(x) \in \{0, \pm\frac{\pi}{4}\}$. To znamená, že všetky stacionárne body uvedenej rovnice sú $\{0, \pm 1\}$. Ďalej vyšetríme znamienko pravej strany v intervaloch určených týmito bodmi:

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$-$	$+$	$-$	$-$



Nech $x(t)$ označuje riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $x(0) = x_0$. Ak $x_0 \in (-\infty, -1)$, potom toto riešenie neustále klesá, lebo jeho derivácia je záporná. Podobne, ak $x_0 \in (-1, 0)$, potom toto riešenie neustále rastie, lebo jeho derivácia je kladná. To znamená, že stacionárny bod -1 je nestabilný uzol. Podobnými úvahami by sme dospeli k záveru, že riešenia spĺňajúce $x_0 \in (0,1) \cup (1,\infty)$ klesajú, a tým pádom je 0 stabilný uzol a 1 je sedlo.

Príklad 2. Analyzujte riešenia nasledujúcej autonómnej rovnice a nájdite jej potenciál:

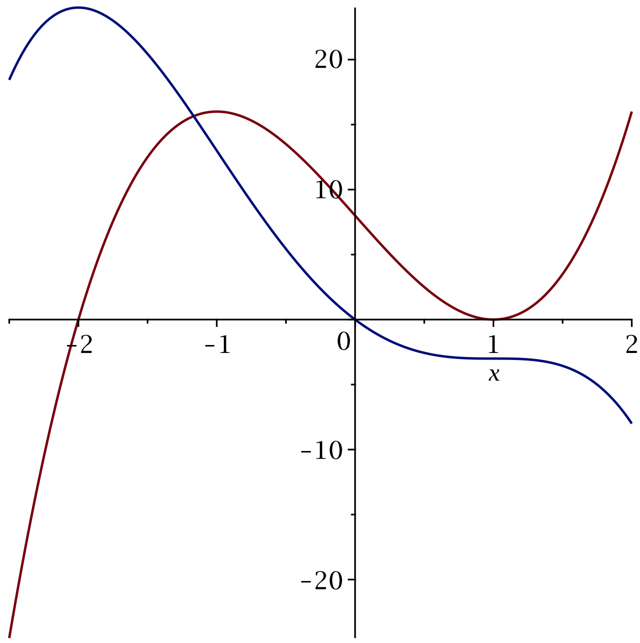
$$x' = 4x^3 - 12x + 8.$$

Riešenie. Začneme stacionárnymi bodmi. Jedným z nich je evidentne 1. Výsledkom delenia polynómu $4x^3 - 12x + 8$ polynómom $x - 1$ je $4x^2 + 4x - 8$. Jeho korene sú 1 a -2. Takže uvedená rovnica má dva stacionárne body 1 a -2. Rovnako ako v predošlom príklade by sme dospeli k záveru, že riešenia nadobúdajúce hodnoty z intervalu $(-\infty, -2)$ klesajú a tie, ktoré nadobúdajú hodnoty z množiny $(-2, 1) \cup (1, \infty)$ rastú. Bod -2 je preto nestabilný uzol a bod 1 je sedlo.

Označme symbolom $f(x)$ pravú stranu uvažovanej rovnice. Potenciál je z definície funkcia $V(x)$ spĺňajúca rovnosť $-V'(x) = f(x)$, teda $V(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $-f(x)$.

$$V(x) = -\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\int 4x^3 - 12x + 8\,\mathrm{d}x = -x^4 + 6x^2 - 8x + c. \tag{1}$$

Konštantu c môžeme voliť ľubovoľne, buď napríklad $c = 0$. Ilustrujme situáciu na obrázku.



Červenou farbou je nakreslený graf funkcie f a modrou graf funkcie V. Vývoj riešenia spĺňajúceho počiatočnú podmienku $x(0) = x_0$ si môžeme predstaviť nasledovne. Na graf funkcie V v bode x_0 položíme guľu. Ak sa začne kotúľať doprava, potom riešenie rastie, naopak, ak sa začne kotúľať doľava, potom riešenie bude klesať. Nakoniec, ak guľa zostane v pokoji, potom je x_0 stacionárny bod.

Príklad 3. Analyzujte riešenia nasledujúcej autonómnej rovnice:

$$v' = g - \frac{k}{m}v^2,$$

kde $g, k, m > 0$ sú parametre a $v \geq 0$.

Riešenie. Uvedená rovnica popisuje rýchlosť padajúceho predmetu v prostredí kladúcom odpor voči jeho pohybu, ktorého veľkosť je priamo úmerná druhej mocnine jeho rýchlosti. Jej explicitným riešením sme sa zaoberali na niektorom z predošlých cvičení. Na intervale $[0, \infty)$ má táto rovnica jediný stacionárny bod, ktorým je $\sqrt{\frac{gm}{k}}$. Vzhľadom k tomu, že v intervale $[0, \sqrt{\frac{gm}{k}})$ sú derivácie riešení kladné a v intervale $(\sqrt{\frac{gm}{k}}, \infty)$ sú derivácie riešení záporné, je $\sqrt{\frac{gm}{k}}$ stabilný uzol. Bez toho, aby sme túto rovnicu vyriešili, sme schopní povedať, že jej akékoľvek riešenie, ktorého hodnoty sú v intervale $[0, \infty)$, sa blíži k hodnote $\sqrt{\frac{gm}{k}}$.

Príklad 4. Nájdite stacionárny bod nasledujúceho systému a vyšetrite jeho charakter:

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y + 1, \\ y' &= 2x + y - 2. \end{aligned}$$

Riešenie. Začneme tým, že nájdeme nulkliny uvažovaného systému. X-nulklina je krivka definovaná rovnosťou $x' = 0$, teda $-x + 2y + 1 = 0$. Jedná sa o priamku prechádzajúcu bodmi $[0, -\frac{1}{2}]$ a $[1, 0]$. Podobne, y-nulklina je definovaná rovnosťou $y' = 0$, teda $2x + y - 2 = 0$, čo je opäť priamka prechádzajúca bodmi $[0, 2]$ a $[1, 0]$. Ich prienik je stacionárny bod:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

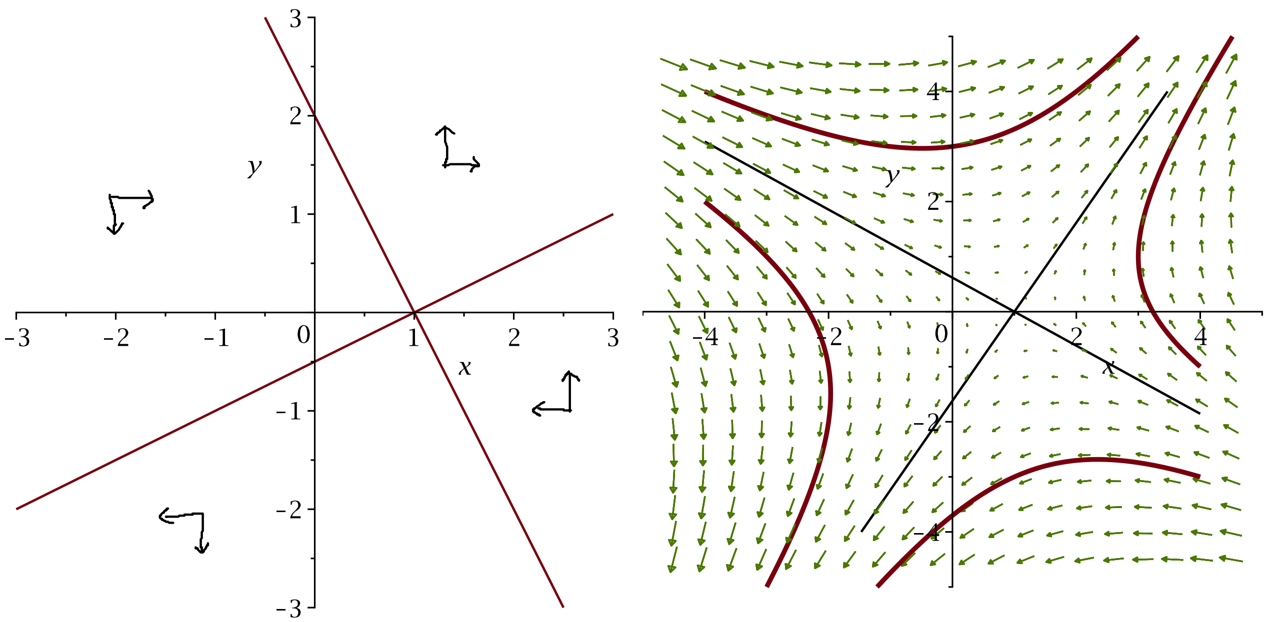
Na základe determinantu a stopy matice systému $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ môžeme rozhodnúť o charaktere tohto bodu. Keďže $\det A = -5 < 0$, stacionárny bod je sedlo.

Môžeme sa tiež pokúsiť nájsť riešenia $(x(t), y(t))$ spĺňajúce $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = [1, 0]$ alebo $\lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = [1, 0]$. Na to budeme potrebovať vlastné čísla a vektory matice A:

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \sqrt{5}: \quad & \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & -2 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -2(1-\sqrt{5}) \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\lambda_2 = -\sqrt{5}: \quad & \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -2 \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -2(1+\sqrt{5}) \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Hľadané riešenia ležia na priamkach prechádzajúcich stacionárnym bodom, ktorých smernice sú v_1 a v_2.



Príklad 5. Nájdite stacionárny bod nasledujúceho systému a vyšetrite jeho charakter:

$$\begin{aligned} x' &= -5x - y + 1, \\ y' &= x - 2y + 2. \end{aligned}$$

Riešenie. Rovnako ako v predošlom príklade môžeme nájsť nulkliny, ktorých prienikom je stacionárny bod $[0, 1]$. Označme symbolom $A = \left(\begin{smallmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ maticu uvažovaného systému. Keďže platia rovnosti $\det A = 11$, $\operatorname{tr} A = -7$ a $(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = 49 - 44 = 5 > 0$, je stacionárny bod typu uzol. Na jeho detailnejší popis potrebujeme vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A:

$$\det\begin{pmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (5+\lambda)(2+\lambda) + 1 = \lambda^2 + 7\lambda + 11 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Vlastné hodnoty sú rôzne s rovnakým znamienkom (záporným), takže bod $[0,1]$ je stabilný uzol. Nájdime dotyčnice ku trajektóriam blížiacim sa k tomuto bodu:

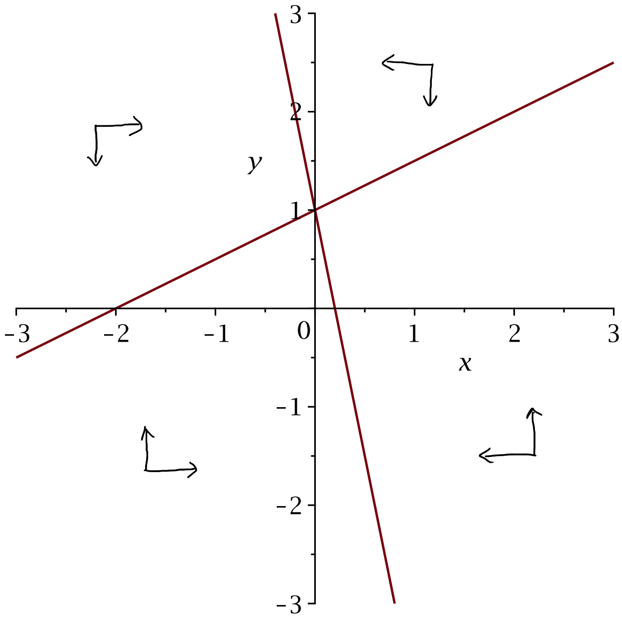
$$\lambda_1 = \frac{-7+\sqrt{5}}{2}: \quad \begin{pmatrix} -5-\dfrac{-7+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ 1 & -2-\dfrac{-7+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3-\sqrt{5} & -2 \\ 2 & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

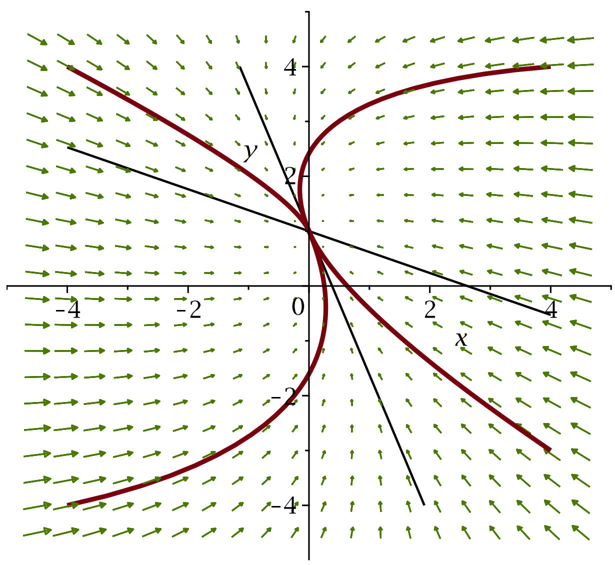
$$\begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2(3-\sqrt{5}) \\ 2 & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3-\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = \frac{-7-\sqrt{5}}{2}: \quad \begin{pmatrix} -5-\dfrac{-7-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ 1 & -2-\dfrac{-7-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3+\sqrt{5} & -2 \\ 2 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2(3+\sqrt{5}) \\ 2 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3+\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix},$$

Hľadané priamky prechádzajú stacionárnym bodom a ich smernice sú v_1 a v_2.





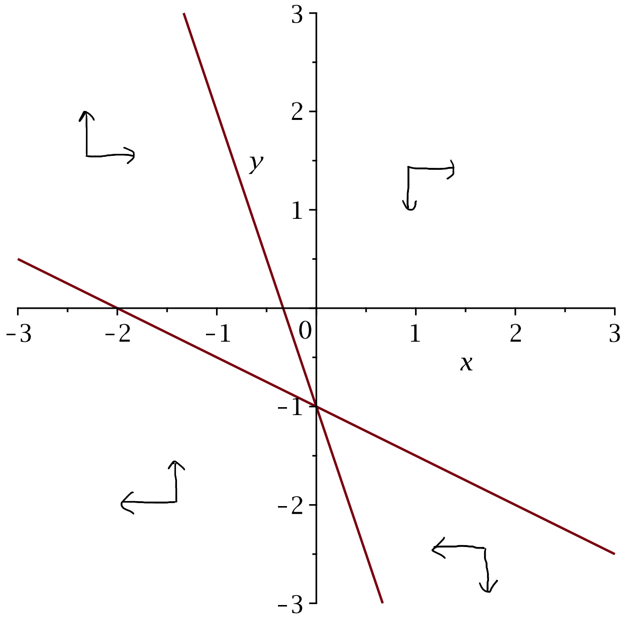
Príklad 6. Nájdite stacionárny bod nasledujúceho systému a vyšetrite jeho charakter:

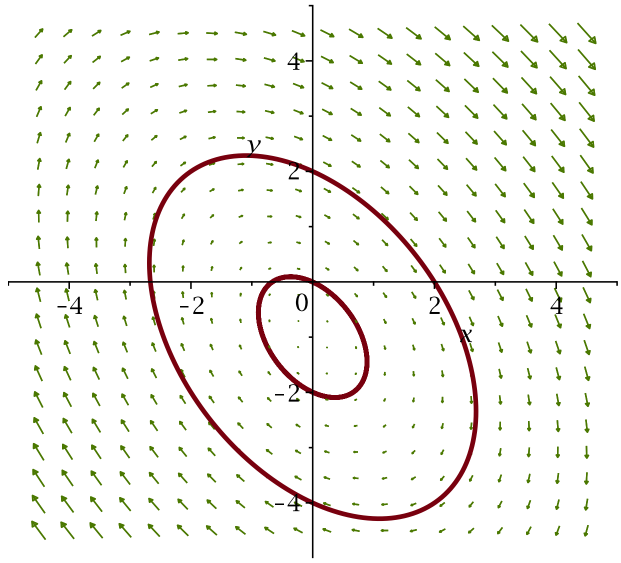
$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + 2, \\ y' &= -3x - y - 1. \end{aligned}$$

Riešenie. Vzhľadom k tomu, že

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

je $[0,-1]$ stacionárny bod. Keďže $\det A = 5$ a $\operatorname{tr} A = 0$, má matica A dva rôzne rýdzo komplexné združené korene, čo znamená, že uvedený stacionárny bod je stred.





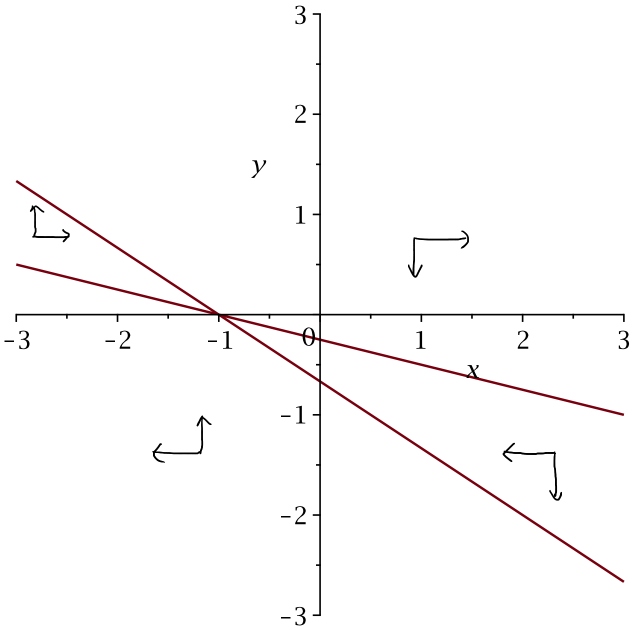
Príklad 7. Nájdite stacionárny bod nasledujúceho systému a vyšetrite jeho charakter:

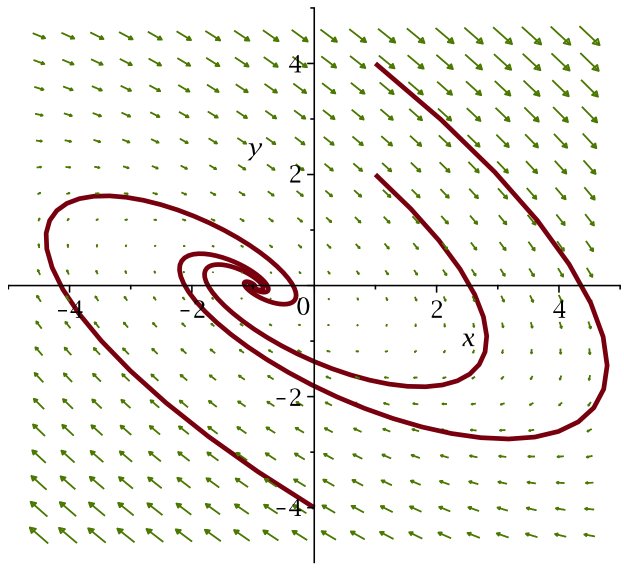
$$x' = x + 4y + 1,$$
$$y' = -2x - 3y - 2.$$

Riešenie. Vzhľadom k tomu, že

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

je $[-1, 0]$ stacionárny bod. Keďže $\det A = 5$, $\operatorname{tr} A = -2$ a $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = 4 - 20 < 0$ jedná sa o stabilné ohnisko.





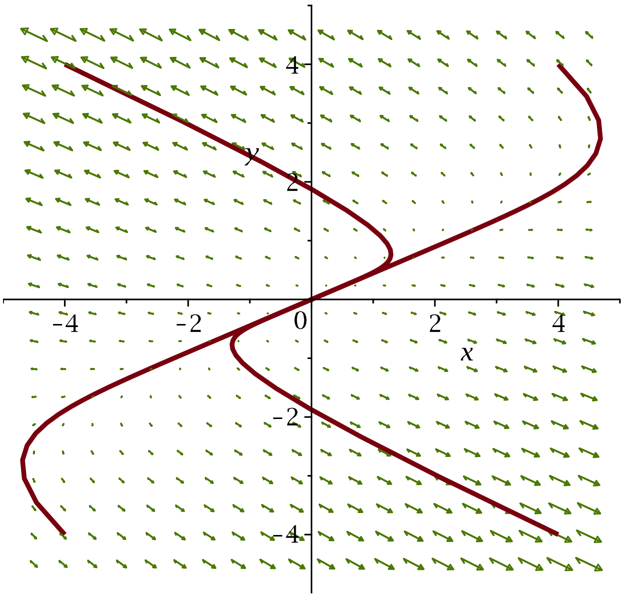
Príklad 8. V závislosti od parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ analyzujte chovanie nasledujúceho systému. Pre ktoré hodnoty sú riešenia tohto systému na intervale $[0, \infty)$ ohraničené?

$$x' = -\lambda x + (\lambda - 2)y,$$
$$y' = -x - \lambda y.$$

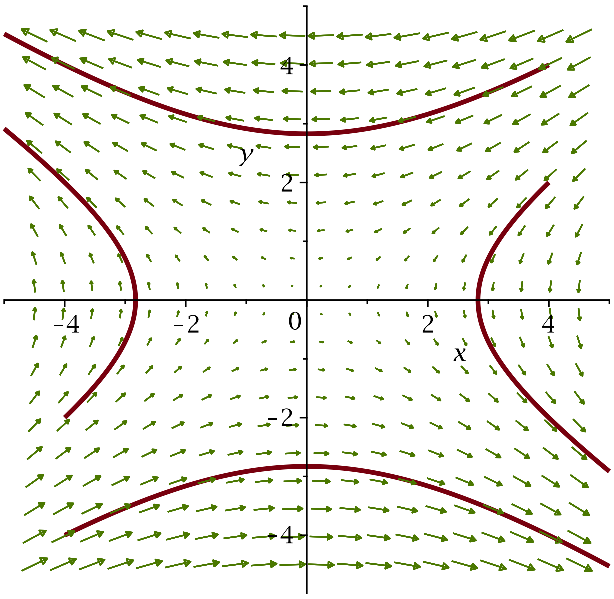
Riešenie. Pre každú hodnotu parametra λ je $[0, 0]$ evidentne stacionárnym bodom systému. Pozrime sa na determinant a stopu matice $A = \left(\begin{smallmatrix} -\lambda & \lambda-2 \\ -1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right)$ a na veličinu $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= -2\lambda, \\ \det A &= \lambda^2 + \lambda - 2, \\ (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A &= 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 8 = -4\lambda + 8. \end{aligned}$$

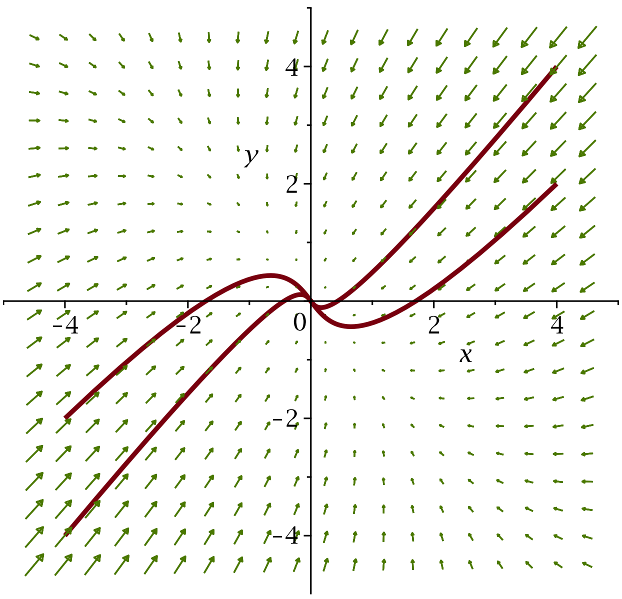
Na základe znamienka týchto výrazov sme schopní odvodiť charakter stacionárneho bodu $[0, 0]$. Nulové body determinantu sú -2 a 1, stopy 0, a nakoniec nulový bod výrazu $(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A$ je 2. Situácia v bodoch $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ je nasledovná:



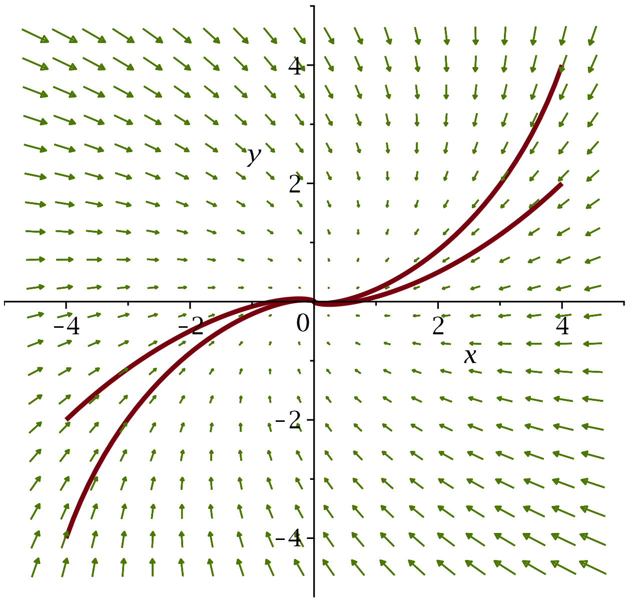
Obr. 1: $\lambda = -3$



Obr. 2: $\lambda = 0$



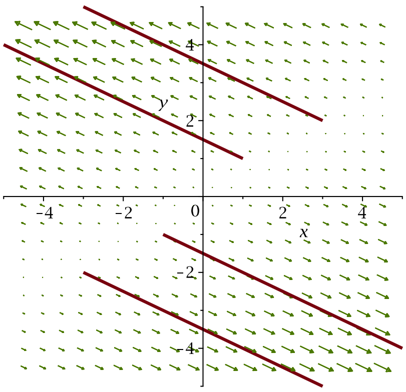
Obr. 3: $\lambda = \frac{3}{2}$



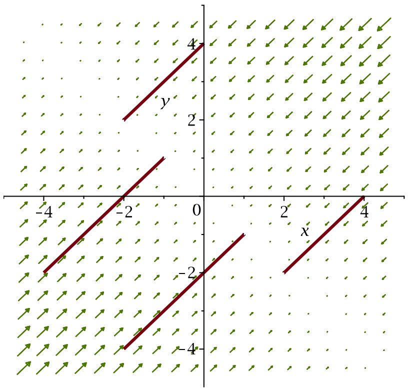
Obr. 4: $\lambda = 5$

$$\begin{aligned} \lambda \in (-\infty, -2) \quad &\Rightarrow \quad \text{nestabilný uzol,} \\ \lambda \in (-2, 1) \quad &\Rightarrow \quad \text{sedlo,} \\ \lambda \in (1, 2] \quad &\Rightarrow \quad \text{stabilný uzol,} \\ \lambda \in (2, \infty) \quad &\Rightarrow \quad \text{stabilné ohnisko.} \end{aligned}$$

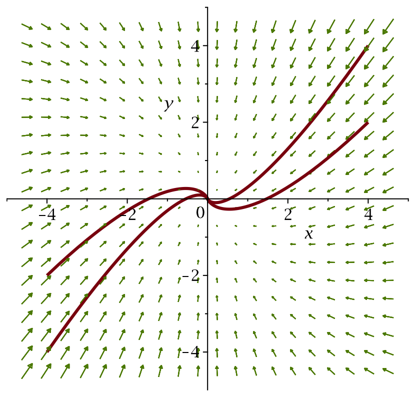
V bodoch $\lambda = -2, 1$ je determinant matice sústavy nulový. To znamená, že existuje celá priamka stacionárnych bodov prechádzajúca bodom $[0, 0]$. Táto priamka je limitou dotyčníc k riešeniam, ktoré sa blížia k, respektíva vzďaľujú od uzla $[0, 0]$. Všetky netriviálne riešenia ležia na navzájom rovnobežných priamkach.



Obr. 5: $\lambda = -2$



Obr. 6: $\lambda = 1$



Obr. 7: $\lambda = 2$

Vzhľadom k tomu, že pre $\lambda \in (1, \infty)$ je $[0, 0]$ stabilný stacionárny bod, sú pre tieto hodnoty parametra všetky riešenia na intervale $[0, \infty)$ ohraničené. Pre $\lambda = 1$ každé riešenie konverguje k nejakému bodu na spomínanej priamke stacionárnych bodov. Preto aj pre túto hodnotu parametra sú všetky riešenia na intervale $[0, \infty)$ ohraničené.