

M5858 Spojité deterministické modely I, cvičenie, 1.12.2021

Príklad 1. Nájdite stacionárne body, vyšetrite ich charekter a načrtnite fázový portrét nasledujúceho systému:

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -x - y - x^2 - y^2.\end{aligned}$$

Riešenie. Začneme nulklinami. Prvá z nich, x -nulklina, je určená rovnicou $y = 0$, zatiaľčo y -nulklinu definuje rovnica $-x - y - x^2 - y^2 = 0$, ktorú môžeme upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}x + y + x^2 + y^2 &= 0, \\(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Je to kružnica so stredom v bode $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$. Nad osou x sú hodnoty premennej y kladné, takže hodnoty derivácie x' sú tiež kladné, čo znamená, že trajektórie v hornej polrovine smerujú doprava. Podobne, pod osou x sú hodnoty premennej y záporné, takže hodnoty derivácie x' sú tiež záporné, v dôsledku čoho trajektórie v dolnej polrovine smerujú doľava. Vo vnútri kruhu ohraňovanom spomínanou kružnicou sú hodnoty výrazu $-x - y - x^2 - y^2$ kladné, čo znamená, že v tejto oblasti sú hodnoty derivácie y' kladné, a preto v týchto miestach trajektórie smerujú hore. Naopak, mimo tohto kruhu a kružnice sú hodnoty výrazu $-x - y - x^2 - y^2$ záporné, čo môžeme povedať aj o hodnotách derivácie y' , a to vedie k tomu, že v tejto oblasti trajektórie smerujú dole.

Stacionárne body sú prienikom nulklín. Za y v rovnici pre y -nulklinu dosadíme $y = 0$, to nás privedie k rovnici $-x - x^2 = -x(1 + x) = 0$. Dostali sme sa k dvom stacionárnym bodom $[0, 0]$ a $[-1, 0]$. Na to, aby sme mohli určiť ich typ, použijeme Vetu 11 na strane 88 z dokumentu Priebežný zápis prednášky. Najprv spočítame Jacobiho maticu, jej stopu a determinant:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x & -1 - 2y \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \text{tr } J(x, y) &= -1 - 2y, \\ \det J(x, y) &= 1 + 2x. \end{aligned}$$

V bode $[0, 0]$ platí

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \text{tr } J(0, 0) &= -1 < 0, \\ \det J(0, 0) &= 1 < 0, \\ (\text{tr } J(0, 0))^2 - 4 \det J(0, 0) &= -3 < 0, \end{aligned}$$

čo znamená, že bod $[0, 0]$ je pre linearizovaný systém stabilné ohnisko a podľa uvedenej vety je tento bod stabilným¹ ohniskom aj pre pôvodný systém. V bode $[-1, 0]$ platí

$$J(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \text{tr } J(-1, 0) &= -1 < 0, \\ \det J(-1, 0) &= -1 < 0, \end{aligned}$$

takže bod $[-1, 0]$ je pre linearizovaný systém sedlo a podľa uvedenej vety je tento bod sedlom aj pre pôvodný systém.

Aby sme mohli čo naj dôveryhodnejšie zrekonštruovať fázový portrét, spočítame ešte charakteristické smery sedla. To sú smerové vektory dotyčníc ku trajektóriam, ktoré sa pre $t \rightarrow \infty$

¹V čase písania tohto textu v uvedenom dokumente ešte nebola zmienka o zachovaní stability. Odkaz na ňu doplním, akonáhle sa tam objaví.

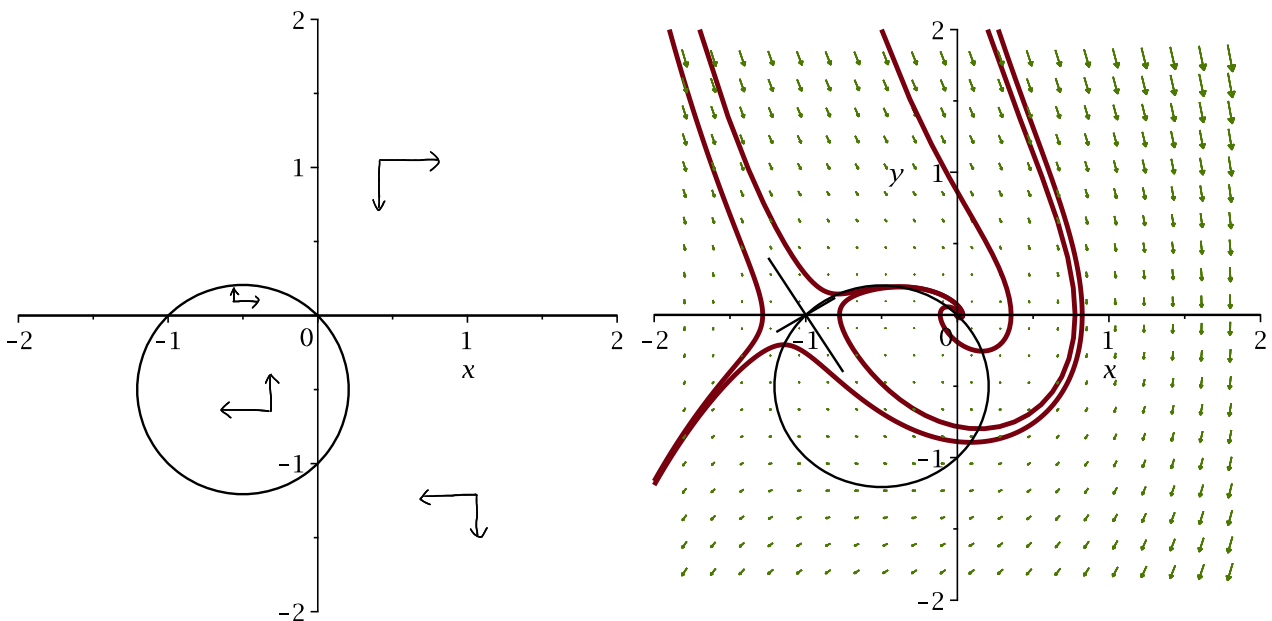
alebo $t \rightarrow -\infty$ blížia k spomínanému sedlu. Sú to vlastné vektory Jacobiho matice vyhodnotenej v tomto sedle.

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+1) - 1 = \lambda^2 + \lambda - 1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\lambda_1: \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -1+\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2(1-\sqrt{5}) \\ 2 & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2: \quad \dots \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pripomeňme, že v_1 prislúcha vlastnému číslu $\lambda_1 < 0$, takže je to smerový vektor dotyčnice k riešeniam blížiacim sa k sedlu pre $t \rightarrow \infty$. Naopak, v_2 prislúcha vlastnému číslu $\lambda_2 > 0$, takže je to smerový vektor dotyčnice k riešeniam blížiacim sa k sedlu pre $t \rightarrow -\infty$. Môžeme nakresliť obrázky:



Na pravom obrázku pekne vidno, ako trajektórie blížiace sa k sedlu pre $t \rightarrow \infty$ tvoria hranicu oblasti príťažlivosti ohniska (tie na obrázku nie sú nakreslené, ale ležia v úzkom páse ohraničenom ostatnými trajektóriami). ➔

Príklad 2. Nájdite stacionárne body, vyšetrite ich charekter a načrtnite fázový portrét nasledujúceho systému:

$$x' = x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3}, \\ y' = 6x - 3y.$$

Riešenie. Začneme nulklinami. Druhá z nich, y -nulklina, je určená rovnicou $y = 2x$, čo je priamka prechádzajúca počiatkom so smernicou 2, zatiaľčo x -nulklina je grafom funkcie $y = 3x^2 - x^3$. Tá má jednoduchý koreň 3 a dvojnásobný koreň 0. Jej derivácia je $6x - 3x^2$,

ktorej korene sú 0 a 2. Podľa jej znamienka zistíme že funkcia na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ klesá a na intervale $(0, 2)$ rastie. V lokálnych extrémoch funkcia nadobúda hodnoty 0 a 4. To by malo pre jej približný náčrt stačiť. Nad, respektíve pod grafom funkcie $y = 2x$ výraz $6x - 3y$ nadobúda záporné, respektíve kladné hodnoty, takže nad ním trajektórie smerujú dole, zatiaľčo pod ním smerujú hore. Nad, respektíve pod grafom funkcie $y = 3x^2 - x^3$ výraz $x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{y}{3}$ nadobúda záporné, respektíve kladné hodnoty, čo znamená, že trajektórie nad ním smerujú doľava, zatiaľčo pod ním doprava.

Za y v rovnici pre x -nulklinu dosadíme na základe rovnice pre y -nulklinu výraz $2x$, čo nás privedie k rovnici

$$2x = 3x^2 - x^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) = 0.$$

Stacionárne body sú $[0, 0]$, $[1, 2]$ a $[2, 4]$. Jacobiho matica jej stopa a determinant majú nasledujúci tvar:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - x^2 & -\frac{1}{3} \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \text{tr } J(x, y) &= -x^2 + 2x - 3, \\ \det J(x, y) &= 3x^2 - 6x + 2. \end{aligned}$$

V bode $[0, 0]$ platí

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \text{tr } J(0, 0) &= -3 < 0, \\ \det J(0, 0) &= 2 > 0, \\ (\text{tr } J(0, 0))^2 - 4 \det J(0, 0) &= 1 > 0, \end{aligned}$$

čo znamená, že bod $[0, 0]$ je pre linearizovaný systém stabilný uzol a podľa uvedenej vety je tento bod stabilným² uzlom aj pre pôvodný systém. V bode $[1, 2]$ platí

$$J(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \text{tr } J(1, 2) &= -2 < 0, \\ \det J(1, 2) &= -1 < 0, \end{aligned}$$

takže bod $[1, 2]$ je pre linearizovaný systém sedlo a podľa uvedenej vety je tento bod sedlom aj pre pôvodný systém. V bode $[2, 4]$ platí

$$J(2, 4) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 6 & -3 \end{pmatrix},$$

čo je tá istá matica ako v prípade prvého stacionárneho bodu, takže aj $[2, 4]$ je stabilný uzol.

Nájďme charakteristické smery sedla:

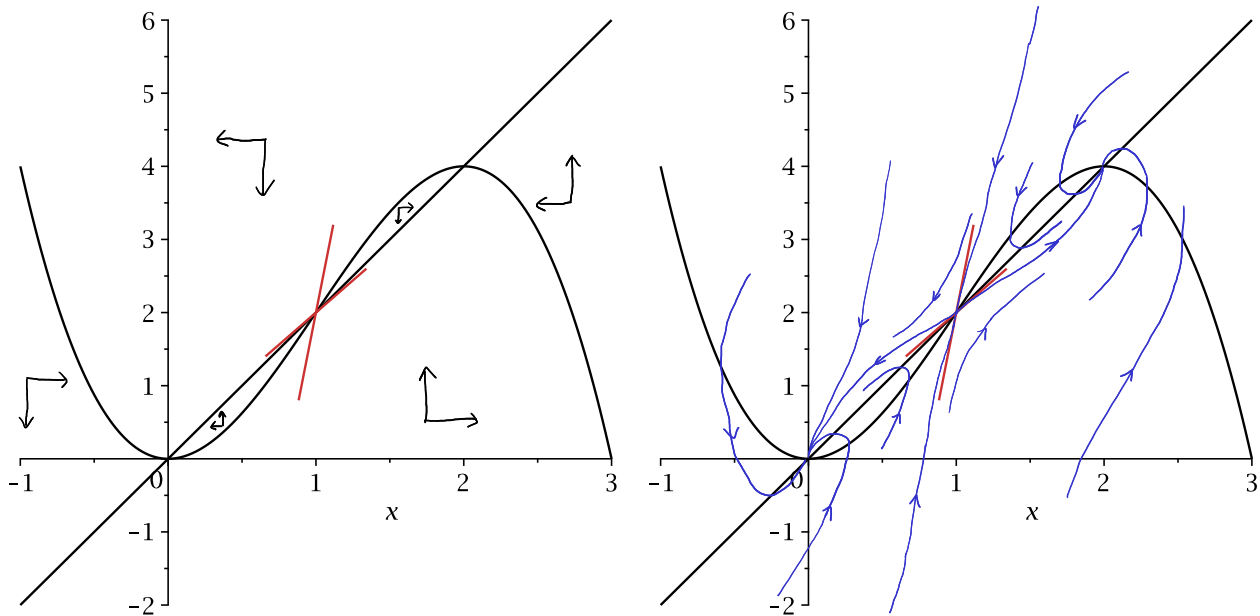
$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{3} \\ 6 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 1) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda - 1 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 - \sqrt{2}, \\ \lambda_2 &= -1 + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \quad & \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} & -\frac{1}{3} \\ 6 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 + 3\sqrt{2} & -1 \\ 6 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 6 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{2} - 2 \\ 6 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\lambda_2 : \quad \dots \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Už teraz môžeme približne načrtnúť fázový portrét:

²Tá istá situácia ako tá, ktorá bola rozoberaná v predošlej poznámke pod čiarou.

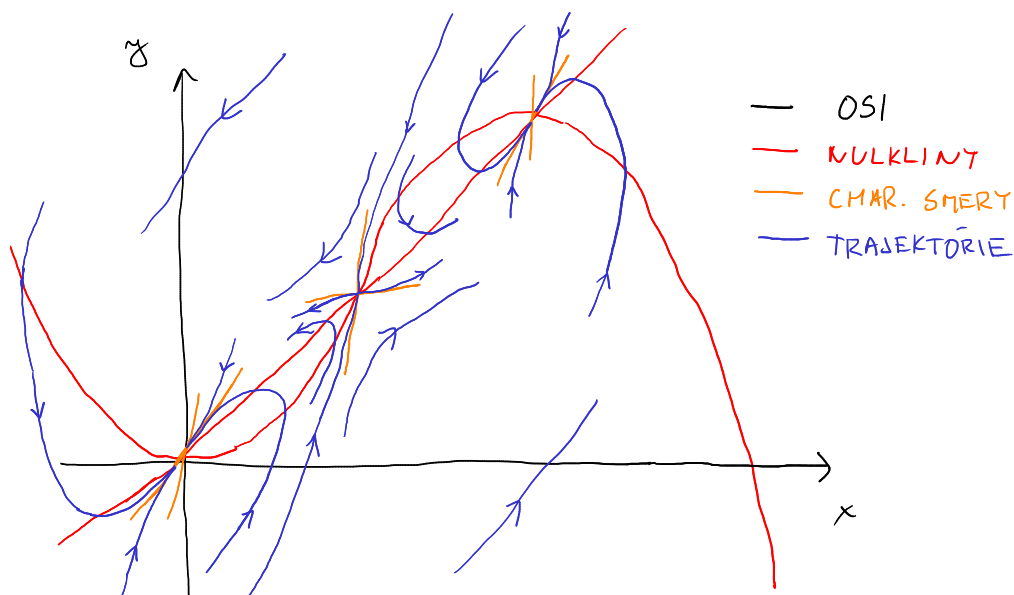


Aby sme lepšie zachytili spôsob približovania trajektórií k stabilným uzlom vypočítame ich charakteristické smery. To sú opäť vlastné vektory Jacobiho matice vyhodnotenej v danom uzle. Vzhľadom k tomu, že obidva stacionárne body majú rovnakú Jacobiho maticu, stačí nám výpočet uskutočniť len raz:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} \\ 6 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -1, \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ 6 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 : \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 6 & -2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zdôraznime, že λ_1 je v absolútnej hodnote väčšie ako λ_2 . Priamka, ktorej smerový vektor je v_2 , prechádzajúca uzlom je dotyčnicou v tomto bode ku skoro všetkým trajektóriám približujúcim sa k tomuto uzlu. Jedinou výnimkou sú dve riešenia, ktorých dotyčnica má smernicu v_1 .



Na základe práve uskutočnenej analýzy nie sme schopní rozhodnúť, akým spôsobom sa k uzlom približujú trajektórie, ktoré pre $t \rightarrow -\infty$ konvergujú k sedlu, teda heteroklinické trajektórie. Na to by sme potrebovali o mnoho silnejšie nástroje, a preto sme ich len naznačili a nedokončili. ➔

Príklad 3. Analyzujte chovanie riešení nasledujúcej diferenciálnej rovnice:

$$\varphi'' = -\frac{g}{r} \sin \varphi.$$

Riešenie. Na stranách 8 až 9 v dokumente Priebežný zápis prednášky bolo ukázané, že uvedená rovnica popisuje chovanie matematického kyvadla, pričom φ je jeho odchýlka od (stabilnej) rovnovážnej polohy, g je gravitačné zrýchlenie a r je dĺžka závesu. Aby výsledky našej analýzy korešpondovali s modelovaným javom, budeme predpokladať, že závažie visí na pevnom nedeformovateľnom závесе, teda napríklad na nejakej ľahkej tyči.

Uvedenú diferenciálnu rovnicu druhého rádu upravíme na systém dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu zavedením premennej $\psi = \varphi'$:

$$\begin{aligned}\varphi' &= \psi, \\ \psi' &= -\frac{g}{r} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Výsledkom je evidentne autonómny systém v rovine. Označme $f(\varphi, \psi) = \psi$ a $g(\varphi, \psi) = -\frac{g}{r} \sin \varphi$. Vzhľadom k tomu, že $(f(\varphi + 2\pi, \psi), g(\varphi + 2\pi, \psi)) = (f(\varphi, \psi), g(\varphi, \psi))$, stačí sa obmedziť na prípad $(\varphi, \psi) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$. Inými slovami, rovinu môžeme rozdeliť na pásy $([-\pi, \pi] + k2\pi) \times \mathbb{R}$, kde $k \in \mathbb{Z}$, pričom skúmané vektorové pole má v každom páse rovnaký tvar.

Najprv nájdeme nulkliny a stacionárne body systému. Rovnosť definujúca φ -nulklinu má tvar $\psi = 0$, zatiaľčo ψ -nulklina je zjednotením priamok $\varphi = -\pi$, $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$. Ich prienikom sú tri stacionárne body $[-\pi, 0]$, $[0, 0]$ a $[\pi, 0]$. Jacobiho matica pravej strany systému a jej determinant majú nasledujúce tvary:

$$J(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{r} \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad \det J(\varphi, \psi) = \frac{g}{r} \cos \varphi.$$

Keďže $\det J(-\pi, 0) = \det J(\pi, 0) = -\frac{g}{r} < 0$, sú stacionárne body $[\pm\pi, 0]$ sedlom pre linearizovaný systém. Podľa Vety 11 sú tieto body sedlom aj pre pôvodný systém. Na druhej strane, $\det J(0, 0) = \frac{g}{r} > 0$ a $\text{tr} J(0, 0) = 0$, čo znamená, že bod $[0, 0]$ je stredom pre linearizovaný systém. Podľa spomínanej vety vieme povedať len toľko, že bod $[0, 0]$ je v pôvodnom systéme buď bod rotácie alebo ohnisko.

Pripomeňme, že študovaný systém je konzervatívny. Veličinou, ktorá je pozdĺž riešení systému zachovávaná, je napríklad celková energia systému $\frac{1}{2}mr\psi^2 + mg(1 - \cos \varphi)$. Pre naše účely postačí jej akýkoľvek nenulový násobok, preto definujme

$$H(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}r\psi^2 + g(1 - \cos \varphi).$$

Ukážme, že sa skutočne jedná o prvý integrál:

$$\langle (H_\varphi, H_\psi), (f, g) \rangle = \left\langle (g \sin \varphi, r\psi), \left(\psi, -\frac{g}{r} \sin \varphi \right) \right\rangle = g\psi \sin \varphi - g\psi \sin \varphi = 0.$$

To znamená, že trajektórie riešení ležia na vrstevniciach funkcie H . Túto skutočnosť použijeme k dôkazu toho, že bod $[0, 0]$ je stred.

Potrebuje ukázať, že v okolí bodu $[0, 0]$ sú vrstevnice funkcie H uzavreté krivky. Všimnime si, že $H(0, 0) = 0$. Študujme vrstevnicu $H(\varphi, \psi) = \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je malé. Zrejme existuje $\psi_0 > 0$ s vlastnosťou $H(0, \psi_0) = H(0, -\psi_0) = \varepsilon$. Túto hodnotu môžeme priamo spočítať:

$$\varepsilon = H(0, \pm\psi_0) = \frac{1}{2}r\psi_0^2 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{r}}.$$

Pokúsme sa nájsť predpis funkcie $\psi(\varphi)$, ktorá je implicitne zadaná rovnicou $H(\varphi, \psi) = \varepsilon$ v okolí bodu $[0, \pm\psi_0]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r\psi^2 + g(1 - \cos \varphi) &= \varepsilon, \\ \psi^2 &= \frac{2g}{r}(\cos \varphi - 1) + \frac{2\varepsilon}{r}, \\ \psi &= \pm \sqrt{\frac{2g}{r}(\cos \varphi - 1) + \frac{2\varepsilon}{r}} \end{aligned} \quad (1)$$

Posledný výraz definuje funkciu ψ , kým je výraz pod odmocninou nezáporný. Pozrime sa, ktoré hodnoty φ túto podmienku spĺňajú:

$$\begin{aligned} \frac{2g}{r}(\cos \varphi - 1) + \frac{2\varepsilon}{r} &\geq 0, \\ \cos \varphi &\geq 1 - \frac{\varepsilon}{g}, \end{aligned}$$

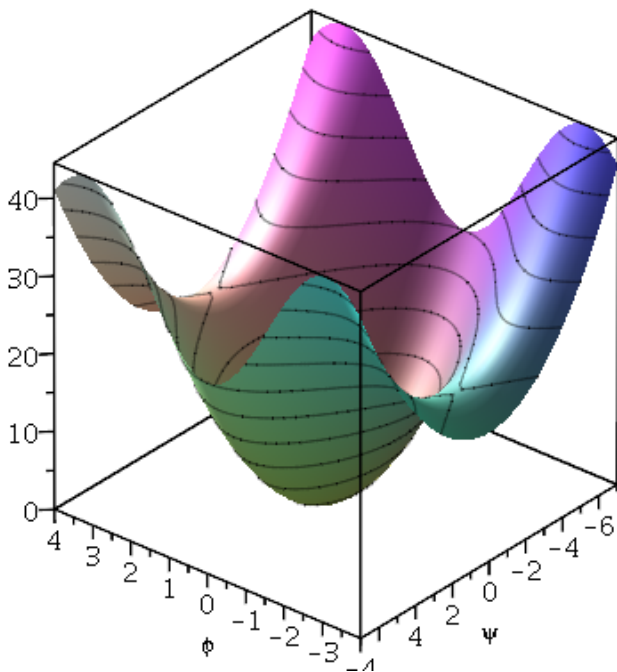
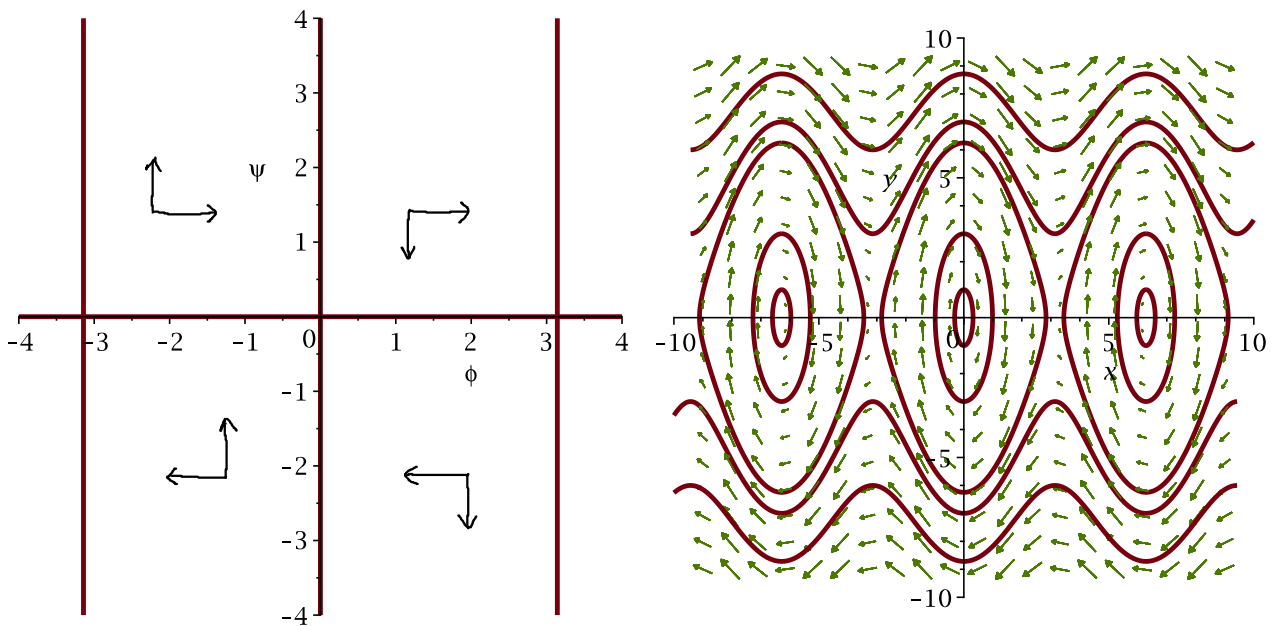
čo znamená, že uvedenú podmienku spĺňa každé

$$\varphi \in \left[-\arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{g}\right), \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{g}\right)\right]. \quad (2)$$

Špeciálne, funkcia ψ definovaná rovnosťou (1) so znamienkom $+$ je kladná vo vnútri tohto intervalu a rovná nule pre $\varphi = \pm \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{g}\right)$. Podobne, ak vezmeme znamienko $-$, dostaneme zápornú funkciu na intervale $(-\arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{g}\right), \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{g}\right))$ a nulovú v bodoch $\pm \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{g}\right)$. Vrstevnica $H(\varphi, \psi) = \varepsilon$ sa teda skladá z dvoch oblúkov $[\varphi, \pm\psi(\varphi)]$, kde φ je z intervalu (2) a ψ je definované rovnosťou (1), takže sa skutočne jedná o uzavretú krivku. Predpokladajme ďalej $\varepsilon < 2g$, teda $[-\arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{g}\right), \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon}{g}\right)] \subset [-\pi, \pi]$. Na vrstevnici $H(\varphi, \psi) = \varepsilon$ preto neleží žiadny stacionárny bod a pozdĺž tejto krivky je vektorové pole (f, g) nenulové. To stačí na to, aby vrstevnica $H(\varphi, \psi) = \varepsilon$ bola cyklom. Pre $\varepsilon < 2g$ nerovnosť $H(\varphi, \psi) < \varepsilon$ určuje okolie bodu $[0, 0]$ s vlastnosťou, že každá trajektória začínajúca v tejto množine je cyklom obsahujúcim bod $[0, 0]$ vo svojom vnútri, takže $[0, 0]$ je skutočne stred.

Pozrime sa tiež bližšie na prípad $\varepsilon = 2g$. Vrstevnica $H(\varphi, \psi) = \varepsilon$ je síce stále uzavretá po častiach hladká krivka, avšak tentokrát obsahuje aj stacionárne body $[\pm\pi, 0]$. To znamená, že sa nejedná o cyklus, ale o zjednotenie dvoch stacionárnych bodov a dvoch heteroklinických trajektorií určených grafmi funkcií $\psi = \pm \sqrt{\frac{2g}{r}(\cos \varphi + 1)}$ spájajúcich tieto stacionárne body. Heteroklinická trajektória reprezentuje situáciu, kedy je v nejakom čase rozdiel medzi maximálnou možnou potenciálnou energiou a aktuálnou potenciálnou energiou kyvadla presne kompenzovaný aktuálnou kinetickou energiou kyvadla. To znamená, že kyvadlo sa limitne blíži k nestabilnej rovnovážnej polohe nachádzajúcej sa presne nad bodom, v ktorom je prichytené.

Pre $\varepsilon > 2g$ sa už funkcie $\psi(\varphi)$ určené predpisom (1) nuly nedotknú a sú definované pre každé $\varphi \in \mathbb{R}$. Ak teda nejaké riešenie $(\varphi(t), \psi(t))$ spĺňa v nejakom čase t_0 podmienku $H(\varphi(t_0), \psi(t_0)) > 2g$, potom je toto riešenie neohraničené. To charakterizuje situáciu, kedy má kyvadlo dostatok energie na to, aby sa neustále otáčalo okolo bodu, v ktorom je prichytené.



Príklad 4. Uvažujme o nasledujúcom autonómnom systéme:

$$\begin{aligned} CV' &= -g_L(V - E_L) - g_K m^4(V - E_K), \\ m' &= \alpha(V)(1 - m) - \beta(V)m, \end{aligned}$$

kde C , g_L a g_K sú kladné konštanty, E_L a E_K sú konštanty spĺňajúce nerovnosť $E_L > E_K$, a nakoniec funkcie α a β sú definované takto:

$$\alpha(V) = 0,01 \cdot \frac{10 - V}{\exp\left(\frac{10 - V}{10}\right) - 1}, \quad \beta(V) = 0,125 \exp\left(-\frac{V}{80}\right).$$

Ukážte, že tento systém má jediný stacionárny bod a presvedčte sa o tom, že je stabilný. Dokážte, že systém nemá cyklus.

Riešenie. Uvedený model popisuje chovanie neurónu a je zjednodušenou verziou Hodgkinho-Huxleyho modelu. Veličina V je napätie na membráne a m charakterizuje priepustnosť kanálu,

ktorým prechádzajú sodíkové katióny. Pre viac detailov odporúčame pozrieť sa na druhú kapitolu v [1].

Začneme V -nulklinou, ktorá je určená nasledujúcou rovnicou:

$$\begin{aligned} -g_L(V - E_L) - g_K m^4(V - E_K) &= 0, \\ V(g_L + g_K m^4) &= g_L E_L + g_K E_K m^4, \\ V &= \frac{g_L E_L + g_K E_K m^4}{g_L + g_K m^4} = E_K + \frac{g_L(E_L - E_K)}{g_L + g_K m^4}. \end{aligned}$$

Výraz $g_L + g_K m^4$ je kladný a v treťom riadku sme delili polynómy so zvyškom. Vyšetrite priebeh funkcie $f(m)$ definovanej pravou stranou poslednej rovnosti. Jej derivácia má tvar

$$f'(m) = -\frac{4g_K g_L (E_L - E_K) m^3}{(g_L + g_K m^4)^2}.$$

Tá je kladná na intervale $(-\infty, 0)$, záporná na intervale $(0, \infty)$ a nulová v bode 0. Preto je funkcia f na intervale $(-\infty, 0)$ rastúca, na intervale $(0, \infty)$ je klesajúca a v bode 0 má globálne maximum s hodnotou $f(0) = E_L$. Tiež platí $\lim_{m \rightarrow \pm\infty} f(m) = E_K$.

Pred tým, ako sa začneme venovať m -nulklíne, vyšetříme niektoré vlastnosti funkcií α a β . Funkcia β je evidentne kladná a klesajúca. Ak zavedieme substitúciu $x = \frac{10-V}{10}$ môžeme predpis funkcie α vyjadriť v tvare

$$g(x) = 0,1 \cdot \frac{x}{e^x - 1}.$$

Najprv si uvedomme, že táto funkcia je spojitou dodefinovateľná v bode $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{L'Hosp.}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1.$$

Teraz sa pozrieme na jej deriváciu na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$g'(x) = 0,1 \cdot \frac{e^x - 1 - x e^x}{(e^x - 1)^2} = 0,1 \cdot \frac{e^x(1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2}.$$

Pre $x \neq 0$ platí

$$1 - x < e^{-x} \quad \Rightarrow \quad e^x(1 - x) < 1 \quad \Rightarrow \quad e^x(1 - x) - 1 < 0,$$

čo znamená, že $g'(x) < 0$ pre $x \neq 0$. Derivácia v bode $x = 0$ sa dá vypočítať nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{L'Hosp.}} \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0,1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1 - x) - 1}{(e^x - 1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{L'Hosp.}} 0,1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x e^x}{2(e^x - 1)e^x} \\ &= 0,1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2(e^x - 1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{L'Hosp.}} 0,1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2e^x} = 0,1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) < 0. \end{aligned}$$

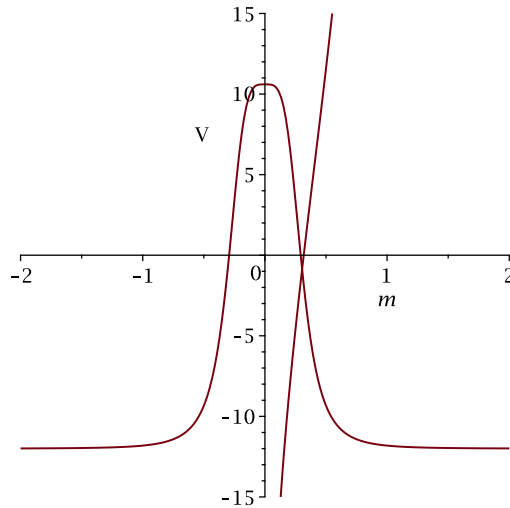
Funkcia $g(x)$ je na celom \mathbb{R} klesajúca, čo znamená, že funkcia $\alpha(V)$ je na celom \mathbb{R} rastúca. Navyše je zrejme α všade kladná.

Sme pripravení vyšetriť priebeh m -nulklíny. Tá je určená rovnosťou

$$\begin{aligned} \alpha(V)(1 - m) - \beta(V)m &= 0, \\ m(\alpha(V) + \beta(V)) &= \alpha(V), \\ m &= \frac{\alpha(V)}{\alpha(V) + \beta(V)} = \frac{1}{1 + \frac{\beta(V)}{\alpha(V)}}. \end{aligned}$$

Označme symbolom $h(V)$ pravú stranu poslednej rovnosti. Keďže β je klesajúca a α je rastúca funkcia, je $1 + \beta/\alpha$ klesajúca funkcia, čo vedie k tomu, že h je rastúca funkcia. Navyše, h je tiež kladná funkcia.

Pokúsme sa dať dokopy všetko, čo sa nám doteraz podarilo zistiť. Pre $m \geq 0$ je V -nulklina grafom spojitej klesajúcej funkcie v premennej m , ktorej hodnoty ležia v intervale $[E_L, E_K)$. To znamená, že táto nulklina je pre $m \geq 0$ zároveň grafom spojitej rastúcej funkcie na intervale $[E_L, E_K)$ v premennej V , pričom jej hodnota v E_L je 0 a jej limita zľava v bode E_K je ∞ . Pripomeňme, že m -nulklina je grafom kladnej spojitej klesajúcej funkcie v premennej V . Všetky uvedené argumenty implikujú, že nulkliny sa pretnú práve v jednom bode (najlepšie bude, keď si nakreslíte obrázok).



Charakter tohto stacionárneho bodu vyšetríme pomocou znamienka determinantu a stopy matice $J(V, m)$ linearizovaného systému:

$$J(V, m) = \begin{pmatrix} -g_L - g_K m^4 & -4g_K m^3(V - E_K) \\ \alpha'(V)(1 - m) - \beta'(V)m & -\alpha(V) - \beta(V) \end{pmatrix},$$

$$\text{tr } J(V, m) = -g_L - g_K m^4 - \alpha(V) - \beta(V),$$

$$\det J(V, m) = (g_L + g_K m^4)(\alpha(V) + \beta(V)) + 4g_K m^3(V - E_K)(\alpha'(V)(1 - m) - \beta'(V)m).$$

Výraz $-g_L - g_K m^4 - \alpha(V) - \beta(V)$ je pre každé (V, m) záporný, a preto je $\text{tr } J(V, m) < 0$ a prvý sčítanec determinantu je kladný. Vzhľadom k tomu, že stacionárny bod leží na V -nulkline, v tomto bode platí $V - E_K < 0$. Zostáva nám už len vyšetriť znamienko výrazu $\alpha'(V)(1 - m) - \beta'(V)m$. V okolí stacionárneho bodu rovnosť $\alpha(V)(1 - m) - \beta(V)m = 0$ implicitne zadáva klesajúcu funkciu $h(V)$. Pre jej deriváciu platí:

$$h'(V) = -\frac{(\alpha(V)(1 - m) - \beta(V)m)_V}{(\alpha(V)(1 - m) - \beta(V)m)_m} = \frac{\alpha'(V)(1 - m) - \beta'(V)m}{\alpha(V) + \beta(V)} < 0,$$

čo znamená, že výraz $\alpha'(V)(1 - m) - \beta'(V)m$ je záporný. V konečnom dôsledku je uvedený determinat kladný. Stacionárny bod je preto buď stabilný uzol, alebo stabilné ohnisko.

Zostáva nám ukázať, že uvedený systém nemá cyklus. Na to použijeme Bendixsonovo kritérium (Dôsledok 6 na strane 90 v skriptách). Označme symbolmi $(a(V, m), b(V, m))^T$ pravú stranu systému a počítajme:

$$\frac{\partial a}{\partial V} + \frac{\partial b}{\partial m} = -g_L - g_K m^4 - \alpha(V) - \beta(V) < 0.$$

Uvedená nerovnosť platí pre všetky dvojice $(V, m) \in \mathbb{R}^2$, takže predpoklady Bendixsonovho kritéria sú splnené a systém nemá v \mathbb{R}^2 cyklus. \rightarrow

Príklad 5. Uvažujme o nasledujúcom autonómnom systéme:

$$\begin{aligned}x' &= -x + ay + x^2y, \\y' &= b - ay - x^2y,\end{aligned}$$

kde $a, b > 0$ sú parametre. Nájdite oblasť parametrov, pre ktoré má uvedený systém v množine $x, y \geq 0$ periodické riešenie.

Riešenie. Uvedený systém je známy ako Sel'kovov model glykolýzy. Premenné x a y reprezentujú koncentrácie adenosíndifosfátu a fruktóza-6-fosfátu. Pre viac informácií môže čitateľ nahliadnuť do [3, 4].

Najprv nájdeme nulkliny. Prvá z nich, x -nulklina, je grafom funkcie $y = \frac{x}{a+x^2}$, zatiaľčo y -nulklina je grafom funkcie $y = \frac{b}{a+x^2}$. Ich prienik nájdeme ako riešenie nasledujúcej sústavy rovníc: $-x + ay + x^2y = 0$, $b - ay - x^2y = 0$. Po sčítaní oboch rovníc dostaneme rovnosť $x = b$. Po dosadení tohto výsledku do niektorej z nich dostaneme $y = \frac{b}{a+b^2}$. Dvojica $[b, \frac{b}{a+b^2}]$ je preto jediný stacionárny bod systému.

Ďalší krok našej analýzy bude pokus nájsť kompaktnú pozitívne invariantnú množinu v prvom kvadrante. Na ose y platí $x' = ay \geq 0$, takže trajektórie na kladnej časti osi y smerujú dovnútra kvadrantu. Na ose x platí $y' = b > 0$, takže trajektórie na kladnej časti osi x tiež smerujú dovnútra spomínaného kvadrantu. Podľa charakteru x -nulkliny môžeme tiež usúdiť, že aj riešenie začínajúce v počiatku smeruje do kvadrantu. To všetko dokazuje pozitívnu invariantnosť prvého kvadrantu. Zostáva nám vhodnými krivkami ohraničiť roh tohto kvadrantu. Zvoľme konštantu $c > \frac{b}{a}$ a pozrime sa ako vyzerá vektorové pole pozdĺž priamky $y = c$. Spočítame skalárny súčin vektora $(0, -1)$, čo je vektor kolmý na priamku $y = c$ smerujúci dole, s vektormi $(-x + ay + x^2y, b - ay - x^2y)$ pozdĺž priamky $y = c$:

$$\langle (0, -1), (-x + ac + x^2c, b - ac - x^2c) \rangle = ac + x^2c - b > 0,$$

pretože

$$\frac{b}{a+x^2} \leq \frac{b}{a} < c \quad \Rightarrow \quad ac + x^2c = c(a+x^2) > b,$$

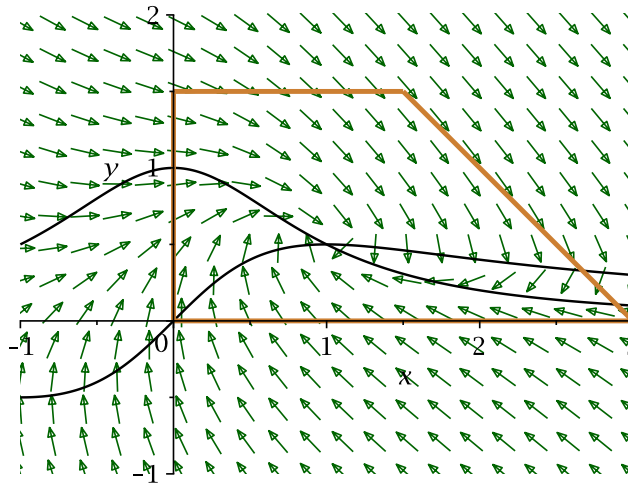
kde prvá nerovnosť je dôsledkom faktu, že $\frac{b}{a}$ je globálne maximum funkcie $\frac{b}{a+x^2}$. Vektorové pole pozdĺž priamky $y = c$ zvierá s vektorom $(0, -1)$ ostrý uhol, a preto trajektórie začínajúce na tejto priamke smerujú pod ňu. Vyšetrite teraz uhol, ktorý zvierá naše vektorové pole s vektorom $(-1, -1)$:

$$\langle (-1, -1), (-x + ay + x^2y, b - ay - x^2y) \rangle = x - b.$$

To znamená, že tento uhol je ostrý pre $x > b$. Pre $x > b$ budú trajektórie v prvom kvadrante začínajúce na priamke $y = -x + d + c$, kde $d > b$ je ľubovoľné, smerovať pod ňu. Túto analýzu môžeme zhrnúť tvrdením, že množina

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, y \leq c, y \leq -x + d + c\}$$

je pozitívne invariantná. Vzhľadom k tomu, že je tiež ohraničenou a uzavretou podmnožinou Euklidovského priestoru, je tiež kompaktná.



Venujme sa charakteru stacionárneho bodu. Za tým účelom vypočítame Jacobiho maticu systému, jej stopu a determinant:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -a - x^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \text{tr } J(x, y) &= -x^2 + 2xy - a - 1, \\ \det J(x, y) &= (a + x^2)(1 - 2xy) + 2xy(a + x^2) \\ &= a + x^2 > 0. \end{aligned}$$

Determinant je vždy kladný a stopa v stacionárnom bode má hodnotu

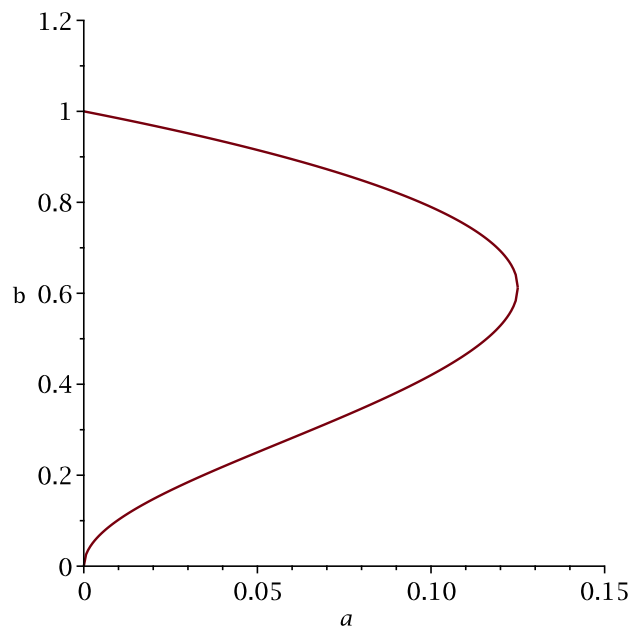
$$\text{tr } J\left(b, \frac{b}{a + b^2}\right) = -b^2 + \frac{2b^2}{a + b^2} - a - 1 = \frac{-b^4 - (2a - 1)b^2 - (a + a^2)}{a + b^2}.$$

Nás zaujíma situácia, kedy bude stopa kladná, teda prípady, kedy je stacionárny bod buď nestabilný uzol alebo nestabilné ohnisko. Riešime nerovnicu

$$0 > b^4 + (2a - 1)b^2 + a + a^2,$$

kde pravú stranu chápeme ako kvadratický polynóm v premennej b^2 . Jej diskriminant má tvar $(2a - 1)^2 - 4(a + a^2) = 1 - 8a$ a všimnime si, že koeficient pri najvyššej mocnine je kladný. Uvedená nerovnica má zrejme riešenie len v prípade, kedy je diskriminant kladný. V takom prípade sú riešením všetky hodnoty $b > 0$, pre ktoré platí

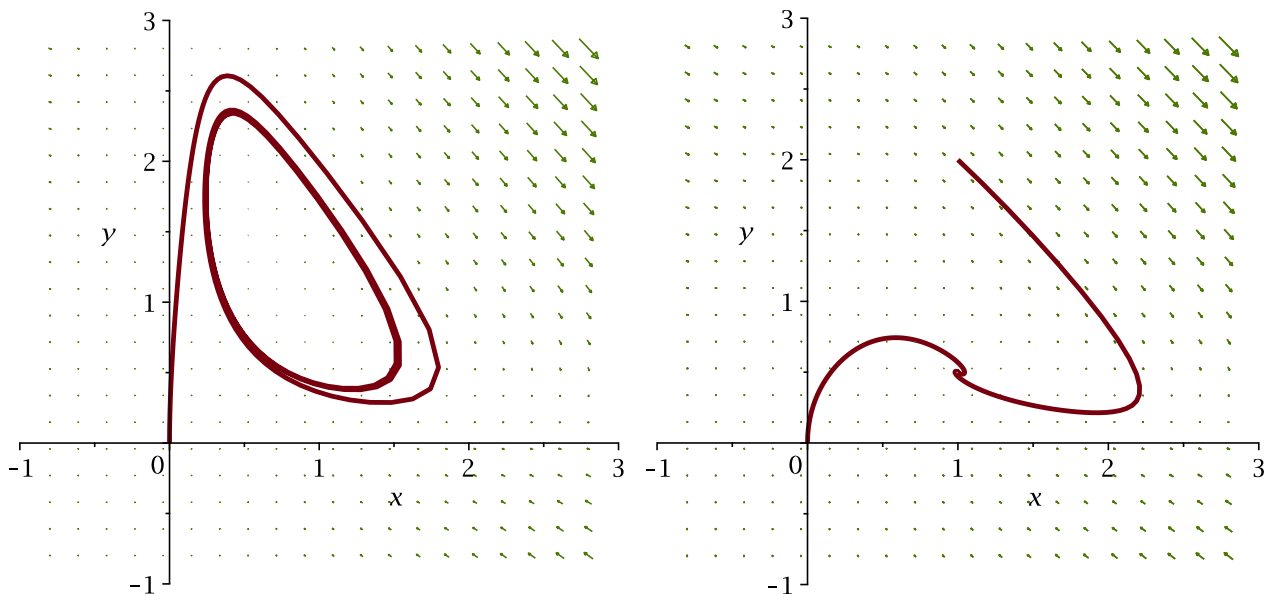
$$\frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 8a}}{2} \leq b^2 \leq \frac{1 - 2a + \sqrt{1 - 8a}}{2}.$$



Z vlastností nestabilných uzlov a ohnísk v rovine môžeme usúdiť, že existuje otvorené okolie týchto bodov, ktorých hranica je hladká uzavretá krivka, s tou vlastnosťou, že akákoľvek trajektória začínajúca na tejto hranici vychádza von z tohto okolia. Označme symbolom U nejaké okolie nášho stacionárneho bodu, ktoré spĺňa túto podmienku a navyše platí $\bar{U} \subseteq K$. Môžeme usúdiť, že množina $M = K \setminus U$ je kompaktná pozitívne invariantná množina. Pripomeňme Poincarého-Bendixsonovu vetu uvedenú v [2] na strane 11, ktorá dáva postačujúcu podmienku pre výskyt cyklu:

Veta 1. *Nech C^+ je trajektória riešenia $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$ majúca kompaktný uzáver v \mathbb{R}^2 . Predpokladajme, že ω -limitná množina $\Omega(C^+)$ neobsahuje stacionárne body. Potom je $\Omega(C^+)$ cyklus.*

Predpokladajme, že parametre a a b spĺňajú vyššie uvedené nerovnosti. Zvoľme ľubovoľné riešenie $(x(t), y(t))$ nášho systému spĺňajúce $(x(0), y(0)) \in M$. Vzhľadom k tomu, že M je pozitívne invariantná množina, platí $C^+ = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [0, \infty)\} \subseteq M$. Z vlastností uzáveru množiny tiež vyplýva nasledujúca inklúzia: $\bar{C}^+ \subseteq \bar{M} = M$. Keďže je uzáver \bar{C}^+ množiny C^+ podmnožinou kompaktnej množiny M , sám je kompaktný. Keďže platí $\Omega(C^+) \subseteq \bar{C}^+ \subseteq M$ a M neobsahuje žiadny stacionárny bod, neobsahuje žiadny stacionárny bod ani ω -limitná množina $\Omega(C^+)$. Trajektória riešenia $(x(t), y(t))$ evidentne spĺňa predpoklady Poincarého-Bendixsonovej vety, čo znamená, že $\Omega(C^+)$ je cyklus.



→

Literatúra

- [1] IZHKEVICH, Eugene M. Dynamical systems in neuroscience. MIT press, 2007.
- [2] KALAS, Josef, POSPÍŠIL, Zdeněk. Spojité Modely v Biológii. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001.
- [3] SELKOV, E. E. Self-Oscillations in Glycolysis 1. A Simple Kinetic Model. European Journal of Biochemistry, 1968, 4.1: 79-86.
- [4] STROGATZ, Steven H. Nonlinear dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub., 1994.