M5858 Spojité deterministické modely I, cvičenie, 8.12.2021

Epidemiologické modely

Pri štúdiu šírenia epidémie môžeme vo všeobecnosti rozdeliť populáciu na štyri skupiny. Tieto skupiny, respektíve počty jedincov v jednotlivých skupinách budeme značiť postupne symbolmi S, E, I a R. Skupina S pozostáva zo zdravých jedincov náchylných k infekcii. Skupina E je tvorená jedincami nachádzajúcimi sa v latentnom období teda tými, ktorí sú už síce nakazení, ale ešte nie sú schopní nákazu šíriť. Skupinu označenú symbolom I tvoria nakazení jedinci, ktorí sú zároveň šíriteľmi ochorenia. V skupine R sú zahrnutí jedinci, ktorí ochoreli, ale ochorenie ďalej nešíria, teda napríklad vyliečení alebo izolovaní jedinci. Na základe konkrétnych predpokladov o chovaní epidémie a populácie môžeme charakterizovať spôsob prechodu jedincov medzi jednotlivými skupinami a tým konštruovať konkrétne modely. V každom z nasledujúcich modelov budeme predpokladať, že veľkosť populácie sa v čase nemení. Zdôraznime, že všetky uvažované systémy sú autonómne s polynomiálnou pravou stranou definovanou na celom $\mathbb{R}^n$, čo znamená, že akýkoľvek počiatočný problém má jediné úplné riešenie.

Model SI

Začneme najjednoduchším modelom. Predpokladajme, že dĺžka latentného obdobia je zanedbateľná a ignorujme vplyv izolácie či uzdravenia, teda v našom modeli nebudeme uvažovať populačné skupiny E a R. Tieto predpoklady sú relevantné v počiatočných štádiách niektorých ochorení. Vzhľadom k tejto skutočnosti je konštantnosť veľkosti populácie určená vzťahom $S + I = N$. Tento model môžeme reprezentovať nasledujúcou schémou:

$$S \xrightarrow{\beta} I$$

kde $\beta > 0$ je tzv. koeficient šírenia nákazy, ktorý vyjadruje mieru prechodu jedincov zo skupiny S do skupiny I. Môžeme si ho predstaviť ako súčin relatívneho počtu kontaktov v populácii za jednotku času a pravdepodobnosti prenosu choroby pri kontakte z člena skupiny I na člena skupiny S. Prírastok do skupiny I respektíve úbytok zo skupiny S za čas Δt je

$$\Delta I = -\Delta S = \Delta t \beta S I.$$

Po vydelení rovnice veličinou Δt a limitným prechodom $\Delta t \to 0$ dostaneme nasledujúci systém diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I, \\ I' &= \beta S I. \end{aligned}$$

Všimnite si, že rovnosť $S' + I' = 0$ korešponduje s predpokladom $S(t) + I(t) = N$. Vzťah $S = N - I$ môžeme dosadiť do druhej rovnice, čo nás privedie k rovnici so separovanými premennými:

$$I' = \beta(N - I)I.$$

Nájdime riešenie tejto rovnice spĺňajúce počiatočnú podmienku $I(0) = I_0$. Ak $I_0 = 0$ alebo $I_0 = N$, potom má riešenie zrejme tvar $I(t) \equiv 0$ alebo $I(t) \equiv N$. V opačnom prípade postupujme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} I' &= \beta(N - I)I, \\ \frac{I'}{(N - I)I} &= \beta \qquad \Big/ \int_0^t \mathrm{d}s\ , \end{aligned}$$

$$\int_0^t \frac{I'(s)}{(N-I(s))I(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^t \beta\,\mathrm{d}s = \beta t.$$

Integrál na ľavej strane vypočítame nasledujúcim spôsobom:

$$\int_0^t \frac{I'(s)}{(N-I(s))I(s)}\,\mathrm{d}s \left| \begin{array}{ll} I(s) = u & t \rightsquigarrow I(t) \\ I'(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}u & 0 \rightsquigarrow I_0 \end{array} \right| = \int_{I_0}^{I(t)} \frac{1}{(N-u)u} = \frac{1}{N}\int_{I_0}^{I(t)} \frac{1}{N-u} + \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{N}\left[\log\frac{u}{N-u}\right]_{I_0}^{I(t)} = \frac{1}{N}\left(\log\frac{I(t)}{N-I(t)} - \log\frac{I_0}{N-I_0}\right) = \frac{1}{N}\log\left(\frac{I(t)}{I_0}\cdot\frac{N-I_0}{N-I(t)}\right).$$

Výsledok dosaďme a upravme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\log\left(\frac{I(t)}{I_0}\cdot\frac{N-I_0}{N-I(t)}\right) &= \beta t, \\
\frac{I(t)}{I_0}\cdot\frac{N-I_0}{N-I(t)} &= \mathrm{e}^{N\beta t}, \\
I(t)\cdot(N-I_0) &= (N-I(t))I_0\mathrm{e}^{N\beta t}, \\
I(t)\cdot\left(N-I_0+I_0\mathrm{e}^{N\beta t}\right) &= NI_0\mathrm{e}^{N\beta t}, \\
I(t) &= \frac{NI_0\mathrm{e}^{N\beta t}}{N-I_0+I_0\mathrm{e}^{N\beta t}} = \frac{N}{1+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\mathrm{e}^{-\beta N t}}.
\end{aligned}$$

Grafom tejto funkcie je logistická krivka. Všimnime si, že $\lim_{t\to\infty} I(t) = N$. Funkcia počtu nových prípadov je v skutočnosti mierou zmeny funkcie $I(t)$, teda jej deriváciou:

$$I'(t) = \frac{\beta N^2\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\mathrm{e}^{-\beta N t}}{\left(1+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\mathrm{e}^{-\beta N t}\right)^2} = \frac{\beta N^2\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\mathrm{e}^{\beta N t}}{\left(\frac{N}{I_0}-1+\mathrm{e}^{\beta N t}\right)^2}.$$

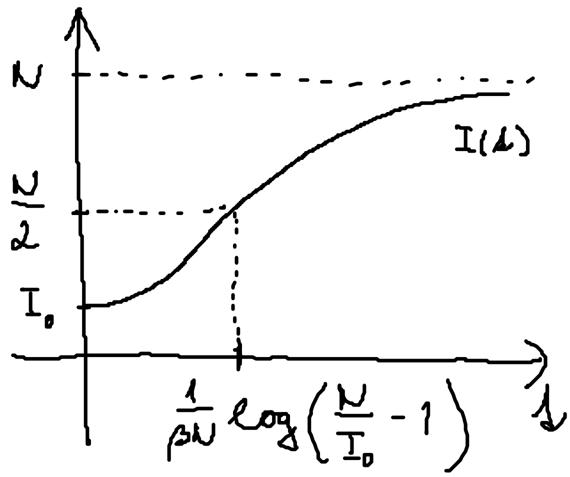
Jej graf sa nazýva epidemická krivka. Typickým javom je počiatočné narastanie počtu nových prípadov. Po dosiahnutí maxima počty nových prípadov neustále klesajú. Presvedčme sa o tom výpočtom. Nájdeme stacionárne body prvej derivácie: $I''(t) =$

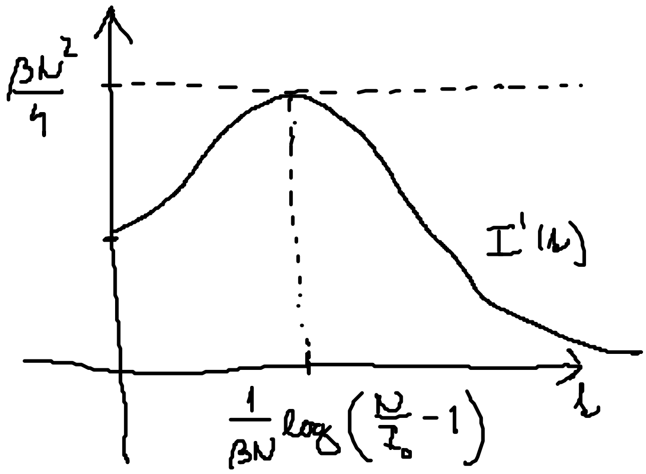
$$\frac{\beta^2N^3\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\mathrm{e}^{\beta N t}\left(\mathrm{e}^{\beta N t}+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\right)^2 - 2\beta^2N^3\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\mathrm{e}^{\beta N t}\left(\mathrm{e}^{\beta N t}+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\right)\mathrm{e}^{\beta N t}}{\left(\frac{N}{I_0}-1+\mathrm{e}^{\beta N t}\right)^4}$$
$$= \frac{\beta^2N^3\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\mathrm{e}^{\beta N t}\left(\mathrm{e}^{\beta N t}+\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\right) - 2\beta^2N^3\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\mathrm{e}^{2\beta N t}}{\left(\frac{N}{I_0}-1+\mathrm{e}^{\beta N t}\right)^3}$$
$$= \frac{\beta^2N^3\left(\frac{N}{I_0}-1\right)\mathrm{e}^{\beta N t}\left(\frac{N}{I_0}-1-\mathrm{e}^{\beta N t}\right)}{\left(\frac{N}{I_0}-1+\mathrm{e}^{\beta N t}\right)^3}.$$

Stacionárny bod je riešením rovnice

$$\frac{N}{I_0} - 1 - \mathrm{e}^{\beta N t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{\beta N t} = \frac{N}{I_0} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{\beta N} \log\left(\frac{N}{I_0} - 1\right).$$

Vzhľadom k tomu, že druhá derivácia je naľavo od tohto bodu kladná a napravo záporná, má funkcia $I'(t)$ v tomto bode globálne maximum a naľavo od tohto bodu je rastúca a napravo je klesajúca. Funkcia $I(t)$ má v tomto bode inflexný bod a funkčnú hodnotu $\frac{N}{2}$.





Model SIR

Teraz do našich úvah pridáme populačnú skupinu R, čo nás privedie k modelu SIR. Znázorniť ho môžeme nasledujúcou schémou:

$$(S) \xrightarrow{\beta} (I) \xrightarrow{\nu} (R)$$

kde $\nu > 0$ je koeficient popisujúci rýchlosť prechodu členov skupiny I do skupiny R. Rovnice definujúce tento model majú nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I, \\ I' &= \beta S I - \nu I, \\ R' &= \nu I. \end{aligned}$$

Fakt, že $S' + I' + R' = 0$, opäť korešponduje s predpokladom $S(t) + I(t) + R(t) = N$ o konštantnej veľkosti populácie. Venujme sa nasledujúcemu počiatočnému problému:

$$S(0) = S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = 0, \quad S_0 + I_0 = N.$$

Všimnime si, že prvé dve rovnice systému nezávisia od premennej R. Môžeme ich preto študovať samostatne ako autonómny systém v rovine:

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I, \\ I' &= \beta S I - \nu I. \end{aligned}$$

Začneme nulklinami. S-nulklina je zjednotením priamok $S = 0$ a $I = 0$. Na druhej strane, I-nulklina je zjednotením priamok $S = \nu/\beta$ a $I = 0$. To znamená, že každý jeden bod na osi S je stacionárny bod a žiadne iné stacionárne body neexistujú. Ďalej si všimnime, že kladná časť osi I je invariantná množina (v skutočnosti je trajektóriou riešenia $S(t) = 0$, $I(t) = \exp(-\nu t)$). V konečnom dôsledku môžeme povedať, že prvý kvadrant je pozitívne invariantná množina, čo by sme v kontexte modelovaného javu aj očakávali. Dokonca pre akékoľvek riešenie spĺňajúce $S(0) > 0$ a $I(0) > 0$ platí $S(t) > 0$ a $I(t) > 0$ pre každé $t \in [0, \infty)$. Pre $S \leq \nu/\beta$ je $I' \leq 0$, čo znamená, že počiatočné podmienky v tejto oblasti vedú k riešeniam, ktorých zložka $I(t)$ pre $t \in [0, \infty)$ klesá. Takže v takom prípade k prepuknutiu epidémie nedôjde. Ďalej budeme predpokladať, že $S_0 > \nu/\beta$.

Pokúsme sa odvodiť tvar trajektórií. Za tým účelom budeme študovať vlastnosti riešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = \frac{\beta SI - \nu I}{-\beta SI} = \frac{\rho - S}{S},$$

kde $\rho = \nu/\beta$. Pre $0 < S < \rho$ riešenia tejto rovnice rastú a pre $S > \rho$ klesajú. Navyše pre ich druhú deriváciu platí

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}S^2} = -\frac{\rho}{S^2} < 0,$$

čo znamená, že tieto riešenia sú konvexné funkcie. Rovnicu s počiatočnou podmienkou $I(S_0) = I_0$ môžeme dokonca vyriešiť a okrem iného nájsť hodnotu globálneho maxima:

$$I'(S) = \frac{\rho}{S} - 1 \qquad \Big/ \int_{S_0}^{S} \mathrm{d}s$$

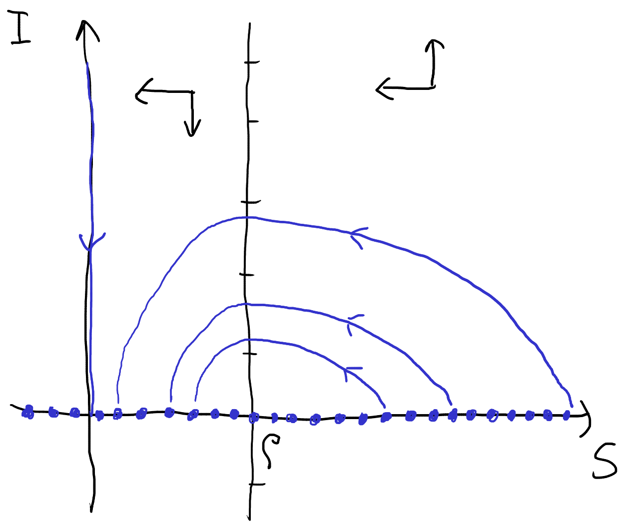
$$\left| \begin{array}{ll} I(s) = u & S \rightsquigarrow I(S) \\ I'(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}u & S_0 \rightsquigarrow I_0 \end{array} \right| \qquad \int_{S_0}^{S} I'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{S_0}^{S} \frac{\rho}{s} - 1\,\mathrm{d}s$$

$$\int_{I_0}^{I(S)} \mathrm{d}u = [\rho \log s - s]_{S_0}^{S}$$

$$\begin{aligned} I(S) &= \rho \log S - S - \rho \log S_0 + S_0 + I_0 \\ &= \rho \log \frac{S}{S_0} - S + N. \end{aligned}$$

V bode globálneho maxima platí

$$I(\rho) = \rho \left(\log \frac{S}{S_0} - 1 \right) + N.$$



Vráťme sa k pôvodnému trojrozmernému systému. Už sme sa presvedčili o tom, že riešenie $(S(t), I(t), R(t))$ nami študovaného počiatočného problému spĺňa $I(t) > 0$ pre každé $t \in [0, \infty)$.

Podľa poslednej rovnice je $R'(t) > 0$ pre každé $t \in [0, \infty)$, čo implikuje $R(t) > 0$ pre každé $t \in (0, \infty)$. Vďaka tomu pre každé nezáporné t platí $0 \leq S(t), I(t), R(t) \leq N$, takže riešenie je ohraničené, a preto je definované pre každé $t \geq 0$. Teraz sa pokúsime vyšetriť správanie riešenia pre $t \to \infty$. Medzitým ešte raz formálne odvodíme niektoré zrejmé skutočnosti. Sčítanie ν-násobku prvej rovnice s βS-násobkom treťej rovnice nás privedie k rovnici

$$\nu S' + \beta S R' = 0,$$

ktorá má podobnú štruktúru ako exaktná diferenciálna rovnica. Vynásobme túto rovnicu funkciou $k(S, R)$, ktorú špecifikujeme neskôr:

$$k(S, R)\nu S' + k(S, R)\beta S R' = 0.$$

Ak existuje funkcia $F(S, I, R)$ s vlastnosťou

$$\frac{\partial F}{\partial S} = k(S, R)\nu, \qquad \frac{\partial F}{\partial I} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial R} = k(S, R)\beta S,$$

potom je táto funkcia zrejme prvý integrál nášho systému. Na to, aby táto funkcia existovala, nám stačí

$$\frac{\partial}{\partial R}(k(S, R)\nu) = \frac{\partial}{\partial S}(k(S, R)\beta S).$$

Takže budeme postupovať rovnako ako v prípade exaktných rovníc. Označme $M(S, R) = \nu$ a $N(S, R) = \beta S$. Keďže $M_R = 0 \neq \beta = N_S$, funkcia $k(S, R)$ je netriviálna. Vzhľadom k tomu, že $(N_S - M_R)/M = \beta/\nu = 1/\rho$ je funkcia premennej R (konštantná), môžeme hľadať integračný faktor ako funkciu $k(R)$, ktorá je riešením rovnice $k' = k/\rho$. Jej partikulárne riešenie je $k = \exp(R/\rho)$. Pozrime sa na funkciu F:

$$F(S, R) = \int \nu e^{\frac{R}{\rho}} \, dS = \nu S e^{\frac{R}{\rho}} + c(R),$$

$$F_R = \beta S e^{\frac{R}{\rho}} + c'(R) = \beta S e^{\frac{R}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad c'(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(R) = c_0 \in \mathbb{R}.$$

Napríklad funkcia $F(S, R) = \nu S e^{\frac{R}{\rho}}$ je prvým integrálom nášho systému, čo znamená, že jej hodnoty sú pozdĺž riešení konštantné. Takže ak $F(S_0, 0) = \nu S_0$, potom pre každé t platí $F(S(t), R(t)) = \nu S_0$, teda

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} R(t)}.$$

Ukážme si jednoduchší spôsob, ktorý nás privedie k rovnakému výsledku. Ak vydelíme prvú rovnicu treťou, dostaneme lineárnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{S}{\rho},$$

ktorej riešenie má tvar

$$S = S_0 e^{-\frac{1}{\rho} R},$$

čo po dosadení času t dá ten istý výsledok.

Keďže $R(t) \geq 0$, platí $0 < S \leq S_0 < N$ a navyše na základe analýzy S-nulklín vieme, že $S(t)$ je klesajúca funkcia. Z poslednej rovnice tiež môžeme vyjadriť funkciu $R(t)$:

$$R(t) = -\rho \log \frac{S(t)}{S_0}.$$

Ďalej platí

$$\begin{aligned} R'(t) = \nu(N - S(t) - R(t)) &\le \nu(N - R(t)), \\ R'(t) + \nu R(t) &\le \nu N, \qquad /\mathrm{e}^{\nu t} \\ R'(t)\mathrm{e}^{\nu t} + \nu R(t)\mathrm{e}^{\nu t} &\le \nu N \mathrm{e}^{\nu t}, \\ (R(t)\mathrm{e}^{\nu t})' &\le \nu N \mathrm{e}^{\nu t}. \end{aligned}$$

Poslednú rovnosť môžeme integrovať v medziach od 0 do t, čo nás privedie k nerovnosti

$$\begin{aligned} R(t)\mathrm{e}^{\nu t} &\le N(\mathrm{e}^{\nu t} - 1), \qquad /\mathrm{e}^{-\nu t} \\ R(t) &\le N(1 - \mathrm{e}^{-\nu t}) < N. \end{aligned}$$

V konečnom dôsledku tiež máme

$$I(t) = N - S(t) - R(t) < N,$$

keďže $S(t) > 0$ a $R(t) \ge 0$.

Funkcia $R(t)$ je rastúca a ohraničená, a preto existuje konečná limita $R_\infty = \lim_{t\to\infty} R(t)$. Uvedomme si, že do skupiny R sa jedinec môže dostať len tak, že v nejakom momente ochorie. Jedinci sa zo skupiny R už dostať nemôžu, takže hodnota R_∞ vyjadruje, do akej miery sa infekcia rozšíri. Pokúsme sa túto hodnotu vyčísliť. Vzhľadom k tomu, že

$$R'(t) = \nu I(t) = \nu(N - S(t) - R(t)) = \nu(N - S_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\rho}R(t)} - R(t)),$$

platí

$$\lim_{t\to\infty} R'(t) = \nu(N - S_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\rho}R_\infty} - R_\infty).$$

Odbočme na chvíľu, aby sme sa mohli presvedčiť o tom, že existencia konečných limít $\lim_{t\to\infty} R(t)$ a $\lim_{t\to\infty} R'(t)$ implikuje nulovosť druhej limity. Tvrdenie dokážeme sporom, takže budeme predpokladať, že spomínaná limita je nenulová. Vzhľadom k tomu, že $R'(t) = \nu I(t) > 0$, má zmysel uvažovať len prípad $\lim_{t\to\infty} R'(t) = L > 0$. Zvoľme $0 < \varepsilon < L$ ľubovoľne. Existuje $t_0 \ge 0$ také, že pre každé $t \ge t_0$ platí $R'(t) \ge \varepsilon$. Integrovaním tejto nerovnosti v medziach od t_0 do t dostaneme $R(t) \ge \varepsilon(t - t_0) + R(t_0)$. To znamená, že pre $t \to \infty$ funkcia $R(t)$ rastie nad všetky medze, čo je v spore s predpokladom o konečnosti limity $\lim_{t\to\infty} R(t)$. Vzhľadom k tretej rovnici nášho systému platí

$$\lim_{t\to\infty} R'(t) = \lim_{t\to\infty} I(t) = 0.$$

Limitná hodnota R_∞ je preto koreňom rovnice

$$F(x) = N - S_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\rho}x} - x = 0.$$

Ukážeme, že uvedená rovnica má jediný kladný koreň a nájdeme jeho dolný odhad. Platí

$$F'(x) = \frac{S_0}{\rho}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\rho}x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = R^* = -\rho \log \frac{\rho}{S_0},$$

Takže funkcia $F'(x)$ má jediný nulový bod $R^* > 0$. Naľavo od tohto bodu je $F'(x)$ kladná, takže $F(x)$ rastie a napravo je $F'(x)$ záporná, takže $F(x)$ klesá. Na základe vzťahov $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = -\infty$, $F(0) = N - S_0 > 0$ a $F(R^*) = N - \rho > 0$ môžeme usúdiť, že funkcia $F(x)$ má práve dva korene, jeden záporný a jeden kladný, pričom platí $R^* < R_\infty$. Navyše máme aj horný odhad:

$$R_\infty = N - S_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\rho}R_\infty} < N - S_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\rho}N},$$

čo je dôsledkom toho, že $F(N) < 0$, teda $R_\infty < N$.

Zhrňme všetky získané poznatky. Riešenie $(S(t), I(t), R(t))$ počiatočného problému $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ a $R(0) = 0$, kde $S_0 + I_0 = N$ spĺňa nasledujúce limitné vzťahy:

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = R_\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} I(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} S(t) = N - R_\infty = S_\infty,$$

pričom platí

$$\rho \log \frac{S_0}{\rho} < R_\infty < N - S_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{\rho}N}, \qquad S_0 \mathrm{e}^{-\frac{N}{\rho}} < S_\infty < \rho,$$

kde posledná nerovnosť je dôsledkom rovnosti $S_\infty = S_0 \exp(-R_\infty/\rho)$ a prvej nerovnosti. Rozsah epidémie môžeme zmenšiť zväčšením parametra ρ, teda buď zväčšením parametra ν alebo zmenšením parametra β. V praxi to znamená rýchlejšiu izoláciu a uzdravovanie nakazených jedincov alebo obmedzenie kontaktov a zvýšenie odolnosti voči infekcii.

Model SIRS

Tento model sa od toho predošlého líši tým, že jedinci zo skupiny R sa opäť môžu stať náchylní k infekcii. Schematicky ho môžeme znázorniť nasledujúcim obrázkom:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\beta"] & I \arrow[r, "\nu"] & R \arrow[ll, bend left, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

kde $\gamma > 0$ je koeficient popisujúci rýchlosť prechodu členov skupiny R do skupiny S. Rovnice definujúce tento model majú nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I + \gamma R, \\ I' &= \beta S I - \nu I, \\ R' &= \nu I - \gamma R. \end{aligned}$$

Fakt, že $S' + I' + R' = 0$, opäť korešponduje s predpokladom $S(t) + I(t) + R(t) = N$ o konštantnej veľkosti populácie. Vzťah $R = N - S - I$ môžeme dosadiť do prvej rovnice, čo nás privedie k autonómnemu systému v rovine:

$$\begin{aligned} S' &= -\beta S I + \gamma(N - S - I), \\ I' &= \beta S I - \nu I. \end{aligned}$$

Systém má jednu S-nulklinu definovanú rovnicou

$$I = \frac{\gamma(N - S)}{\beta S + \gamma} = -\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{\frac{\gamma}{\beta} + N}{S + \frac{\gamma}{\beta}}\right)$$

a dve I-nulkliny definované rovnicami

$$I = 0, \qquad S = \frac{\nu}{\beta}.$$

Tie sa pretínajú v dvoch stacionárnych bodoch:

$$[S_1, I_1] = [N, 0], \qquad [S_2, I_2] = \left[\frac{\nu}{\beta}, \frac{\gamma(\beta N - \nu)}{\beta(\nu + \gamma)}\right].$$

Z druhej rovnice vidno, že ak $S \leq \nu/\beta$, potom $I' \leq 0$ a I preto klesá. Nutnou podmienku pre vypuknutie epidémie je $\sigma = \beta N/\nu > 1$, čo budeme ďalej aj predpokladať. Číslo σ sa nazýva infekčné kontaktné číslo alebo vnútorná reproduktívna rýchlosť infekcie. Dôsledkom nášho predpokladu je fakt, že stacionárny bod $[S_2, I_2]$ leží vo vnútri prvého kvadrantu.

Jacobiho matica systému má tvar

$$J(S,I) = \begin{pmatrix} -\beta I - \gamma & -\beta S - \gamma \\ \beta I & \beta S - \nu \end{pmatrix}.$$

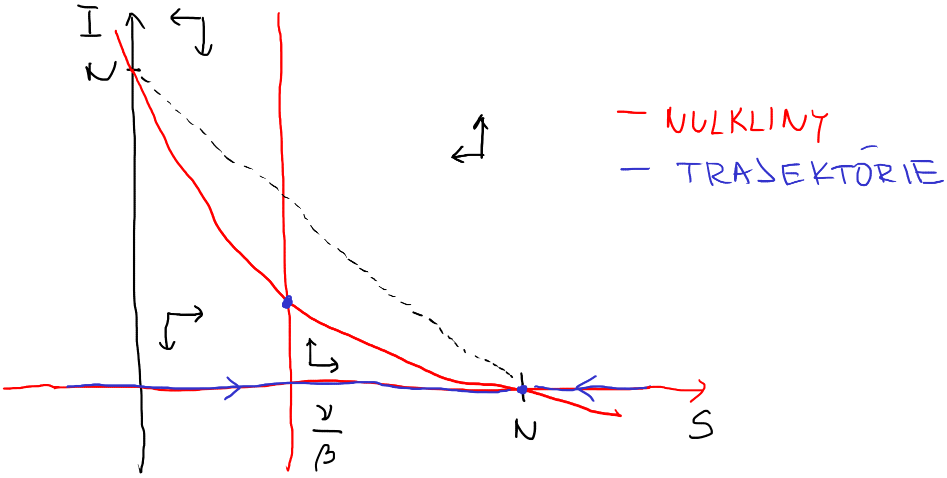
Vzhľadom k tomu, že $\det J(N,0) = -\gamma(\beta N - \nu) < 0$, je stacionárny bod $[S_1, I_1]$ sedlom. Ďalej platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} J(S_2,I_2) &= -\frac{\gamma(\beta N - \nu)}{\nu + \gamma} - \gamma = -\frac{\gamma(\beta N + \gamma)}{\nu + \gamma} < 0, \\ \det J(S_2,I_2) &= (\nu+\gamma)\frac{\gamma(\beta N - \nu)}{\nu + \gamma} = \gamma(\beta N - \nu) > 0, \\ (\operatorname{tr} J(S_2,I_2))^2 - 4\det J(S_2,I_2) &= \gamma\left(\frac{\gamma(\beta N + \gamma)^2}{(\nu+\gamma)^2} - 4(\beta N - \nu)\right). \end{aligned}$$

To znamená, že bod $[S_2, I_2]$ je v každom prípade stabilný a je to ohnisko pre malé γ a uzol pre veľké γ. Všimnime si ešte, že

$$S_2 + I_2 = \frac{\nu}{\beta} + \frac{\gamma(\beta N - \nu)}{\beta(\nu+\gamma)} = \frac{\gamma\beta N + \nu^2}{\beta(\nu+\gamma)} = \frac{\gamma N + \frac{\nu^2}{\beta}}{\nu+\gamma} < \frac{\gamma N + \nu N}{\nu + \gamma} = N,$$

čo znamená, že bod $[S_2, I_2]$ leží vo vnútri trojuholníka $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\, x + y \leq N\}$. pokúsime sa ukázať, že tento trojuholník je pozitívne invariantná množina.



Vzhľadom k tomu, že os S je I-nulklinou, je to invariantná množina systému. Inými slovami,

$$S(t) = (S_0 - N)\mathrm{e}^{-\gamma t} + N, \qquad I(t) = 0$$

je riešenie. Na druhej strane, na ose I má prvá zložka vektorového poľa tvar $\gamma(N - I)$, čo je nezáporný výraz pre $I \leq N$. Trajektórie začínajúce na ose I pre $0 \leq I \leq N$ teda vchádzajú do trojuholníka K. Nakoniec sa pozrieme, ako sa mení veličina $S + I$ pozdĺž riešení:

$$(S(t) + I(t))' = \gamma(N - S(t) - I(t)) - \nu I(t)$$

Na prepone trojuholníka K platí $S(t) + I(t) = N$, takže v týchto bodoch je posledný výraz záporný, okrem stacionárneho bodu $[N, 0]$. Preto trajektórie začínajúce na prepone trojholníka K do neho tiež vstupujú. Ukázali sme, že K je pozitívne invariantná množina. Navyše, je to tiež kompaktná množina.

Pomocou Dulacovho kritéria ukážeme, že v trojuholníku K neexistuje uzavretá trajektória. Počítajme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{I}(-\beta SI+\gamma(N-S-I))\right)+\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{1}{I}(\beta SI-\nu I)\right)&\\ =\frac{\partial}{\partial S}\left(-\beta S+\gamma\frac{N-S-I}{I}\right)+\frac{\partial}{\partial I}(\beta S-\nu)&\\ =-\beta-\frac{\gamma}{I}.&\end{aligned}$$

Posledný výraz je vo vnútri trojuholníka K záporný, takže K neobsahuje uzavretú trajektóriu.

Zvoľme ľubovoľné riešenie $(S(t),I(t))$ spĺňajúce $(S(0),I(0))\in K$ a označme symbolom C^+ jeho kladnú polotrajektóriu, teda $C^+=\{(S(t),I(t))\mid t\geq 0\}$. Vzhľadom k tomu, že K je pozitívne invariantná množina, platí $C^+\subseteq K$. V dôsledku toho má C^+ kompaktný uzáver. Predpokladajme, že ω-limitná nnožina $\Omega(C^+)$ neobsahuje žiadny stacionárny bod. Pripomeňme, že $\Omega(C^+)\subseteq\overline{C^+}\subseteq K$. Potom podľa Poincarého-Bendixsonovej vety ([1], strana 11) je $\Omega(C^+)$ cyklus, čo je v spore s tým, že v K žiadny cyklus nie je. Preto $\Omega(C^+)$ obsahuje aspoň jeden stacionárny bod. Ak je to stabilný stacionárny bod $[S_2,I_2]$, potom zrejme platí $\Omega(C^+)=\{[S_2,I_2]\}$ a platí $\lim_{t\to\infty}(S(t),I(t))=[S_2,I_2]$. V opačnom prípade množina $\Omega(C^+)$ obsahuje sedlo $[S_1,I_1]$. Podľa Vety 8 o štruktúre ω-limitnej množiny rovinného autonómneho systému so stacionárnymi bodmi ([1], strana 11) je $\Omega(C^+)$ zjednotením stacionárnych bodov a heteroklinických a homoklinických trajektórií medzi nimi. Heteroklinickú trajektóriu neobsahuje, lebo v takom prípade by obsahovala aj bod $[S_2,I_2]$. Sedlo $[S_1,I_1]$ nemá homoklinickú trajektóriu, keďže riešenia, ktoré sa k nemu blížia pre $t\to\infty$, ležia na osi S. V konečnom dôsledku platí buď $\Omega(C^+)=\{[S_2,I_2]\}$ alebo $\Omega(C^+)=\{[S_1,I_1]\}$, teda buď

$$\lim_{t\to\infty}(S(t),I(t))=[S_2,I_2],\qquad \text{alebo}\qquad \lim_{t\to\infty}(S(t),I(t))=[S_1,I_1],$$

pričom druhá možnosť nastane len v prípade $I(0)=0$. Náš počiatočný problém $S(0)=S_0>0$, $I(0)=I_0>0$, $R(0)=R_0\geq 0$ a $S_0+I_0+R_0=N$ sa teda ustáli na hodnote

$$\left(\frac{\nu}{\beta},\frac{\gamma(\beta N-\nu)}{\beta(\nu+\gamma)},\frac{\nu(\beta N-\nu)}{\beta(\nu+\gamma)}\right)=\left(\frac{\nu}{\beta},\frac{\gamma\nu(\sigma-1)}{\beta(\nu+\gamma)},\frac{\nu^2(\sigma-1)}{\beta(\nu+\gamma)}\right)=\left(\frac{\nu}{\beta},\frac{N-\nu/\beta}{1+\nu/\gamma},\frac{N-\nu/\beta}{1+\gamma/\nu}\right).$$

Podobne ako v prípade modelu SIR, rozsah epidémie môžeme zmenšiť buď zväčšením parametra ν alebo zmenšením parametra β.

Literatúra

[1] KALAS, Josef, POSPÍŠIL, Zdeněk. Spojité Modely v Biologii. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001.