1. cvičná písomka

① homogénna diferenciálna rovnica

② $x' = -t\sqrt[3]{x}$, $x(0)=0$

Pravá strana je spojitá. Ak vo vhodnom okolí bodu [0,0] splňa Lipschitzovu podmienku vzhľadom k x, potom Picardova-Lindelöfova veta zaručí jednoznačnosť riešenia:

$$|-t\sqrt[3]{x} + t\sqrt[3]{y}| \overset{?}{\leq} L|x-y|$$

$$|t||\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leq L|x-y|$$

$$\left|\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{x-y}\right| \leq \frac{L}{|t|}$$

pre $y=0$, $x \to 0$ je výraz naľavo

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0}\right| = \left|\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right)\Big|_{x=0}\right| = \infty$$

takže sa nedá ohraničiť zhora výrazom napravo (konštanta / t z okolia nuly)

Lipschitzova podmienka je (~~vo vzťahu~~ pri spojitosti pravej strany) len postačujúca podmienka ⇒ jej nesplnenie o jednoznačnosti riešenia nič nehovorí.

Riešme počiatočný problém $x(t_0) = x_0$, kde $x_0 \neq 0$

$$x'(t) = -t\cdot\sqrt[3]{x(t)}$$

$$\frac{x'(t)}{\sqrt[3]{x(t)}} = -t \quad \Big/ \int_{t_0}^{t} ds$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{x'(s)}{\sqrt[3]{x(s)}}\,ds = \int_{t_0}^{t} -s\,ds = \left[-\frac{s^2}{2}\right]_{t_0}^{t} = -\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2}$$

$$\left|\begin{matrix} x(s) = u & t_0 \rightsquigarrow x_0 \\ x'(s)\,ds = du & t \rightsquigarrow x(t)\end{matrix}\right| = \int_{x_0}^{x(t)}\frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du = \frac{3}{2}\left[u^{\frac{2}{3}}\right]_{x_0}^{x(t)}$$

$$= \frac{3}{2}\left(x(t)^{\frac{2}{3}} - x_0^{\frac{2}{3}} \right) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2}$$

$$x(t)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t_0^2}{2} \right) + x_0^{\frac{2}{3}}$$

Označme $F(t,x) = \frac{3}{2}\left(x^{\frac{2}{3}} - x_0^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}$.

Z postupu pre riešenie rovníc so separovanými premennými vieme, že za predpokladu rovnica $F=0$ implicitne zadáva v okolí bodu (t,x) riešenie danej diferenciálnej rovnice.

F_x je spojitá v bode (t,x) a platí $F_x(t,x) \neq 0$

Keďže $F_x = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, je predpoklad splnený, ak $x \neq 0$. Pre $t \in [-|t_0|, |t_0|]$ rovnosť $F(t,x)=0$ implikuje $|x| \geq |x_0| > 0$, čo znamená, že rovnosť $F(t,x)=0$ implicitne zadáva riešenie $x(t)$ na intervale $[-|t_0|, |t_0|]$. Uvedomme si, že počiatočný problém $x(t_0)=x_0$, kde $x_0 \neq 0$ je (globálne) jednoznačne riešiteľný (v dostatočne malom okolí bodu (t_0, x_0) má funkcia $-t\sqrt[3]{x}$ spojité Veta 4 str. 46 parciálne derivácie prvého rádu, čo v konečnom dôsledku implikuje splnenie (lokálnej) Lipschitzovej podmienky).

Riešenie počiatočného problému $x' = -t\sqrt[3]{x}$, $x(0)=0$ je napríklad $x(t) \equiv 0$. Pre spor predpokladajme, že existuje ďalšie riešenie $y(t)$, ktoré je rôzne od $x(t)$, teda existuje $t_0 \neq 0$ také, že $y(t_0) = y_0 \neq 0$. Potom je riešenie $y(t)$ zadané implicitne rovnicou $F(t, y(t)) = 0$ (jednoznačnosť). Podľa uskutočnenej analýzy platí $y(0) \neq 0$, čo je spor. Uvedený počiatočný problém je preto jednoznačne riešiteľný.

③ $x'' - x' = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

Zavedením novej premennej $y = x'$ transformujeme rovnicu druhého rádu na systém dvoch rovníc prvého rádu:

$$x' = y \qquad x(0) = 0$$
$$y' = y \qquad y(0) = 1$$

pripomenutie:

$r' = f(t, r)$, kde $r \in \mathbb{R}^n$

$$r(t) = \cancel{\ldots}\, r(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, r(s))\, ds$$

$$r_{k+1}(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, r_k(s))\, ds$$

$r_0(t) \equiv$ poč. podmienka

$\Rightarrow \{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ je Picardova postupnosť

$x_0(t) \equiv 0$

$y_0(t) \equiv 1$

$$x_1(t) = 0 + \int_0^t y_0(s)\, ds = \int_0^t 1\, ds = t$$

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t y_0(s)\, ds = 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + t$$

$$x_2(t) = 0 + \int_0^t y_1(s)\, ds = \int_0^t 1 + s\, ds = \left[s + \frac{s^2}{2} \right]_0^t = t + \frac{t^2}{2}$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s)\, ds = 1 + \int_0^t 1 + s\, ds = 1 + \left[s + \frac{s^2}{2} \right]_0^t = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} x_n(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix} \right\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k riešeniu $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ systému $\begin{matrix} x' = y \\ y' = y \end{matrix}$,

teda $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, kde $x(t)$ je riešenie problému

$x'' - x' = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

prvé tri prvky Picardovej postupnosti sú $(x_0(t), x_1(t), x_2(t))$

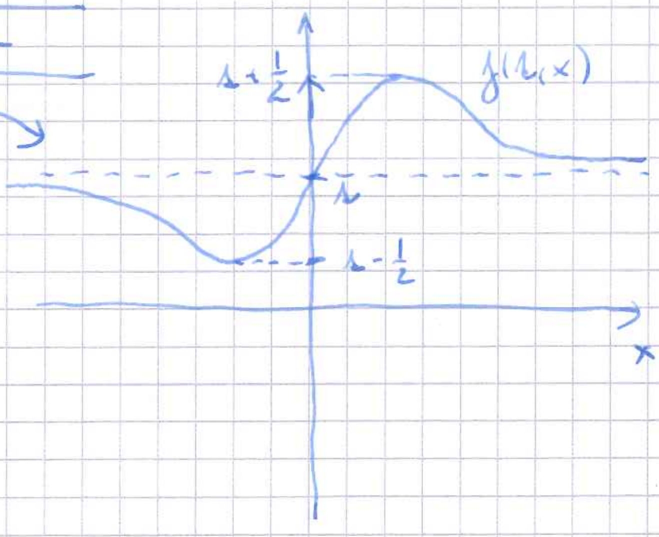
$= \left(0, t, t + \frac{t^2}{2}\right)$.

④ Odhadnite riešenie problému $x' = t + \frac{x}{1 + x^2}$, $x(0) = 0$ pre $t \geq 0$.

Postupujeme rovnako ako na cvičení. Pokúsime sa zdola a zhora ohraničiť pravú stranu $f(t,x) = t + \frac{x}{1+x^2}$ výrazmi závislými len od t. Nájdeme extrémy funkcie $f(t,x)$, pričom t chápeme ako parameter.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x \in \{\pm 1\}$$

~~x~~	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(t,x) = t$$

$$f(t,-1) = t - \frac{1}{2} \qquad f(t,1) = t + \frac{1}{2}$$

$\forall\ (t,x) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$t - \frac{1}{2} \le t + \frac{x}{1+x^2} \le t + \frac{1}{2}$$

riešenia počiatočných problémov

$$u' = t - \frac{1}{2}, \quad u(0) = 0$$

$$v' = t + \frac{1}{2}, \quad v(0) = 0$$

Tvrdenie 3, str. 38

splňajú pre každé $t \in [0,\infty)$ nerovnosti $u(t) \le x(t) \le v(t$

$$u(t) = u(0) + \int_0^t s - \frac{1}{2}\, ds = \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}(t^2 - t)$$

$$v(t) = v(0) + \int_0^t s + \frac{1}{2}\, ds = \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}(t^2 + t)$$

5

$$x' = 2x - y \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$y' = -x + 2y$$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda+1)(2-\lambda-1)$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{c_1 e^{t} v_1 + c_2 e^{3t} v_2}$$

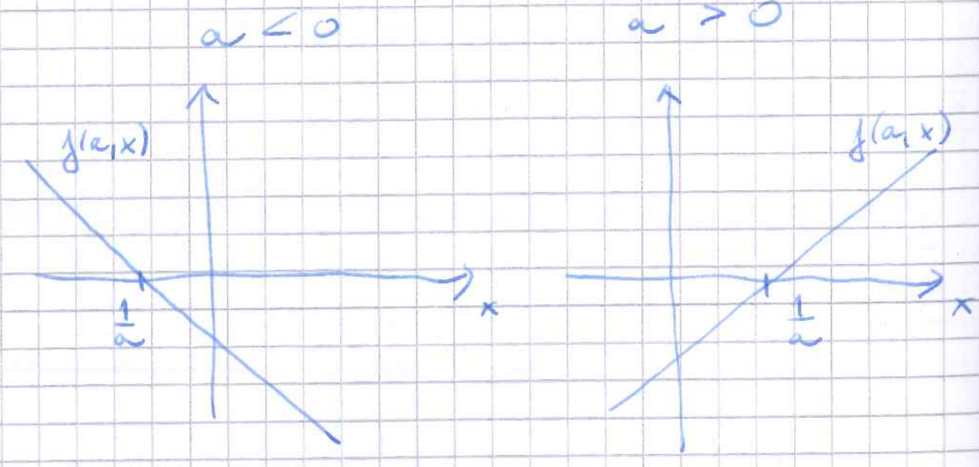
Táto funkcia je periodická len v prípade, že $c_1 = c_2 = 0$.
Systém nemá netriviálne periodické riešenie.

⑥ $x' = ax - 1$ $\quad x^* = \frac{1}{a}$ $\quad$ pre ktoré a je rovn. as. stabilný?

Označme $f(a,x) = ax - 1$ pravú stranu jednorozmerného systému $x' = ax - 1$, pričom a je parameter.
Ak $a \neq 0$, potom má tento systém jediný stacionárny bod $x^* = \frac{1}{a}$.
Variačná matica systému je $\left(\frac{\partial}{\partial x} f(a,x)\right) = (a)$, je to matica typu 1×1.
Jej vlastné číslo je a.
Veta 20, str. 101 $\Rightarrow$ ak $a < 0$ $\Rightarrow$ x^* je rovnomerne asymptoticky stabilný

ak $a > 0$ $\Rightarrow$ x^* je nestabilný

(definície sú v skriptách)



fázový portrét:

stabilný uzol $\qquad$ nestabilný uzol

2. cvičná písomka

① rovnica so separovanými premennými

② Zavedením novej premennej $y = x'$ transformujeme rovnicu druhého rádu na systém rovníc prvého rádu:

$$x' = y \qquad\qquad x(0) = 1$$

$$y' = -\frac{x}{\cos^2 t} - y \sin 2t \qquad\qquad y(0) = 0$$

Pravú stranu označíme symbolom

$$f(t,x,y) = \begin{pmatrix} f_1(t,x,y) \\ f_2(t,x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{x}{\cos^2 t} - y \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Matica parciálnych derivácií podľa závislých premenných x a y má tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\cos^2 t} & -\sin 2t \end{pmatrix}$$

Tieto derivácie sú spojité a teda ohraničené na uzavretom okolí bodu $(t_0, x_0, y_0) = (0,1,0)$. Preto je počiatočný problém $(x', y')^T = f(t,x,y)$, $(x(0), y(0)) = (1,0)$ jednoznačne riešiteľný v okolí bodu $(0,1,0)$ a v konečnom dôsledku to isté platí pre pôvodný počiatočný problém (korešpondencia medzi riešeniami rovníc n-tého rádu a riešeniami n-rozmerných systémov) Dôsledky 1 a 2 na strane 45

③ Pridružená homogénna rovnica má tvar

$$(t-1)x'' - t x' + x = 0.$$

Dosadením funkcií $x_1(t) = t$ a $x_2(t) = e^t$ do tejto rovnice sa presvedčíme o tom, či sú to skutočne jej riešenia. ~~Zaveďme novú premennú $y = x'$.~~

$$\cancel{x' = y}$$

$$\cancel{y' = -\frac{x}{t-1} + \frac{t}{t-1} y}$$

~~Všetko takto vieme ukázať, že funkcie $x_1(t)$ a $x_2(t)$ tvoria fundamentálny systém riešení~~

Zaveďme novú premennú $y = x'$ a transformujme rovnicu na systém dvoch rovníc prvého rádu:

$$(*) \quad \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{x}{t-1} + \frac{t}{t-1}\, y \end{aligned}$$

Funkcie $x_1(t)$ a $x_2(t)$ tvoria fundamentálny systém riešení ~~[illegible]~~ rovnice $(t-1)x'' - tx' + x = 0$ práve vtedy, keď vektory $(x_1(t), x_1'(t))^T$ a $(x_2(t), x_2'(t))^T$ tvoria fund. syst. riešení systému (*) teda práve vtedy, keď sú tieto vektory lineárne nezávislé.

$$\det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} = (t-1)e^t \neq 0$$

pre $t \neq 1$

Na intervaloch neobsahujúcich 1 sú preto funkcie $x_1(t)$ a $x_2(t)$ fund. syst. riešení.

Metódou variácie konštánt nájdeme všeobecné riešenie nehomogénneho systému

STRANY 66 a 67

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\frac{x}{t-1} + \frac{t}{t-1}\, y + t - 1 \end{aligned}$$

všeobecné riešenie homogénneho syst. je ~~$\begin{pmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \end{pmatrix} =$~~

$$\begin{pmatrix} x_H(t) \\ y_H(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix}}_{Y(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

označme

riešenie hľadáme v tvare

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Y(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t-1} & \frac{t}{t-1} \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + b(t)$$

$$\Rightarrow \quad Y'(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} + Y(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = A(t) Y(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} + b(t)$$

$$= Y'(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} + b(t)$$

$$\Rightarrow \quad Y(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = b(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = Y^{-1}(t) \cdot b(t)$$

výpočet matice $Y^{-1}(t)$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} t & e^t & 1 & 0 \\ 1 & e^t & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & e^t & 0 & 1 \\ 0 & (1-t)e^t & 1 & -t \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1}{(1-t)} & \frac{(1-t)e^t + te^t}{(1-t)e^t} \\ 0 & 1 & \frac{1}{(1-t)e^t} & \frac{-t}{(1-t)e^t} \end{array}\right) \Rightarrow Y^{-1}(t) = \frac{1}{(1-t)e^t} \begin{pmatrix} -e^t & e^t \\ 1 & -t \end{pmatrix}$$

$$c_1'(t) = -1 \quad \Rightarrow c_1(t) = -t + c$$

$$c_2'(t) = \frac{t}{e^t} \quad \Rightarrow c_2(t) = \int t e^{-t} dt = \begin{vmatrix} u = t & v' = e^{-t} \\ u' = 1 & v = -e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t} dt = -(t+1)e^{-t} + d$$

všeobecné riešenie nehomogénneho systému je

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Y(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t + c \\ -(t+1)e^{-t} + d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -t^2 + ct - (t+1) + de^t \\ -t + c - (t+1) + de^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 + (c-1)t - 1 + de^t \\ -2t + c - 1 + de^t \end{pmatrix}$$

riešenie spĺňajúce počiatočnú podmienku $x(0) = 0,\ y(0) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + d \\ 0 &= c - 1 + d \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad d = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

riešenie počiatočného problému $(t-1)x'' - tx' + x = (t-1)^2$

$x(0)=0$

$x'(0)=0$

má tvar $\boxed{x(t) = e^t - t^2 - t - 1.}$

(4) Nájdite maximálne a minimálne riešenie úlohy

$$t\cdot x' = x, \quad x(0)=0.$$

Riešme najprv počiatočný problém $tx'=x$, $x(t_0)=x_0$, $t_0, x_0 \neq 0$.

$$t\cdot x' = x \qquad\qquad x(t)\equiv 0 \text{ je riešenie}$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{1}{t} \quad \Big/ \int_{t_0}^{t} ds$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)}\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\,ds = \ln\left|\frac{t}{t_0}\right|$$

$$\|$$

$$\left| \begin{array}{ll} x(s) = u & t_0 \rightsquigarrow x_0 \\ x'(s)ds = du & t \rightsquigarrow x(t) \end{array} \right| = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{u}\,du = \ln\left|\frac{x(t)}{x_0}\right|$$

$$\ln\left|\frac{x(t)}{x_0}\right| = \ln\left|\frac{t}{t_0}\right| \quad \Big/ \exp(-)$$

$$\left|\frac{x(t)}{x_0}\right| = \left|\frac{t}{t_0}\right| \iff |x(t)| = \left|\frac{x_0}{t_0}\right|\cdot|t|$$

1) $\operatorname{sgn} x_0 = \operatorname{sgn} t_0 \rightarrow x(t) = \frac{x_0}{t_0}\cdot t$

2) $\operatorname{sgn} x_0 \neq \operatorname{sgn} t_0 \rightarrow x(t) = \frac{x_0}{t_0}\cdot t$

Funkcia $x(t) = \frac{x_0}{t_0}\cdot t$ je riešenie počiatočného problému $tx'=x$, $x(t_0)=x_0$, $t_0, x_0 \neq 0$. Pre každé $c\in\mathbb{R}$ je $x(t)=ct$ riešením rovnice $tx'=x$, ktoré navyše spĺňa $x(0)=0$. Pre $t\neq 0$ je pravá strana rovnice $x'=\frac{x}{t}$ spojitá a lokálne Lipschitzovská, čo implikuje globálnu jednoznačnosť (Veta 4, str. 46). Predpokladajme, že $y(t)$ je maximálne riešenie problému $tx'=x$, $x(0)=0$. Nech $t_0\neq 0$ je ľubovoľné také, že y je v t_0 definované a označme $y_0 = y(t_0)$.

~~Z jednoznačnosti vyplýva $y(t) = \frac{y_0}{t_0} t$. Pre $x(t) = 2\frac{y_0}{t_0} t$~~

~~platí~~

Z jednoznačnosti vyplýva $y(t) = \frac{y_0}{t_0} t$ na intervale, kde je y definované. Ak $t_0 > 0$ a ~~[illegible]~~, potom pre riešenie $x(t) = \left(\frac{y_0}{t_0} + 1\right) t$ a $t > 0$ platí $x(t) > y(t)$, takže $y(t)$ nie je maximálne riešenie. Podobne sa vyrieši ~~[illegible]~~ prípad $t_0 < 0$. Počiatočný problém preto nemá maximálne riešenie. Rovnako by sa ukázalo, že nemá ani minimálne riešenie.

5) V každom prípade má systém triviálne periodické riešenie $(x(t), y(t)) \equiv (0,0)$

$$x' = 2x - 5y \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$y' = x + ay$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 1 & a-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(a-\lambda) + 5$$
$$= \lambda^2 - (2+a)\lambda + 2a + 5$$

$$D = (2+a)^2 - 8a - 20 = a^2 - 4a - 16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2+a) \pm \sqrt{D}}{2}$$

homogénny

Lineárny dvojrozmerný systém má netriviálne periodické riešenie práve vtedy, keď ~~jeho~~ vlastné čísla jeho matice sú komplexne združené korene s nulovou reálnou zložkou a nenulovou imaginárnou zložkou. (to vidno z všeobecného tvaru jeho riešení)

$\Rightarrow$ $2 + a = 0$ a zároveň $D < 0$

To platí pre $a = -2$

6) Podobne ako príklad 6 v minulej písomke.

$f(x) = x^3 - 27$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ Variačná matica v stacionárnom bode $x = 3$ je (27). Jej jediné vlastné

Číslo je kladné, takže riešenie $x(t) \equiv 3$ je nestabilné.

3. cvičná písomka

① homogénna diferenciálna rovnica

② Funkcia $y(t)$ definovaná na intervale J, pričom $0 \in J$, je riešením počiatočného problému $tx' = x$, $x(0) = a$ práve vtedy, keď pre každé $t \in J$ platí $t \cdot y'(t) = y(t)$ a navyše $y(0) = a$. Ak by $a \neq 0$, potom by rovnosť $t \cdot y'(t) = y(t)$ mala v bode 0 tvar $0 = 0 \cdot y'(0) = y(0) = a$, čo znamená, že takýto počiatočný problém by nemal riešenie. Ak $a = 0$, potom je zrejme riešením uvedeného poč. problému funkcia $y(t) \equiv 0$. (V príklade 4 druhej cvičnej písomky sme našli aj ďalšie riešenia.)

③ Konštrukcia Picardovej postupnosti je pripomenutá v príklade 3 prvej cvičnej písomky.

$$x' = y \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$y' = -x + t$$

$x_0(t) \equiv 0$

$y_0(t) \equiv 0$

$$x_1(t) = 0 + \int_0^t y_0(s)\,ds = \int_0^t 0\,ds = 0$$

$$y_1(t) = 0 + \int_0^t -x_0(s) + s\,ds = \int_0^t s\,ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

$$x_2(t) = 0 + \int_0^t y_1(s)\,ds = \int_0^t \frac{s^2}{2}\,ds = \left[\frac{s^3}{6}\right]_0^t = \frac{t^3}{6}$$

$$y_2(t) = 0 + \int_0^t -x_1(s) + s\,ds = \int_0^t s\,ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

$$x_3(t) = 0 + \int_0^t y_2(s)\,ds = \int_0^t \frac{s^2}{2}\,ds = \left[\frac{s^3}{6}\right]_0^t = \frac{t^3}{6}$$

$$y_3(t) = 0 + \int_0^t -x_2(s) + s\,ds = \int_0^t -\frac{s^3}{6} + s\,ds = \left[-\frac{s^4}{24} + \frac{s^2}{2}\right]_0^t =$$

prvé štyri prvky Picardovej postupnosti sú

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6} \\ -\frac{t^4}{24} + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$$

(4) Príklad je vyriešený v skriptách.

(5) Stacionárny bod je riešením systému rovníc

$$2x - 5y = 0$$
$$x - 2y = -1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$ stacionárny bod je $(-5,-2)$

matica parciálnych derivácií (variačná, jacobiho) je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{tr} A = 0, \quad \det A = -4 + 5 = 1 > 0$$

$$(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = -4 < 0$$

Linearizovaný systém (zhomogenizovaný - posunutý do počiatku) má v počiatku stred. Zrejme je bod $(-5,-2)$ stredom aj pre pôvodný systém, aj keď to na základe vety 11 na strane 88 tvrdiť nemôžeme.

zaveďme substitúciu $x = u - 5$, $y = v - 2$ $\iff$ $u = x + 5$, $v = y + 2$

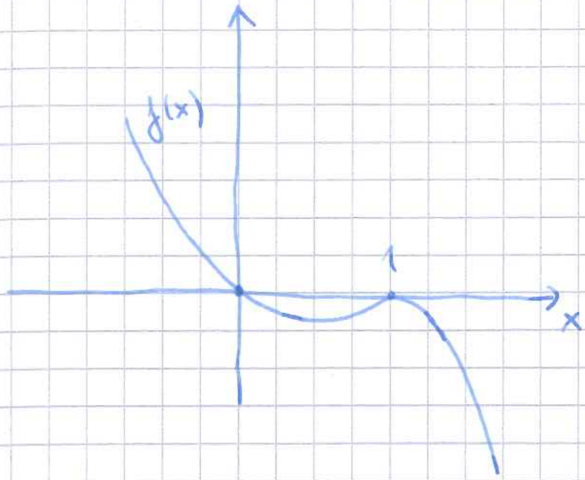
po dosadení má systém tvar

$$u' = 2u - 5v$$
$$v' = u - 2v$$

stacionárny bod tohto systému je v počiatku a je to stred

Tento systém vznikol len posunutím pôvodného systému o vektor $(5,2)$, čo nemohlo zmeniť jeho dynamiku, preto je bod $(-5,-2)$ tiež stredom v pôvodnom systéme. ak $(u(t),v(t))$ je uzavretá traj. obsahujúca vo svojom vnútri bod $(0,0)$ potom $(x(t),y(t)) = (u(t),v(t)) + (-5,-2)$ je uz. traj. obs. vo svojom vnútri bod $(-5,-2)$

⑥ $x' = 2x^2 - (x^3 + x) = -x(x^2 - 2x + 1) = -x(x-1)^2 = f(x)$



	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$-$
$x(t)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

fázový portrét:

$x(1) \in (-\infty, 0) \Rightarrow x(t)$ rastie

$x(1) \in (0,1) \cup (1,\infty) \Rightarrow x(t)$ klesá

$x(1) \in \{0,1\} \Rightarrow x(t)$ je konštantné