Uvažujme o nasledujúcom autonómnom systéme

$$x' = f(x),$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$. Predpokladajme, že existujú dva rôzne indexy $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ a funkcie $g(x_i, x_j)$ a $h(x_i, x_j)$ s nasledujúcou vlastnosťou:

$$g(x_i, x_j) \cdot f_i(x) + h(x_i, x_j) \cdot f_j(x) = 0.$$

Inými slovami, ak pripočítame g-násobok i-tej rovnice k h-násobku j-tej rovnice, potom dostaneme rovnicu

$$g(x_i, x_j) \cdot x_i' + h(x_i, x_j) \cdot x_j' = 0.$$

Ďalej predpokladajme, že rovnica $F(x_i, x_j) = c$ implicitne zadáva riešenie rovnice

$$g(x_i, x_j) \cdot \mathrm{d}x_i + h(x_i, x_j) \cdot \mathrm{d}x_j = 0, \tag{1}$$

čo môžeme formulovať aj tak, že existuje funkcia $k(x_i, x_j)$, ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = k(x_i, x_j) \cdot g(x_i, x_j), \qquad \frac{\partial F}{\partial x_j} = k(x_i, x_j) \cdot h(x_i, x_j).$$

Všetky uvedené predpoklady stačia na to, aby funkcia $P(x) = F(x_i, x_j)$ bola prvým integrálom systému $x' = f(x)$:

$$\begin{aligned}\nabla P(x)^T \cdot f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial x_k}(x) \cdot f_k(x) &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(x) + \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \cdot f_j(x) \\ &= k(x_i, x_j) \cdot g(x_i, x_j) \cdot f_i(x) + k(x_i, x_j) \cdot h(x_i, x_j) \cdot f_j(x) \\ &= k(x_i, x_j)(g(x_i, x_j) \cdot f_i(x) + h(x_i, x_j) \cdot f_j(x)) = 0.\end{aligned}$$

Predpokladajme, že podiel $f_j(x)/f_i(x)$ závisí len od premenných x_i a x_j, takže môžeme písať $f_j(x)/f_i(x) = a(x_i, x_j)$ pre vhodnú funkciu a. Nech riešenia rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_i} = \frac{f_j(x)}{f_i(x)} = a(x_i, x_j)$$

sú zadané implicitne rovnicou $G(x_i, x_j) = c$. Pripomeňme vzorec pre deriváciu implicitne zadanej funkcie:

$$G(x_i, x_j(x_i)) = c \quad \Rightarrow \quad G_{x_i} + G_{x_j} \cdot x_j' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_j' = -\frac{G_{x_i}}{G_{x_j}}.$$

Máme dva spôsoby ako vyjadriť deriváciu x_j':

$$-\frac{G_{x_i}}{G_{x_j}} = \frac{f_j(x)}{f_i(x)} \qquad \Rightarrow \qquad G_{x_i} \cdot f_i(x) + G_{x_j} \cdot f_j(x) = 0.$$

Ak zvolíme $g = G_{x_i}$, $h = G_{x_j}$ a $k(x_i, x_j) = 1$, potom sú pre $F = G$ splnené podmienky predošlého odstavca, a preto je G prvým integrálom systému $x' = f(x)$. To za uvedených predpokladov dokazuje korektnosť postupu hľadania prvého integrálu, ktorý je založený na delení j-tej rovnice i-tou. Tieto skutočnosti boli dvakrát použité v dokumente cvicenie3.pdf.