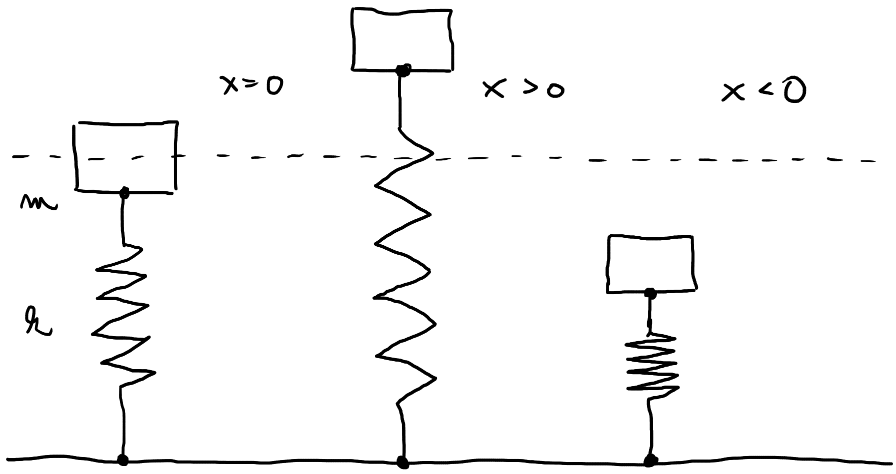
Príklad 1. Vysvetlite fungovanie tlmičov pruženia na náprave automobilu.

Najprv popíšeme situáciu, kedy je náprava spojená so zvyškom automobilu len prostredníctvom pružiny. Budeme ignorovať horizontálny pohyb automobilu, ktorý bude modelovaný abstraktným telesom hmotnosti m spojeným pružinou s povrchom zeme.



Odvoďme rovnicu popisujúcu vývoj vertikálnej odchýlky x od rovnovážnej polohy tohto telesa v čase t. Podľa druhého Newtonovho pohybového zákona je súčin hmotnosti telesa s jeho zrýchlením rovný výslednici všetkých síl pôsobiacich na teleso. V našom prípade na teleso pôsobí silou len pružina, ktorá je priamo úmerná odchýlke pružiny od rovnovážnej polohy. Konštantu úmernosti značíme $k > 0$ a nazývame ju tuhosť pružiny. To nás privádza k rovnici

$$mx'' = -kx \qquad \Leftrightarrow \qquad mx'' + kx = 0.$$

Na prvý pohľad možno nie je úplne zrejmé, prečo ignorujeme vplyv gravitačnej sily pôsobiacej na teleso. Ukážme, že tento vplyv je v skutočnosti zahrnutý v našom modeli, inými slovami, vysvetlime si pojem vertikálna odchýlka od rovnovážnej polohy. Zaveďme veličinu y, ktorá udáva výšku, v ktorej sa teleso nachádza s tým, že $y = 0$ reprezentuje bod, v ktorom je pružina nedeformovaná, teda na teleso nepôsobí žiadnou silou. Opäť použijeme druhý Newtonov zákon, tentokrát berúc do úvahy obidve sily pôsobiace na teleso:

$$my'' = -ky - mg,$$

kde g je gravitačné zrýchlenie. Rovnovážna poloha, vo všeobecnosti rovnovážny stav systému, je konštantné riešenie $y = c$ diferenciálnej rovnice popisujúcej vývoj systému. Po dosadení $y = c$ do diferenciálnej rovnice dostaneme rovnosť $y = -mg/k$. Veličina $x(t) = y(t) + mg/k$ potom zrejme vyjadruje odchýlku od rovnovážnej polohy. Chápme túto rovnosť ako zavedenie novej závislej premennej a pozrime sa ako po dosadení vyzerá naša diferenciálna rovnica:

$$m\left(x - \frac{mg}{k}\right)'' = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right) - mg,$$
$$mx'' = -kx,$$

čo je rovnica, ktorú sme odvodili na začiatku.

Korene charakteristického polynómu sú $\pm\sqrt{k/m} \cdot i$, takže všeobecné riešenie tejto rovnice je

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Pre jednoduchosť predpokladajme, že v čase $t_0 = 0$ automobil prešiel po nerovnosti na vozovke spôsobiac okamžitú odchýlku x_0, čo sa však nestihlo prejaviť na rýchlosti automobilu vo vertikálnom smere. To môžeme zachytiť voľbou nasledujúcej počiatočnej podmienky: $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$. Nájdime partikulárne riešenie x_P spĺňajúce túto podmienku.

$$x'(t) = -c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1, \\ 0 &= \sqrt{\tfrac{k}{m}}c_2, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad x_P(t) = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Všimnime si, že nielenže $\lim_{t\to\infty} x_P(t) \neq 0$, ale táto limita dokonca ani neexistuje. V ideálnom prípade by teda pri použití pružín samotných oscilácie spôsobené odchýlkou od rovnovážnej polohy nikdy neustali.

Pozrime sa na túto situáciu ešte z pohľadu energie. Systém disponuje jednak kinetickou energiou E_k, ktorá je uchovaná v pohybe telesa, a na druhej strane potenciálnou energiou E_p uloženou v stlačenej/roztiahnutej pružine. Odvoďme si pre ilustráciu tvar potenciálnej energie stavu systému. Tá je totožná s prácou, ktorú bolo nutné vykonať, aby sa systém do tohto stavu dostal. Odchýlka x pružiny od rovnovážnej polohy bola dosiahnutá tak, že na dráhe od 0 do x bola na pružinu vyvíjaná sila ks, kde s je bod na dráhe od 0 až k x. Keďže práca je integrál sily po dráhe, na ktorej pôsobí, je potenciálna energia daná nasledujúcim integrálom:

$$E_p = \int_0^x ks\,\mathrm{d}s = k\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2.$$

O kinetickej energii vieme, že sa dá vyjadriť v tvare

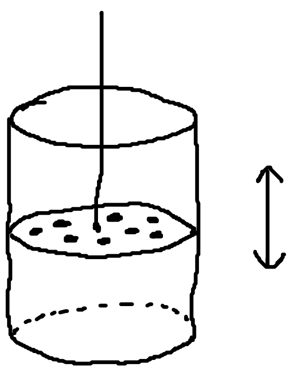
$$E_k = \frac{1}{2}mx'^2.$$

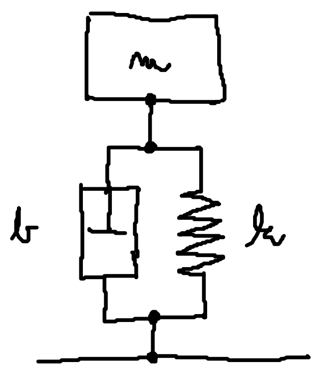
Pozrime sa, ako sa v čase vyvíja celková energia systému:

$$\begin{aligned} (E_p(t) + E_k(t))' &= \left(\frac{1}{2}kx(t)^2 + \frac{1}{2}mx'(t)^2\right)' \\ &= kx(t)x'(t) + mx'(t)x''(t) = x'(t)(kx(t) + mx''(t)) = 0. \end{aligned}$$

Zistili sme, že celková energia systému sa v čase nemení. Ak teda do systému nejakú energiu pridáme, napríklad stlačením pružiny spôsobeným prechodom cez nerovnosť, tá v ideálnom prípade v systéme ostane.

Toto nežiadúce chovanie môže byť skrotené použitím tlmiča pruženia. Je to valec naplnený tekutinou, v ktorom sa pohybuje piest s priepustnými ventilmi. Prelievanie tekutiny medzi komorami valca oddelenými piestom spôsobuje odpor voči pohybu piestu. Táto odporová sila je priamo úmerná rýchlosti pohybu piestu. Konštantu úmernosti označíme symbolom $b > 0$ a nazveme ju konštantou tlmenia. Jej hodnota závisí od parametrov konštrukcie tlmiča a vlastností použitej tekutiny.





V tomto prípade na teleso hmotnosti m pôsobia dve sily a rovnica popisujúca vertikálnu odchýlku telesa od rovnovážnej polohy má tvar

$$mx'' = -bx' - kx \qquad \Leftrightarrow \qquad mx'' + bx' + kx = 0.$$

Charakteristický polynóm tejto rovnice má tvar

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0.$$

Jeho diskriminant a korene sú dané nasledujúcimi rovnosťami:

$$D = \frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{b^2 - 4km}{m^2}, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2-4km}{m^2}}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}.$$

Všimnime si, že reálne zložky koreňov $\lambda_{1,2}$ sú v každom prípade záporné. Skutočne, podľa predpokladu $b, k, m > 0$ je výraz pod odmocninou buď kladný, v takom prípade je v absolútnej hodnote menší ako b^2, alebo záporný, čo znamená, že odmocnina prispieva len do imaginárnej zložky koreňov. V dôsledku toho akékoľvek riešenie $x(t)$ rovnice $mx'' + bx' + kx = 0$ spĺňa vzťah $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Aj riešenie počiatočného problému $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$ popisujúce prechod cez nerovnosť konverguje k nule, čo znamená, že vplyvom tlmičov skutočne dochádza k tlmeniu nežiadúcich oscilácií a akákoľvek odchýlka od rovnovážnej polohy časom zanikne.

Na záver ešte vyšetríme použitie tlmičov z energetického hľadiska. Rovnako ako v predošlom prípade aj teraz je celková energia systému daná súčtom kinetickej a potenciálnej energie. Vypočítajme jej zmenu v čase:

$$\begin{aligned}(E_p(t) + E_k(t))' &= \left(\frac{1}{2}kx(t)^2 + \frac{1}{2}mx'(t)^2\right)' \\ &= kx(t)x'(t) + mx'(t)x''(t) = x'(t)(kx(t) + mx''(t)) = -bx'(t)^2 \leq 0.\end{aligned}$$

Takže celková energia systému skoro neustále klesá.