Príklad 1. Vypočítajte maximálnu rýchlosť padajúceho predmetu s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Predpokladajte, že sila, ktorou pôsobí vzduch na padajúce teleso proti smeru jeho pohybu je priamo úmerná druhej mocnine jeho rýchlosti. Ak predmet padá z dostatočne veľkej výšky, ustáli sa jeho rýchlosť na nejakej hodnote? Ak áno, má na túto hodnotu vplyv počiatočná rýchlosť?

Podľa druhého Newtonovho pohybového zákona je súčet síl pôsobiacich na teleso rovný súčinu hmotnosti a zrýchlenia tohto telesa. V našej situácii na teleso pôsobia dve sily - gravitačná, ktorej veľkosť je mg, kde m je hmotnosť telesa a g je gravitačné zrýchlenie, a sila ktorou pôsobí okolitý vzduch proti smeru pohybu tohto telesa. Podľa predpokladov je veľkosť tejto sily kv^2, kde k je kladná reálna konštanta a $v = v(t)$ je veľkosť rýchlosti telesa v čase t. Vzhľadom k tomu, že tieto sily pôsobia na teleso v navzájom opačných smeroch, platí

$$mv' = mg - kv^2 \quad \Rightarrow \quad v' = g - \frac{k}{m}v^2.$$

To je diferenciálna rovnica so separovanými premennými, ktorú vieme ľahko vyriešiť:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{k}{m}v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}\,\mathrm{d}v = \int 1\,\mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

Integrujme:

$$\begin{aligned}
t + c &= \int \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{g}\int \frac{1}{1 - \frac{k}{gm}v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2g}\int \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{gm}{k}}\left(-\int \frac{-\sqrt{\frac{k}{gm}}}{1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v}\,\mathrm{d}v + \int \frac{\sqrt{\frac{k}{gm}}}{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v}\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\left(-\log\left|1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v\right| + \log\left|1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v\right|\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\log\left|\frac{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v}{1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v}\right|
\end{aligned}$$

Povedzme, že počiatočná rýchlosť v čase 0 bola v_0: $v(0) = v_0$.[1] Uvedomme si, že konkrétna voľba počiatočnej rýchlosti v_0 zodpovedá konkrétnej voľbe integračnej konštanty c:

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\log\left|\frac{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v_0}{1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v_0}\right|$$

Zatiaľ sme našli len implicitné vyjadrenie riešenia uvažovanej diferenciálnej rovnice. V tomto prípade sa však funkcia $v(t)$ dá vyjadriť explicitne. Výpočet rozdelíme na dva prípady:

- $1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v_0 > 0$

$$\Rightarrow t + c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}}\log\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v}{1 - \sqrt{\frac{k}{gm}}v}\right) \Rightarrow v(t) = \frac{\exp\left(2(t+c)\sqrt{\frac{gk}{m}}\right) - 1}{\sqrt{\frac{k}{gm}}\left(1 + \exp\left(2(t+c)\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)\right)} \tag{1}$$

[1] Pripomeňme, že náš model platí len pre $v_0 \geq 0$.

- $1 - \sqrt{\frac{k}{gm}} v_0 < 0$

$$\Rightarrow\ t + c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}} \log\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{k}{gm}}v}{\sqrt{\frac{k}{gm}}v - 1}\right) \ \Rightarrow\ v(t) = \frac{\exp\left(2(t+c)\sqrt{\frac{gk}{m}}\right) + 1}{\sqrt{\frac{k}{gm}}\left(\exp\left(2(t+c)\sqrt{\frac{gk}{m}}\right) - 1\right)} \tag{2}$$

Funkcia $v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}}$ je tiež riešením, ktoré sa nám opäť stratilo pri delení rovnice výrazom $g - \frac{k}{m}v^2$ v $(*)$. V každom z uvedených prípadov platí

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}}.$$

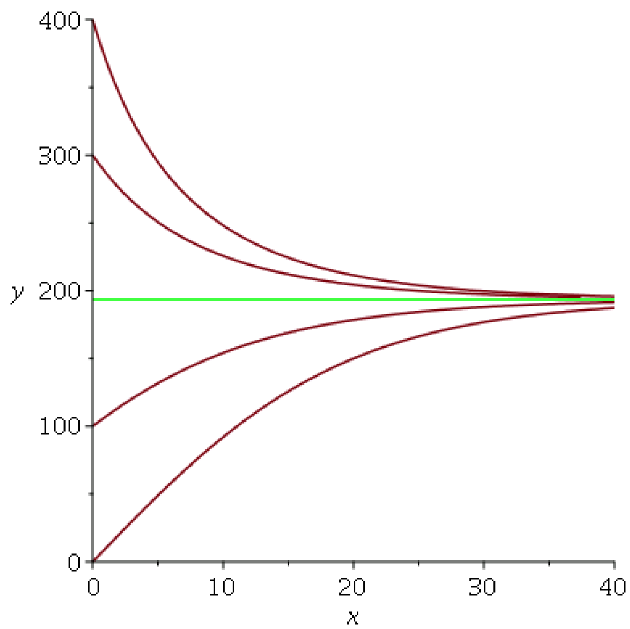
To znamená, že rýchlosť padajúceho predmetu sa po čase skutočne ustáli na nejakej hodnote. Táto hodnota závisí len od jeho hmotnosti, veľkosti a tvaru a parametroch prostredia, teda nie od jeho počiatočnej rýchlosti. Za predpokladu nulovej počiatočnej rýchlosti má rýchlosť v čase t veľkosť

$$v(t) = \frac{\exp\left(2t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right) - 1}{\sqrt{\frac{k}{gm}}\left(1 + \exp\left(2t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)\right)}$$

Vyšetrime priebeh funkcie $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Jej derivácia má tvar

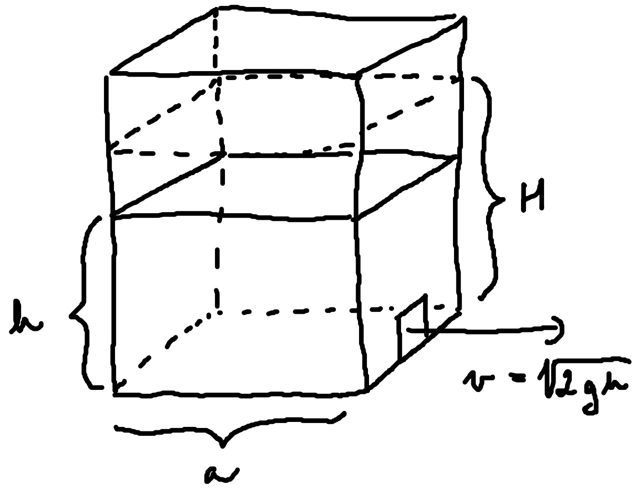
$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Tá je všade kladná, čo znamená, že funkcia $f(x)$ je na celom $\mathbb{R}$ rastúca. Funkcia $v(t)$ preto monotónne konverguje k hodnote $\sqrt{\frac{gm}{k}}$. To znamená, že rýchlosť voľného pádu je pri nulovej počiatočnej rýchlosti zhora ohraničená hodnotou $\sqrt{\frac{gm}{k}}$. ✈



Obr. 1: Príklad 1

Príklad 2. Nádoba tvaru hranola so šírkou a je naplnená do výšky H vodou. Na jej spodku je na bočnej stene otvor s plochou S, cez ktorý voda vyteká. Podľa Torricelliho zákona je rýchlosť v častíc vytekajúcej vody závislá od výšky hladiny h, konkrétne $v = \sqrt{2gh}$. Určte výšku vodnej hladiny v čase t, špeciálne, nájdite čas, za ktorý sa nádrž vyprázdni.



Obr. 2: Príklad 2

Predpokladajme, že voda začala vytekať v čase $t = 0$, teda $h(0) = H$. Nech $t_1, t_2 > 0$ sú ľubovoľné okamihy a $h_1 = h(t_1)$ a $h_2 = h(t_2)$ výšky vodnej hladiny v nádobe v daných časoch. Objem, ktorý za daný čas z nádoby zmizne, je ten istý objem, ktorý za tento čas z nádoby vytečie rýchlosťou v cez prierez s plochou S:

$$a^2(h_1 - h_2) = \int_{t_1}^{t_2} Sv \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} S\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t.$$

Túto rovnosť vydelíme výrazom $t_2 - t_1$, uskutočníme limitný prechod $\lim_{t_2 \to t_1}$ a prepíšeme t_1 na t:

$$-\frac{a^2(h_2 - h_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} S\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_2 \to t_1]{\lim} -a^2 h'(t_1) = S\sqrt{2gh(t_1)} \Rightarrow -a^2 h'(t) = S\sqrt{2gh(t)}.$$

Dostali sme sa k diferenciálnej rovnici so separovanými premennými, ktorú hravo vyriešime:

$$-a^2 h' = S\sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad -a^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = S\sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = \int \frac{-S\sqrt{2g}}{a^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{h} = -\frac{S\sqrt{2g}}{a^2}t + c.$$

Vzhľadom k tomu, že $h(0) = H$, dostávame

$$2\sqrt{H} = c \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{h(t)} = -\frac{S\sqrt{2g}}{a^2}t + 2\sqrt{H} \quad \Rightarrow \quad h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{S\sqrt{2g}}{2a^2}t\right)^2.$$

Čas t, za ktorý sa nádrž úplne vyprázdni je riešením rovnice $h(t) = 0$:

$$0 = 2\sqrt{H} - \frac{S\sqrt{2g}}{a^2}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2a^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{H}.$$

✈