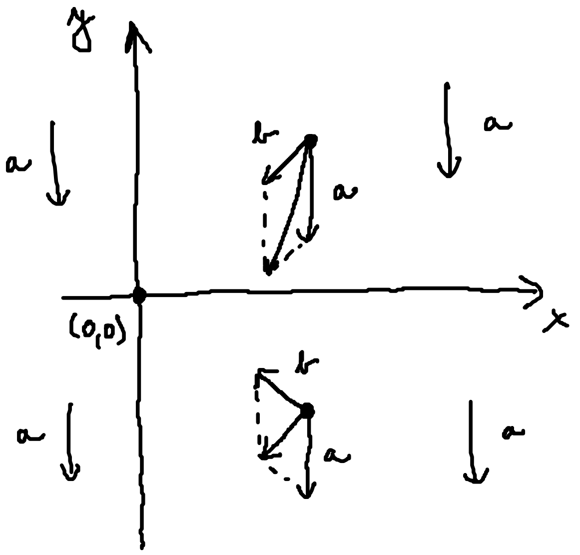
Príklad 1. Pokúsime sa popísať trajektórie pohybu plavca, ktorý sa pokúša doplávať na konkrétne miesto v koryte rieky. Predpokladajme, že v každom bode má tok rieky rovnaký smer aj rýchlosť $a > 0$. Na druhej strane, plavec pláva tiež konštantnou rýchlosťou $b > 0$, pričom neustále smeruje k bodu, ku ktorému sa snaží dostať. Zostavte rovnice popisujúce danú situáciu, nájdite trajektórie pohybu plavca a analyzujte vývoj situácie v závislosti od veličiny a/b. Mohol plavec zvoliť efektívnejšiu stratégiu?

Situáciu môžeme ilustrovať pomocou nasledujúceho obrázka:



Bod, ktorý sa plavec snaží dosiahnuť, sme umietsnili do počiatku a prúd rieky je rovnobežný s osou y, pričom hodnoty premennej y po prúde klesajú. Akýkoľvek vektor smerujúci do počiatku z bodu (x, y) je kladným násobkom vektora $(-x, -y)$. Ak vektor $(-x, -y)$ vydelíme jeho veľkosťou $\sqrt{x^2 + y^2}$ a následne ho vynásobíme hodnotou b, dostaneme zložku rýchlosti, ktorá je spôsobená plavcom samotným. Rovnice popisujúce pohyb plavca v rieke sú

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{-bx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \dot{y} &= -a - \frac{by}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Všimnime si, že vektorové pole reprezentujúce rýchlosť pohybu plavca je ekvivariantné vzhľadom na akciu $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Ak použijeme všeobecnejšie značenie

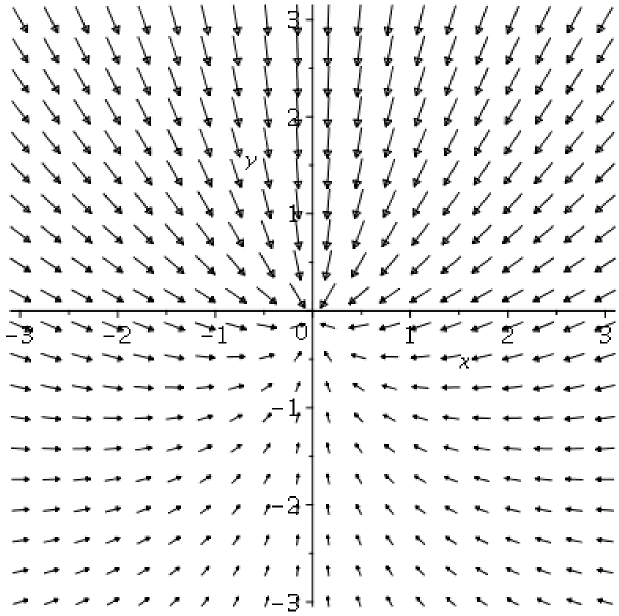
$$f(x, y) = \frac{-bx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad g(x, y) = -a - \frac{by}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

môžeme túto skutočnosť vyjadriť rovnicami $f(-x, y) = -f(x, y)$ a $g(-x, y) = g(x, y)$. To znamená, že situácia v polrovine $x < 0$ je zrkadlovým obrazom situácie v polrovine $x > 0$. Preto nám stačí obmedziť sa len na situáciu $x > 0$. Uvedenú sústavu rovníc redukujeme na jednu obyčajnú diferenciálnu rovnicu pomocou nasledujúcej vety.

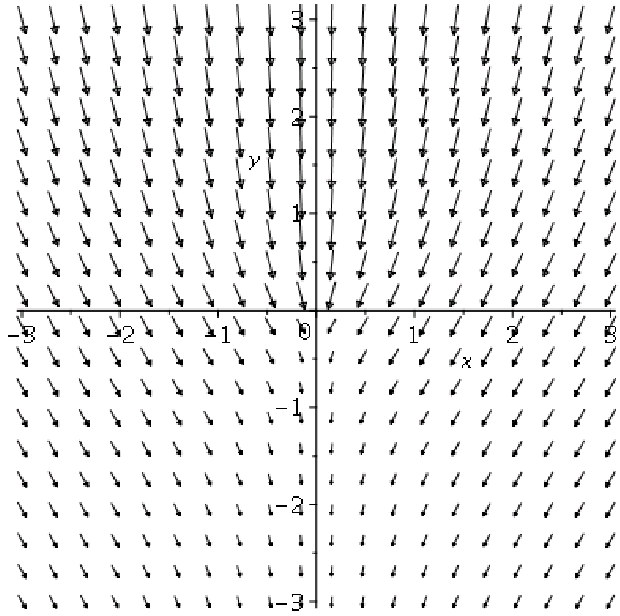
Veta 1. *Uvažujme o nasledujúcom systéme diferenciálnych rovníc:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Predpokladajme, že existuje funkcia F, ktorá je konštantná pozdĺž riešení tohto systému, teda pre každé t platí $F(x(t), y(t)) = c$, kde $(x(t), y(t))$ je riešením $(*)$. Ďalej predpokladajme,



Obr. 1: $a < b$



Obr. 2: $a > b$

že $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, teda rovnica $F(x,y) = c$ implicitne určuje funkciu $y = y(x)$. Za týchto predpokladov platí nasledujúca implikácia. Ak $x(t)$ je riešením rovnice $\dot{x} = f(x, y(x))$, potom $(x(t), y(x(t)))$ je riešením systému $(*)$.

Dôkaz. Keďže $\dot{x}(t) = f(x(t), y(x(t)))$, je prvá rovnica systému $(*)$ splnená. Zderivujme rovnicu $F(x, y(x)) = c$ podľa x a rovnicu $F(x(t), y(t)) = c$ podľa t:

$$F_x + F_y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))},$$
$$F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} = F_x \cdot f + F_y \cdot g = 0.$$

Podľa poslednej rovnice pre každú dvojicu (x, y) sú vektory (F_x, F_y) a (f, g) na seba kolmé, a preto existuje funkcia $k(x, y)$ spĺňajúca

$$(F_x(x,y), F_y(x,y)) = k(x,y)(-g(x,y), f(x,y)).$$

Ďalej platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(x(t)) = y'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) &= -\frac{F_x(x(t), y(x(t)))}{F_y(x(t), y(x(t)))} \cdot f(x(t), y(x(t))) \\ &= \frac{k(x(t), y(x(t))) \cdot g(x(t), y(x(t)))}{k(x(t), y(x(t))) \cdot f(x(t), y(x(t)))} \cdot f(x(t), y(x(t))) = g(x(t), y(x(t))).\end{aligned}$$

To znamená, že aj druhá rovnica systému $(*)$ je splnená. □

Podľa tejto vety je graf funkcie $y(x)$ implicitne určenej rovnicou $F(x, y) = c$ zároveň trajektóriou nejakého riešenia systému $(*)$. Na základe jej dôkazu môžeme usúdiť, že funkcia $y(x)$ je riešením rovnice

$$y' = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Uvedomme si, že k tomuto výsledku vedie aj intuitívnejšia cesta. Ak použijeme značnie $\dot{x} = \mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t$ a $\dot{y} = \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t$, pričom tieto symboly budeme chápať ako zlomky, a druhú rovnicu systému $(*)$ vydelíme prvou, dostaneme

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Zdôraznime, že výraz $k(x,y)$ z dôkazu je v skutočnosti integračným faktorom tejto exaktnej diferenciálnej rovnice. Funkciu F nazývame prvým integrálom.

Pustime sa do počítania:

$$y' = \frac{a + \dfrac{by}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{a + \dfrac{b\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}}{\dfrac{b}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}} = \frac{a + \dfrac{bz}{\sqrt{1+z^2}}}{\dfrac{b}{\sqrt{1+z^2}}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{1+z^2}+bz}{\sqrt{1+z^2}}}{\dfrac{b}{\sqrt{1+z^2}}} = \frac{a}{b}\sqrt{1+z^2} + z.$$

Po úpravách v druhej rovnosti je evidentné, že sa jedná o homogénnu diferenciálnu rovnicu, čo nás viedlo k zavedeniu substitúcie $z = y/x$. Označme $k = a/b$ a pokračujme:

$$\begin{aligned} y' = z'x + z &= k\sqrt{1+z^2} + z \\ z'x &= k\sqrt{1+z^2} \\ \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{k}{x} \\ \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{k}{x}\,\mathrm{d}x = k\log x + c. \end{aligned}$$

Integrál na ľavej strane spočítame nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,\mathrm{d}z \left| \begin{array}{c} z = \tan u \\ \mathrm{d}z = \dfrac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}}\frac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\cos u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\cos u}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{\cos u}{1-\sin^2 u}\,\mathrm{d}u \left| \begin{array}{c} \sin u = s \\ \cos u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}s \end{array} \right| = \int \frac{1}{1-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+s}{1-s}\right) + c = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin\arctan z}{1-\sin\arctan z}\right) + c. \end{aligned}$$

Nájdime prívetivejší tvar výrazu $\sin\arctan z$:

$$\begin{aligned} \sin^2(\arctan z) + \cos^2(\arctan z) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \tan^2(\arctan z) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\arctan z)} \\ &\Rightarrow \quad \cos^2(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2} \\ &\Rightarrow \quad \sin^2(\arctan z) = 1 - \cos^2(\arctan z) = 1 - \frac{1}{1+z^2} = \frac{z^2}{1+z^2} \\ &\Rightarrow \quad \sin(\arctan z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}. \end{aligned}$$

Takže hľadaný integrál je

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}}{1-\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}}\right) + c = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1+z^2}+z}{\sqrt{1+z^2}-z}\right) + c \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1+z^2}+z}{\sqrt{1+z^2}-z}\cdot\frac{\sqrt{1+z^2}+z}{\sqrt{1+z^2}+z}\right) + c = \frac{1}{2}\log\left((\sqrt{1+z^2}+z)^2\right) + c \\ &= \log\left(\sqrt{1+z^2}+z\right) + c \end{aligned}$$

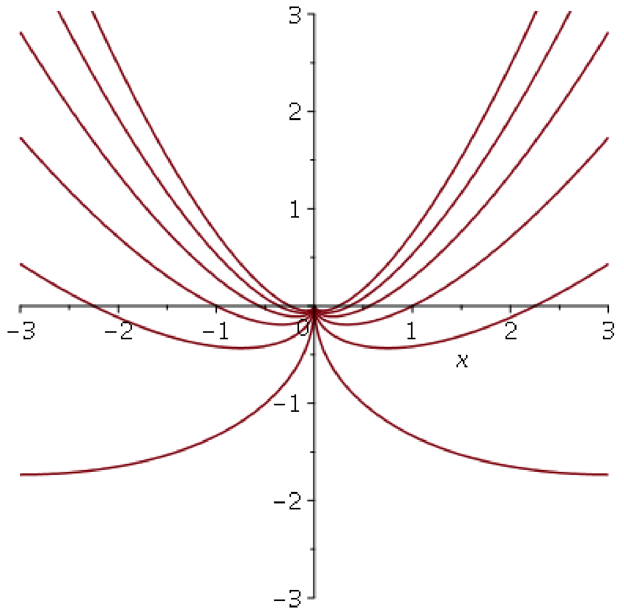
Funkcia $z(x)$ je implicitne zadaná rovnicou

$$\begin{aligned}
\log\left(\sqrt{1+z^2}+z\right) &= k\log x + c \\
\sqrt{1+z^2}+z &= Kx^k, \qquad K>0 \\
\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x} &= Kx^k \\
\sqrt{x^2+y^2} &= Kx^{k+1}-y \qquad /^2 \\
x^2+y^2 &= K^2x^{2k+2}-2Kyx^{k+1}+y^2 \\
y &= \frac{1}{2Kx^{k+1}}\left(K^2x^{2k+2}-x^2\right) = \frac{1}{2}x\left(Kx^k-\frac{1}{Kx^k}\right).
\end{aligned}$$

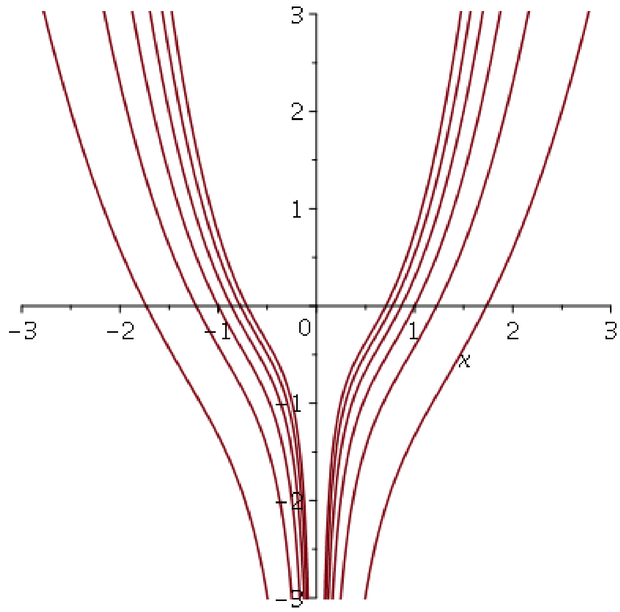
Vzhľadom k tomu, že

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} 0, & k\in(0,1), \\ -\infty, & k>1, \end{cases}$$

môžeme povedať nasledujúce. V prípade, že $b>a$, plavec bez ohľadu na miesto, odkiaľ vyštartoval, nakoniec dopláva do cieľa. Ak $a>b$, potom prúd plavca strhne, nech začínal odkiaľkoľvek.



Obr. 3: $k<1$



Obr. 4: $k>1$

Skúsme vyriešiť rovnicu $y' = g(x,y)/f(x,y)$ všeobecným postupom pre riešenie exaktných diferenciálnych rovníc. Najprv ju trochu zjednodušíme:

$$y' = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{-a-\dfrac{by}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{-bx}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2}+by}{bx}$$

Zaveďme nasledujúce značenie: $P(x,y) = a\sqrt{x^2+y^2}+by$ a $Q(x,y)=bx$. Vzhľadom k tomu, že $Q_x \neq -P_y$, musíme nájsť vhodný integračný faktor $R(x,y)$. Zvoľme

$$R(x,y) = \frac{1}{bx\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Počítajme:

$$(RQ)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(RP)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a\sqrt{x^2+y^2}+by}{bx\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{bx}+\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}-yx\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2(x^2+y^2)}$$
$$= \frac{x(x^2+y^2)-xy^2}{x^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

To znamená, že diferenciálna rovnica

$$y'\cdot RQ - RP = y'\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{a\sqrt{x^2+y^2}+by}{bx\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

je skutočne exaktná, a preto ju môžeme vyriešiť nám už známym spôsobom. Nájdeme funkciu $G(x,y)$, ktorej totálny diferenciál má tvar $RQ\,\mathrm{d}y - RP\,\mathrm{d}x$. Začneme integráciou funckie RQ:

$$G(x,y) = \int R(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\int\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\,\mathrm{d}y \left|\begin{array}{c} z=\frac{y}{x} \\ \mathrm{d}z=\frac{1}{x}\mathrm{d}y\end{array}\right|$$
$$= \int\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,\mathrm{d}z = \log\left(\sqrt{1+z^2}+z\right)+c(x) = \log\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}\right)+c(x).$$

Ďalej spočítame deriváciu G_x a porovnáme ju s funkciou $-RP$, aby sme mohli dopočítať neznámu funkciu $c(x)$:

$$G_x(x,y) = \frac{1}{\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}\cdot(-2)\cdot\frac{y^2}{x^3}\right)+c'(x)$$
$$= \frac{-x}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\right)+c'(x) = \frac{-y}{x\sqrt{x^2+y^2}}+c'(x),$$
$$(-RP)(x,y) = -\frac{a\sqrt{x^2+y^2}+by}{bx\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{a}{bx}-\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}.$$

To znamená, že funkcia $c(x)$ spĺňa diferenciálnu rovnicu $c'(x) = -k/x$. Jej riešením je $c(x) = -k\log(x)+c$. Konečne sme sa dostali k funkcii $G(x,y)$, ktorá implicitne zadáva riešenie rovnice a jej predpis je totožný s predpisom, ktorý sme našli skôr použitou metódou:

$$G(x,y) = \log\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}\right) - k\log(x)+c.$$

Literatúra

[1] SOARE, Mircea V.; TEODORESCU, Petre P.; TOMA, Ileana. *Ordinary differential equations with applications to mechanics.* New York: Springer, 2007.