Kapitoly z pojistné matematiky

Individuální model rizika

Silvie Zlatošová

2021

Obsah

Obsah

Motivace

- Lidé si sjednávají pojištění, aby snižovali dopad nepříznivých náhodných událostí.
- Mohou hledat ochranu před ztrátou majetku, zdraví nebo života.
- Podobná rozhodnutí musí činit také pojišťovny, které se musí chránit před ztrátou finančních prostředků způsobenou vlivem nadměrných pojistných nároků ať už jednotlivce nebo celého pojistného kmene (portfolia).

Motivace

- **Hlavní cíl pojišťovny:** předpovídat pomocí pravděpodobnostního modelu budoucí výdaje pojišťovny.
- Základní nástroj: teorie pravděpodobnosti.
- Příklady náhodných veličin v pojistné matematice:
  - zda nastala pojistná událost z dané smlouvy (0 nebo 1),
  - čas kdy nastala pojistná událost,
  - velikost ztráty z pojistné události,
  - celkový počet pojistných nároků z jedné smlouvy (portfolia),
  - velikost pojistného plnění z jedné smlouvy (portfolia).
- Musíme tedy umět:
  - Modelovat celkový počet nároků,
  - Modelovat velikost jednotlivých nároků
  - Dát to dohromady - Kolektivní teorie rizika
    (+ závislost na čase ... stochastické procesy)

Motivace

Označme S náhodnou veličinu představující **úhrn škod** za období pevně zvolené délky T a n počet smluv v pojistném kmeni. Pak **individuální model:**

- pracuje s riziky příslušejícími jednotlivým pojistným smlouvám v pojistném kmeni.
- zabývá se vlastnostmi **individuálních škodních nároků** $X_i, i = 1, ..., n$ připadajících na jednotlivé pojistné smlouvy.
- uplatňuje se v důležité oblasti určování pojistného podle individuálního škodního průběhu.

Pro vyšetření úhrnu

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

předpokládáme, že náhodné veličiny X_i jsou nezávislé.

Motivace

- **Kolektivní model rizika** vychází z předpokladu, že v dostatečně homogenním pojistném kmeni lze považovat výše škodních nároků z jednotlivých pojistných událostí za stejně rozdělené náhodné veličiny.
- Úhrn škod je pak vyjádřen součtem

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

kde náhodná veličina N představuje počet všech pojistných událostí v uvažovaném období a

$$X_i, i = 1, 2, ...,$$

je posloupnost škodních nároků bez ohledu na to, které pojistné smlouvě přísluš ejí.

Obsah

Podmíněná hustota

- X a Y jsou dvě náhodné veličiny se **sdruženou hustotou** nebo pravděpodobnostní funkcí $f_{X,Y}(x,y)$ a **marginálními hustotami** $f_X(x)$ a $f_Y(y)$.
- **Podmíněná hustota** pro X s daným $Y = y$ je

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

- Jestliže jsou X a Y **nezávislé**, pak platí

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y),$$

a v tomto případě platí

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x).$$

Podmíněná hustota

- **Sdruženou hustotu** je možné vyjádřit jako součin podmíněné a marginální hustoty

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y).$$

- **Marginální hustotu** získáme integrací (případně sumací) sdružené hustoty

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

- Je možné $f_X(x)$ vyjádřit jako

$$f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Podmíněná hustota

- Veličiny X a Y mohou být zaměněny

$$f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x),$$

protože obě strany rovnice jsou rovny sdružené hustotě X a Y.

- Z této rovnice je možné vyjádřit Bayesovu větu

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}.$$

Podmíněná střední hodnota

- Předpokládejme podmíněnou hustotu X za podmínky $Y = y$, $f_{X|Y}(x|y)$. **Podmíněnou střední hodnotu** pak můžeme vyjádřit v následujícím tvaru

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

- Integrál zaměníme za sumu, pokud se bude jednat o diskrétní případ.
- Rovnice (1) je funkcí y.
- Podmíněnou střední hodnotu můžeme vnímat jako náhodnou veličinu, jestliže nahradíme y za Y na levé straně rovnice (1).

Podmíněná střední hodnota

- Střední hodnota náhodné veličiny $\mathrm{E}(X|Y)$ je

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)] = \mathrm{E}(X). \tag{2}$$

- Toto lze dokázat takto

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)] &= \int \mathrm{E}(X|Y=y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int\int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int x \int f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int x f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{E}(X).
\end{aligned}$$

Podobně lze dokázat i pro diskrétní případ.

Podmíněná střední hodnota

V rovnici $\mathrm{E}(X|Y=y)=\int x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$ je možné nahradit X libovolnou funkcí $h(X,Y)$

$$\mathrm{E}[h(X,Y)|Y=y]=\int h(x,y) f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x.$$

$\mathrm{E}[h(X,Y)|Y]$ je náhodnou veličinou, která je funkcí Y. Platí pak

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\{\mathrm{E}[h(X,Y)|Y]\} &= \int \mathrm{E}[h(X,Y)|Y=y] f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int\int h(X,Y) f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int\int h(X,Y)[f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\int h(X,Y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}[h(X,Y)].
\end{aligned}$$

Podmíněná střední hodnota

Zvolíme-li $h(X, Y) = [X - \mathrm{E}(X|Y)]^2$, pak střední hodnota této funkce podmíněné Y je **rozptylem podmíněného rozdělení**

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \mathrm{E}\{[X - \mathrm{E}(X|Y)]^2|Y\}.$$

Můžeme psát

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \mathrm{E}(X^2|Y) - [\mathrm{E}(X|Y)]^2.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] &= \mathrm{E}\{\mathrm{E}(X^2|Y) - [\mathrm{E}(X|Y)]^2\} \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}(X^2|Y)] - \mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\} \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\}.
\end{aligned}$$

Podmíněná střední hodnota

Protože platí $\mathrm{Var}[h(Y)] = \mathrm{E}\{[h(Y)]^2\} - \{\mathrm{E}[h(Y)]\}^2$, použijeme $h(Y) = \mathrm{E}(X|Y)$ a odtud

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)] &= \mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\} - \{\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)]\}^2 \\ &= \mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\} - [\mathrm{E}(X)]^2.\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)] &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\} \\ &\quad + \mathrm{E}\{[\mathrm{E}(X|Y)]^2\} - [\mathrm{E}(X)]^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 \\ &= \mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

Získali jsme důležité vyjádření

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)] \tag{3}$$

Obsah

Příklad

Příklad

Uvažujme životní pojištění pro případ smrti uzavřené na jeden rok. Pojišťovna vyplatí částku b v případě, že nastane pojistná událost (pojištěný zemře) a nevyplatí nic, zůstane-li pojištěný v daném roce naživu. Pravděpodobnost pojistné události je q. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodného pojistného nároku X a dále pak také $\mathrm{E}(X)$ a $\mathrm{Var}(X)$.

Indikátor

Náhodnou veličinu X můžeme také zapsat ve tvaru

$$X = Ib, \tag{4}$$

kde

- b je konstantní pojistná částka vyplacená v případě smrti,
- I je náhodná veličina nabývající hodnoty 1 v případě, že dojde k pojistné události a hodnoty 0 v případě opačném.

Tedy platí

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(I = 0) &= 1 - q \\ \mathrm{P}(I = 1) &= q. \end{aligned}$$

Pak

$$\mathrm{E}(I) = q \quad \mathrm{Var}(I) = q(1 - q).$$

Indikátor

- Náhodná veličina $I \in \{0, 1\}$ se označuje jako **indikátor**, někdy také jako Bernoulliho náhodná veličina nebo binomická náhodná veličina.
- I nabývá hodnoty 1 v případě výskytu pojistné události a hodnoty 0 v případě, že pojistná událost nenastane.

Zobecnění modelu

Model (4) můžeme rozšířit na

$$X = IB, \tag{5}$$

kde

- X je náhodný škodní nárok za dané období,
- B je celková výše nároku, který vznikl v daném období,
- I je indikátor.

Stále budeme uvažovat

$$\mathrm{P}(I = 1) = q.$$

Zobecnění modelu

Pak podle vzorce (2) můžeme psát

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X|I)]$$

a podle vzorce (3)

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|I)] + \mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(X|I)].$$

Označme

$$\mu = \mathrm{E}(B|I = 1) \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(B|I = 1).$$

Pak platí

$$\mathrm{E}(X|I = 0) = 0 \quad \text{a} \quad \mathrm{E}(X|I = 1) = \mathrm{E}(B|I = 1) = \mu.$$

Odtud dostáváme $\mathrm{E}(X|I)$ jako funkci I, tedy

$$\mathrm{E}(X|I) = \mu I.$$

Zobecnění modelu

Dostáváme

$$\mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X|I)] = \mu\,\mathrm{E}(I) = \mu q.$$

Odtud tedy

$$\mathrm{E}(X) = \mu q.$$

Podobně můžeme psát pro rozptyl

$$\mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|I)] = \mu^2\,\mathrm{Var}(I) = \mu^2 q(1-q).$$

Zobecnění modelu

Protože $X = 0$ pro $I = 0$, tak

$$\mathrm{Var}(X|I = 0) = 0.$$

Pro $I = 1$ máme $X = B$ a tedy

$$\mathrm{Var}(X|I = 1) = \mathrm{Var}(B|I = 1) = \sigma^2.$$

Odtud pak dostáváme

$$\mathrm{Var}(X|I) = \sigma^2 I.$$

Zobecnění modelu

Dále platí

$$\mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(X|I)] = \sigma^2\,\mathrm{E}(I) = \sigma^2 q.$$

Tedy pokud dosadíme do vzorce

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}[\,\mathrm{E}(X|I)] + \mathrm{E}[\,\mathrm{Var}(X|I)],$$

dostáváme

$$\mathrm{Var}(X) = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q.$$

Příklad

Příklad

Uvažujme roční životní pojistku pro případ smrti. Zemře-li pojištěný v důsledku úrazu, má být pozůstalým vyplaceno 50 000Kč. Zemře-li pojištěný z jiného důvodu, bude pozůstalým vyplaceno 25 000Kč. Předpokládejme, že u pojištěného s ohledem na jeho věk, zaměstnání a zdravotní stav je pravděpodobnost úmrtí v důsledku úrazu 0,0005 a pravděpodobnost úmrtí z jiné příčiny je 0,002. Určete $\mathrm{P}(I = 1)$, $\mathrm{P}(I = 0)$, $\mathrm{P}(B = 25000|I = 1)$, $\mathrm{P}(B = 50000|I = 1)$.

Příklad

Příklad

Uvažujme pojištění automobilu, kde maximální celková výše nároku B dosahuje 2 000. Pravděpodobnost, že u jednotlivce dojde ke vzniku jedné škody, je 0,15. Pravděpodobnost výskytu více než jedné škody je 0. Známe podmíněnou hustotu celkové výše nároku

$$f_{B|I}(x|1) = \begin{cases} 0,0009\left(1 - \frac{x}{2000}\right) & 0 < x < 2000 \\ 0 & jinde \end{cases}$$

Dále známe $\mathrm{P}(B = 2000|I = 1) = 0,1$. Určete $\mathrm{E}(X)$ a $\mathrm{Var}(X)$.

Obsah

Konvoluce

- Pomocí modelu pro individuální škodní nárok je možné také modelovat **nárok pojišťovny** S, který je možné chápat jako součet nároků jednotlivých pojištěných $X_i, \ i = 1, 2, ..., n$
$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
- Předpokládejme nezávislost jednotlivých nároků.
- Cílem bude určit distribuční funkci, případně pravděpodobnostní funkci či hustotu celkového souhrnu těchto pojistných nároků.

Konvoluce

Uvažujme nejprve součet dvou nezávislých proměnných

$$S = X + Y.$$

Pak **distribuční funkce** veličiny S je

$$F_S(s) = \mathrm{P}(S \leq s) = \mathrm{P}(X + Y \leq s).$$

Pro dvě nezávislé, nezáporné **diskrétní** náhodné veličiny můžeme psát distribuční funkci

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{y \leq s} \mathrm{P}(X + Y \leq s | Y = y)\, \mathrm{P}(Y = y) \\ &= \sum_{y \leq s} \mathrm{P}(X \leq s - y | Y = y)\, \mathrm{P}(Y = y) \\ &= \sum_{y \leq s} F_X(s - y) p_y(y). \end{aligned}$$

Konvoluce

Pro **pravděpodobnostní funkci** pak platí

$$p_S(s) = \sum_{y \leq s} p_X(s-y) p_y(y).$$

Pro **spojité** nezáporné náhodné veičiny můžeme psát podobně

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_0^s \mathrm{P}(X \leq s - y | Y = y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Hustota má tvar

$$f_S(s) = \int_0^s f_X(s-y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y.$$

Konvoluce

Uvažujeme-li náhodné veličiny, které mohou nabývat záporných hodnot, pak sumy a integrály v předchozích vzorcích budou v rozmezí od $-\infty$ do ∞.

Operaci vyjádřenou rovnicemi

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{y \le s} F_X(s-y) p_y(y) \\ F_S(s) &= \int_0^s F_X(s-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

nazýváme **konvoluce** distribučních funkcí F_X a F_Y a značíme ji $F_X * F_Y$.

Konvoluce

Podobně pak pro hustoty nebo pravděpodobnostní funkce můžeme konvoluci těchto funkcí vyjádřit pomocí rovnic

$$\begin{aligned}(f_X * f_Y)(s) &= \int_0^s f_X(s-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ (p_X * p_Y)(s) &= \sum_{y \leq s} p_X(s-y) p_y(y).\end{aligned}$$

Zobecnění

Budeme-li uvažovat součet více než 2 náhodných proměnných, pak můžeme proces konvoluce použít iterativně.

- Uvažujme náhodnou veličinu S definovanou jako
$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$
kde X_i jsou nezávislé pro $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Označme F_i distribuční funkci X_i a $F^{(k)}$ distribuční funkci $X_1 + X_2 + \ldots + X_k$.
- Pak distribuční funkci S můžeme zapsat pomocí iterace jako
$$\begin{aligned} F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1 \\ F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)} \\ &\vdots \\ F^{(n)} &= F_n * F^{(n-1)} \end{aligned}$$

Příklad

Příklad

Uvažujme nezávislé diskrétní náhodné veličiny X_1, X_2 a X_3. Jejich rozdělení je definováno následující tabulkou

x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
0	0.4	0.5	0.6
1	0.3	0.2	0
2	0.2	0.1	0.1
3	0.1	0.1	0.1
4		0.1	0.1
5			0.1

Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci veličiny

$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

Příklad

Příklad

Uvažujme nezávislé spojité náhodné veličiny X_1, X_2 a X_3. Jejich rozdělení je definováno takto

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^{-x} & x > 0, \\ f_2(x) &= 2\,\mathrm{e}^{-2x} & x > 0, \\ f_3(x) &= 3\,\mathrm{e}^{-3x} & x > 0. \end{aligned}$$

Určete pravděpodobnostní hustotu veličiny

$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

Momentová vytvořující funkce

- Další způsob, jak lze určit rozdělení součtu náhodných veličin, je založen na využití **momentové vytvořující funkce**.
- Ta je definovaná pomocí vzorce

$$M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}).$$

- Je-li $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$ konečná pro každé t na otevřeném intervalu okolo počátku, pak je veličina X touto funkcí jednoznačně určena.

Momentová vytvořující funkce

Momentová vytvořující funkce veličiny $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ je pak

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{tS}) = \mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{t(X_1+X_2+\ldots+X_n)}) \\ &= \mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{tX_1}\,\mathrm{e}^{tX_2}\cdots\mathrm{e}^{tX_n}). \end{aligned}$$

Jestliže jsou veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezávislé, pak

$$\mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{tX_1}\,\mathrm{e}^{tX_2}\cdots\mathrm{e}^{tX_n}) = \mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{tX_1})\,\mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{tX_2})\cdots\mathrm{E}(\,\mathrm{e}^{tX_n}).$$

Tedy

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t).$$

Příklad

Příklad

Předpokládejme nezávislé náhodné veličiny X_1, X_2, X_3 s exponenciálním rozložením, jejichž hustoty jsou

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathrm{e}^{-x} & x > 0, \\ f_2(x) &= 2\,\mathrm{e}^{-2x} & x > 0, \\ f_3(x) &= 3\,\mathrm{e}^{-3x} & x > 0. \end{aligned}$$

Pomocí momentové vytvořující funkce odvoďte pravděpodobnostní hustotu veličiny

$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

Aproximace distribuční funkce

Aproximace vychází z **centrální limitní věty** na jejímž základě je možné získat numerickou hodnotu rozložení sumy náhodných veličin.

Věta

Předpokládejme posloupnost nezávislých, stejně rozložených náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$, *jejichž střední hodnota je* $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ *a* $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. *Pak pro každé n platí, že střední hodnota náhodné veličiny*

$$\sqrt{n}\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}, \quad \text{kde} \;\; \bar{X}_n = \frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{n},$$

se blíží 0 *a její rozptyl hodnotě* 1.

Aproximace distribuční funkce

- Posloupnost těchto distribucí pro $n = 1, 2, \ldots$ pak má **aproximativně** standardizované normální rozložení.
- Je-li n dostatečně velké, pak můžeme říci, že náhodná veličina $\bar{X}_n$ má aproximativně normální rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem $\frac{\sigma^2}{n}$.
- Také můžeme říci, že součet n náhodných veličin lze aproximovat normálním rozložením se střední hodnotou $n\mu$ a rozptylem $n\sigma^2$.
- Efektivita takové aproximace pak závisí jednak na počtu náhodných veličin, ale také na odchylce jednotlivých sčítanců od normality.

Aproximace distribuční funkce

Dále budeme používat aproximaci normálním rozložením, kde pro součet nezávislých náhodných veličin $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ platí

$$\mathrm{E}(S) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k), \qquad \mathrm{Var}(S) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k).$$

Pro aplikace potřebujeme

- vyčíslit střední hodnotu a rozptyl individuální náhodné škody,
- sečíst je, abychom získali střední hodnotu a rozptyl pojišťovny jako celku,
- aplikovat aproximaci normálním rozložením.

Obsah

Příklad 1

Příklad

Pojišťovna uzavírá roční životní pojištění s pojistnou částkou 1 nebo 2 jednotky. Pravděpodobnost úmrtí jednotlivce je 0.02 nebo 0.1. Následující tabulka uvádí počet jedinců v každé skupině (n_k), příslušnou pojistnou částku (b_k) a pravděpodobnost úmrtí (q_k).

k	q_k	b_k	n_k
1	0.02	1	500
2	0.02	2	500
3	0.1	1	300
4	0.1	2	500

Pojišťovna by ráda vybrala od těchto 1800 klientů částku, která s pravděpodobností 95% bude vyšší než celková škoda S. Pojišťovna požaduje, aby podíl zaplacený každým klientem j byl $(1+\theta)\,\mathrm{E}(X_j)$, kde $\theta > 0$.

Určete relativní rizikovou přirážku θ.

Příklad 2

Příklad

Uvažujme pojištění automobilů, kde jsou klienti rozděleni do 2 skupin.

Třída k	Počet pojistek n_k	Pravděpodobnost poj. události q_k	Parametry ohraničeného exp. rozd.	
			λ	L
1	500	0.1	1	2.5
2	2000	0.05	2	5.0

Pravděpodobnost, že celková škoda přesáhne celkové pojistné přijaté od všech klientů je 0,05. Určete relativní rizikovou přirážku θ, budeme-li předpokládat, že je stejná pro obě skupiny. Pojišťovna požaduje, aby podíl zaplacený každým klientem j byl $(1 + \theta)\,\mathrm{E}(X_j)$, kde $\theta > 0$.