Kapitoly z pojistné matematiky

Kolektivní model rizika - 1. část

Silvie Zlatošová

2021

Obsah

Obsah

- **Kolektivní model rizika** vychází z předpokladu, že v dostatečně homogenním pojistném kmeni lze považovat výše škodních nároků z jednotlivých pojistných událostí za stejně rozdělené náhodné veličiny.
- Úhrn škod je pak vyjádřen součtem

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

kde náhodná veličina N představuje počet všech pojistných událostí v uvažovaném období a

$$X_i, i = 1, 2, ...,$$

je posloupnost škodních nároků bez ohledu na to, které pojistné smlouvě přísluší.

Motivace

Budeme-li předpokládat že $X_i, i = 1, 2, ...,$ je posloupnost

- stejně rozdělených
- a vzájemně nezávislých náhodných veličin
- a že náhodná veličina N nezávisí na dané posloupnosti,

má úhrn škod S **složené rozdělení.**

Proč složené?

- N má **primární**(vnější) rozdělení
- X má **sekundární** (vnitřní) rozdělení.

Nechť X má generující funkci $G_X(s)$. Pak pro generující funkci S platí

$$G_S(s) = G_N\left(G_X(s)\right), \quad \text{pro } s \in \mathbb{R},$$

kde $G_N(s)$ představuje generující funkci primárního rozdělení a $G_X(s)$ generující funkci sekundárního rozdělení.

Pojistná praxe

- Pro **kolektivní model rizika** předpokládejme náhodný proces, který bude generovat pojistné nároky pro portfolio pojistných smluv.
- Tento proces je charakterizován z hlediska portfolia jako celku, spíše než z hlediska jednotlivých pojistek tvořících portfolio.
- Matematicky lze tento proces charakterizovat takto:

Nechť N označuje počet pojistných nároků, které vznikly v portfoliu pojistek za danou časovou periodu. X_1 označuje výši prvního nároku, X_2 výši druhého nároku, atd. Pak

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

je celkový pojistný nárok, který vznikl v portfoliu za dané období.

Pojistná praxe

- Počet pojistných událostí N je náhodná veličina která souvisí s frekvencí pojistných nároků.
- Individuální pojistné nároky $X_1,\ X_2, \ldots$ jsou také náhodné veličiny, které vyjadřují závažnost jednotlivých pojistných událostí.
- Budeme uvažovat následující předpoklady:

1. $X_1,\ X_2, \ldots$ jsou náhodné veličiny se shodným rozložením,
2. $N,\ X_1,\ X_2, \ldots$ jsou vzájemně nezávislé.

Obsah

Definice

Nechť N je diskrétní náhodná veličina s hodnotami na množině $\mathbb{N}_0$ a nechť $p_N(k)$ je její pravděpodobnostní funkce. Potom generující funkce náhodné veličiny N je definovaná vztahem

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_N(k) \cdot s^k = \mathrm{E}(s^N); \quad s \in \mathbb{R}.$$

Příklady generujících funkcí

1. Konstantní náhodná veličina: $\mathrm{P}(N = k) = 1$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. Máme
$$G_N(s) = 1s^k = s^k.$$
2. Bernoulliho náhodná veličina: $\mathrm{P}(N = 1) = p$ a $\mathrm{P}(N = 0) = 1 - p$. Tedy
$$G_N(s) = ps^1 + (1-p)s^0 = 1 - p + ps.$$

3. Geometrické rozdělení: $\mathrm{P}(N = k) = p(1-p)^k$ pro $k \in \mathbb{N}_0$. Počet neúspěchů před prvním úspěchem. Dostaneme

$$\begin{aligned} G_N(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n s^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p\left[(1-p)s\right]^n = \frac{p}{1-(1-p)s} = \frac{p}{1-s-sp}. \end{aligned}$$

Charakteristiky náhodných veličin

Základní charakteristiky náhodných veličin, $\mathrm{E}(X)$ a $\mathrm{Var}(X)$, lze snadno spočítat pomocí $G_X(s)$.

Věta

Nechť X je náhodná veličina s generující funkcí $G_X(s)$. Pak platí:

$$\mathrm{E}(X) = G'_X(1).$$

Obecně pak

$$\mathrm{E}(X(X-1)\ldots(X-k+1)) = G_X^{(k)}(1)$$

(tzv. k-tý faktoriální moment).

Důkaz: První tvrzení je speciální případ druhého. Máme

$$\begin{aligned} G_X^{(k)}(s) &= \sum_i s^{i-k} i(i-1)...(i-k+1)p_X(i) = \\ &= \mathrm{E}\left(s^{X-k}X(X-1)...(X-k+1)\right). \end{aligned}$$

Pro $s = 1$ dostaneme

$$G_X^{(k)}(1) = \mathrm{E}(X(X-1)...(X-k+1)).$$

Pro rozptyl dostaneme speciálně vztah

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X(X-1)+X) - \mathrm{E}(X)^2 = \\ &= \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= G_X''(1) + G_X'(1) - [G_X'(1)]^2. \end{aligned}$$

Součty náhodných veličin

Věta

Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Pak

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s).$$

Důkaz:

$$\mathrm{E}\left(s^{X+Y}\right) = \mathrm{E}\left(s^X s^Y\right) = \mathrm{E}\left(s^X\right)\mathrm{E}\left(s^Y\right).$$

Obecně, pro součet více nezávislých náhodných veličin dostaneme: Je-li $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, kde X_i jsou nezávislé, pak z předchozí věty plyne

$$G_S = G_{X_1} G_{X_2} \ldots G_{X_n}.$$

Obsah

Značení

Rozdělení celkového pojistného nároku v daném období odvodíme z rozdělení počtu pojistných nároků a rozdělení individuálních pojistných nároků.
Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. Pak označme jako

- $F(x)$ distribuční funkci nezávislých náhodných veličin X_i,
- $p_k = \mathrm{E}(X^k)$ k-tý moment veličiny X,
- $M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$ vytvořující momentovou funkci veličiny X.

Střední hodnota a rozptyl

Budeme-li uvažovat dříve uvedené předpoklady pro $N,\ X_1,\ X_2, \dots$, pak dostaneme

$$\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(\,\mathrm{E}(S|N)) = \mathrm{E}(p_1 N) = p_1\,\mathrm{E}(N)$$

a také

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}(\,\mathrm{Var}(S|N)) + \mathrm{Var}(\,\mathrm{E}(S|N)) \\ &= \mathrm{E}(N\,\mathrm{Var}(X)) + \mathrm{Var}(p_1 N) \\ &= \mathrm{E}(N)\,\mathrm{Var}(X) + p_1^2\,\mathrm{Var}(N), \end{aligned}$$

kde $\mathrm{Var}(X) = p_2 - p_1^2$.

Střední hodnota a rozptyl

- Tedy střední hodnota celkového pojistného nároku je součinem střední hodnoty individuálního škodního nároku a očekávaného počtu pojistných nároků.
- Rozptyl celkového pojistného nároku je pak tvořen dvěma složkami. První složka je odvozena od rozptylu individuálního škodního nároku a druhá složka odpovídá rozptylu počtu nároků.

Vytvořující momentová funkce

Podobně můžeme odvodit výraz pro **momentovou vytvořující funkci** veličiny S:

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tS}|N)) \\ &= \mathrm{E}(M_X(t)^N) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{N \log M_X(t)}) \\ &= M_N(\log M_X(t)). \end{aligned}$$

Příklad

Předpokládejme, že N má geometrické rozložení, tedy že pravděpodobnostní funkce N je

$$\mathrm{P}(N = n) = pq^n \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

kde $0 < q < 1$ a $p = 1 - q$. Vyjádřete $M_S(t)$ pomocí funkce $M_x(t)$.

Distribuční funkce celkového pojistného nároku

K odvození **distribuční funkce** celkového pojistného nároku S budeme využívat celkovou pravděpodobnost. Tedy

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \mathrm{P}(S \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(S \le x | N = n)\, \mathrm{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \le x)\, \mathrm{P}(N = n). \end{aligned}$$

Použijeme-li pro zápis **konvoluci**, můžeme psát

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \le x) = F * F * F * \ldots * F(x) = F^{*n}(x),$$

což je n-tá konvoluce F.

Distribuční funkce celkového pojistného nároku

Připomeňme

$$F^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Pak tedy

$$F_S = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n} \mathrm{P}(N = n).$$

Distribuční funkce celkového pojistného nároku

Je-li individuální pojistný nárok diskrétního typu, tedy $p(x) = \mathrm{P}(X = x)$, pak také celkový pojistný nárok S je diskrétní. Podobně jako u spojitého případu odvodíme, že

$$p_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x)\,\mathrm{P}(N = n),$$

kde

$$p^{*n}(x) = p * p * \ldots * p(x) = \mathrm{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n = x)$$

a

$$p^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Příklad

Předpokládejme pojistný kmen, kde může v daném období dojít k $0, 1, 2$ nebo 3 nehodám s pravděpodobností $0.1, 0.3, 0.4$, respektive 0.2. Jednotlivé pojistné nároky mohou být ve výši $1, 2$, nebo 3 s pravděpodobností $0.5, 0.4$ a 0.1. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci celkového pojistného nároku.

Příklad

Předpokládejme, že N má geometrické rozložení, tedy že pravděpodobnostní funkce N je

$$\mathrm{P}(N = n) = pq^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde $0 < q < 1$ a $p = 1 - q$. A dále budeme předpokládat, že individuální pojistný nárok má exponenciální rozložení se střední hodnotou 1. Tedy

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} \quad x > 0.$$

Ukažte, že

$$M_S(t) = p + q\frac{p}{p-t}.$$