Kapitoly z pojistné matematiky

Kolektivní model rizika - 3.část

Silvie Zlatošová

2021

Obsah

1 Složená rozdělení

Obsah

1 Složená rozdělení

Budeme-li předpokládat že $X_i, i = 1, 2, ...,$ je posloupnost

- stejně rozdělených
- a vzájemně nezávislých náhodných veličin
- a že náhodná veličina N nezávisí na dané posloupnosti,

má úhrn škod S **složené rozdělení.**

Název složeného rozdělení závisí na tom, **jakým rozdělením se řídí náhodná veličina** N, např. má-li N Poissonovo rozdělení, pak má S složené Poissonovo rozdělení.

- Jak **efektivně** vypočítat **pravděpodobnostní funkci diskrétního složeného** rozdělení?
- Můžeme využít **Panjerovu rekurzi.**

Věta (Panjerova rekurze)

Je-li primární rozdělení členem třídy $(a, b, 0)$*, pak platí rekurentní vztah*

$$p_S(k) = \frac{1}{1 - a \cdot p_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{jb}{k}\right) p_X(j) p_S(k-j),$$

kde $k = 1, 2, \ldots, p_S(k) = P(S = k), p_X(k) = P(X = k).$

Analogie platí i pro třídu $(a, b, 1)$.

Věta

Je-li primární rozdělení členem třídy $(a, b, 1)$, pak platí rekurentní vztah

$$\begin{aligned} p_S(k) &= \frac{[p_N(1) - (a+b)p_N(0)]p_X(k)}{1 - a \cdot p_X(0)} \\ &+ \frac{\sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{jb}{k}\right) p_X(j) p_S(k-j)}{1 - a \cdot p_X(0)}, \end{aligned}$$

kde $k = 1, 2, \ldots$, $p_S(k) = P(S = k)$, $p_X(k) = P(X = k)$.

- Uvedené rekurentní vzorce v sobě nezahrnují konvoluci, tím výrazně ulehčí výpočty
- Abychom je mohli použít, je nutné znát hodnotu $p_S(0)$.

Věta

Pro každé složené rozložení platí

$$p_S(0) = G_N(p_X(0)),$$

kde $G_N(s)$ je generující funkce primárního rozdělení a $p_X(0)$ je pravděpodobnost, že náhodná veličina X ze sekundárního rozdělení nabude hodnoty 0, tj. $P(X = 0)$.

V praxi má rozdělení výše nároků $p_X(0) = 0$, pak $p_S(0) = G_N(0) = p_N(0)$.

Složené Poissonovo rozdělení

- O **složeném Poissonově rozdělení** veličiny

$$S = \sum_{i=0}^{N} X_i,$$

  mluvíme v případě, kdy N má Poissonovo rozdělení.
- Je považováno za nejdůležitější složené rozdělení, protože právě Poissonovo rozdělení bývá nejčastěji využíváno k popisu počtu škod.

Definice

Nechť mají IID náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$ společnou distribuční funkci $F_X(k)$ a nechť jsou nezávislé na N. Pak náhodný součet $S = \sum_{i=0}^{N} X_i$ má složené Poissonovo rozdělení s parametry λ a $F_X(k)$, značíme $S \sim CPo(\lambda, F_X(k))$, jestliže N se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$.

Složené Poissonovo rozdělení

Označení: Poisson - rozdělení X, např. Poisson - geometrické rozdělení, pokud X má geometrické rozdělení.

- Pro složené Poissonovo rozdělení platí:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S) &= \lambda p_1 \\ \mathrm{Var}(S) &= \lambda p_2, \end{aligned}$$

  kde $p_k = E(X^k)$.

- **Momentovou vytvořující funkci** veličiny S můžeme zapsat ve tvaru

$$M_S(t) = \mathrm{e}^{\lambda(M_X(t)-1)}.$$

Příklad

Odvoďte tvar $p_S(0)$ a $p_S(k)$ pro složené Poissonovo rozdělení.

Příklad

Předpokládejme, že S má složené Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 0.8$ a individuální pojistné nároky jsou 1, 2 nebo 3 s pravděpodobností 0.25, 0.375 a 0.375. Vypočtěte $p_S(k)$ pro $k = 0, 1, 2, 3$ pomocí rekurzivní metody.

Složené Poissonovo rozdělení

Věta

Nechť jsou veličiny $S_1, S_2, ..., S_n$ vzájemně nezávislé a nechť S_j má složené Poissonovo rozdělení s parametrem λ_j pro primární rozdělení a se sekundárním rozdělením $\{p_j(k) : k \in \mathbb{N}_0\}$, pro $j = 1, 2, ..., n$. Pak veličina $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$ má také složené Poissonovo rozložení s parametrem $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ a sekundárním rozdělením $\{p_S(k) : k \in \mathbb{N}_0\}$, kde

$$p_S(k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda} p_j(k),$$

kde $k = 0, 1, ...$

Složené Poissonovo rozdělení

Tato věta má **dva důležité důsledky** pro tvorbu pojistných modelů:

1. Mějme n různých vzájemně nezávislých portfólií, kde se celkový počet nároků jednotlivých portfólií řídí složeným Poissonovým rozdělením, potom se celkový počet nároků vzniklý kombinací těchto portfólií bude také řídit složeným Poissonovým rozdělením.
2. Uvažujeme-li pojistné portfolio na dobu n let a předpokládáme-li, že celkové počty nároků jednotlivých let jsou vzájemně nezávislé a mají složené Poissonovo rozdělení, pak celkový počet nároků vzniklý za n let bude mít také složené Poissonovo rozdělení.

Složené Poissonovo rozdělení

Příklad

Nechť se $n = 2$ a S_1 má složené Poissonovo rozdělení s $\lambda_1 = 2$ a sekundárním rozdělením $p_1(1) = 0,2$, $p_1(2) = 0,7$, $p_1(3) = 0,1$. Nechť S_2 je nezávislé na S_1 a má složené Poissonovo rozdělení s $\lambda_2 = 3$ a se sekundárním rozdělením $p_2(1) = 0$, $p_2(2) = 0,25$, $p_2(3) = 0,6$ a $p_2(4) = 0,15$. Určete rozdělení $S = S_1 + S_2$.

Geometrické složené rozdělení

Definice

Nechť mají IID náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots$ společnou distribuční funkci $F_X(k)$ a nechť jsou nezávislé na N. Pak náhodný součet $S = \sum_{i=0}^{N} X_i$ má složené geometrické rozdělení s parametry p a $F_X(k)$, značíme $S \sim CGe(p, F_X(k))$, jestliže N se řídí geometrickým rozdělením s parametrem $p \in (0, 1)$.

Analogicky se dá definovat složené negativně binomické rozdělení a složené binomické rozdělení.

Příklad

Pro složené geometrické rozdělení odvoďte tvar $p_S(0), p_S(k), G_S(s), M_S(t), \mathrm{E}(S), Var(S)$.