M6150 Funkcionálna analýza I

Lineárne funkcionály

Peter Šepitka

leto 2017

Obsah

Obsah

Pojem lineárneho funkcionálu

Definícia 1 (Lineárny funkcionál na vektorom priestore)

Nech X je lineárny priestor nad telesom $\mathbb{R}$. Ľubovoľné zobrazenie $f : X \to \mathbb{R}$ nazývame funkcionálom na priestore X. Ak zobrazenie f je lineárne, t.j., platí

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x) \quad \text{pre každé } x, y \in X \text{ a } \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

hovoríme o lineárnom funkcionále na priestore X.

Príklad 1

Pre zvolené $n \in \mathbb{N}$ položme $X := \mathbb{R}^n$ a nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ je nejaká n-tica skalárov. Potom zobrazenie $f : X \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$f(x) := \lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_n\, x_n, \quad x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

je lineárny funkcionál na priestore X, ako sa možno ľahko presvedčiť.

Príklad 2

Pre pevný index $k_0 \in \mathbb{N}$ je zobrazenie $f : l^2 \to \mathbb{R}$ definované $f(x) := x_{k_0}$ pre každú postupnosť $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$ lineárnym funkcionálom na priestore l^2.

Príklad 3

Klasickým príkladom lineárneho funkcionálu na priestore $X := \mathcal{C}[a,b]$ reálnych funkcií spojitých na intervale $[a,b]$ je zobrazenie $f : X \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$f(u) := \int_a^b u(x)\, y(x)\, \mathrm{d}x, \quad u \in \mathcal{C}[a,b], \tag{3}$$

kde $y \in \mathcal{C}[a,b]$ je pevne zvolená funkcia. Na priestore X je možné uvažovať i lineárny funkcionál typu

$$\delta_{x_0}(u) := u(x_0), \tag{4}$$

ktorý každej funkcii $u \in \mathcal{C}[a,b]$ priradí jej hodnotu vo zvolenom bode $x_0 \in [a,b]$.

Definícia 2 (Jadro lineárneho funkcionálu)

Nech X je lineárny priestor a $f : X \to \mathbb{R}$ netriviálny lineárny funkcionál, t.j., zobrazenie f nie je identicky nulové na X. Množina

$$\operatorname{Ker} f := \{x \in X,\ f(x) = 0\} \tag{5}$$

sa označuje ako jadro lineárneho funkcionálu f.

Poznámka 1

Je zrejmé, že jadro $\operatorname{Ker} f$ lineárneho funkcionálu f je lineárny podpriestor v X.

Veta 1

Nech X je lineárny priestor a $f : X \to \mathbb{R}$ netriviálny lineárny funkcionál. Zvoľme ľubovoľný prvok $x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Potom každý vektor $x \in X$ je možné vyjadriť jediným spôsobom v tvare $x = \lambda\, x_0 + y$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a $y \in \operatorname{Ker} f$.

Dôkaz Vety 1.

Vďaka predpokladu netriviálnosti lineárneho funkcionálu f je množina $X \setminus \operatorname{Ker} f$ neprázdna. Vyberme teda nejaký vektor $x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Potom zrejme s ohľadom na (5) platí $f(x_0) \neq 0$. Pre ľubovoľne zvolený prvok $x \in X$ položme

$$\lambda := \frac{f(x)}{f(x_0)}, \qquad y := x - \lambda\, x_0 = x - \frac{f(x)}{f(x_0)}\, x_0. \tag{6}$$

Nie je ťažké ukázať, že vektor y v (6) je prvkom jadra funkcionálu f, nakoľko

$$f(y) \overset{(6)}{=} f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)}\, x_0\right) \overset{(1)}{=} f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)}\, f(x_0) = 0,$$

a tak $y \in \operatorname{Ker} f$ podľa (5). Pre daný prvok x teda platí reprezentácia v tvrdení vety. Ukážeme jednoznačnosť takejto reprezentácie. Nech $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ a $\tilde{y} \in \operatorname{Ker} f$ rovnako spĺňajú $x = \tilde{\lambda}\, x_0 + \tilde{y}$. Potom platí $y - \tilde{y} = (\tilde{\lambda} - \lambda)\, x_0$, a následne

$$0 \overset{(5)}{=} f(y) - f(\tilde{y}) = f(y - \tilde{y}) = f\left((\tilde{\lambda} - \lambda)\, x_0\right) = (\tilde{\lambda} - \lambda)\, f(x_0).$$

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

Keďže $f(x_0) \neq 0$, z poslednej rovnosti vyplýva $\tilde{\lambda} = \lambda$, a napokon i $\tilde{y} = y$. ∎

Poznámka 2 (Kodimenzia jadra lineárneho funkcionálu)

Výsledok Vety 1 možno ekvivalentne vyjadriť skutočnosťou, že pre každý netriviálny lineárny funkcionál f na lineárnom priestore X je kodimenzia podpriestoru $\mathrm{Ker}\, f$ v X rovná 1. Ďalej poznamenajme, že bez ujmy na všeobecnosti je možné prvok $x_0 \in X \setminus \mathrm{Ker}\, f$ zvoliť tak, aby $f(x_0) = 1$. V tomto prípade je potom podľa (6) pre každé $x \in X$ skalár $\lambda = f(x)$, a tak

$$\text{pre každý vektor } x \in X \text{ platí rozklad } x = f(x)\, x_0 + y, \text{ kde } y \in \mathrm{Ker}\, f. \tag{7}$$

Definícia 3 (Nadrovina rovnobežná s lineárnym podpriestorom)

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ jeho lineárny podpriestor kodimenzie 1. Potom prvky faktorového priestoru X/A nazývame nadroviny rovnobežné s podpriestorom A. Obzvlášť, ak $x_0 \in X \setminus A$ je pevne zvolený vektor, potom pre každú nadrovinu $E \in X/A$ existuje jediný skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ s vlastnosťou

$$E = \lambda\, [x_0] = \{x \in X,\ x = \lambda\, x_0 + y,\ y \in A\}. \tag{8}$$

Veta 2

Nech X je lineárny priestor a $f : X \to \mathbb{R}$ netriviálny lineárny funkcionál. Potom podmnožina $E \subseteq X$ je trieda rozkladu $X/\mathrm{Ker}\, f$ práve vtedy, keď $E = \{x \in X,\ f(x) = \lambda\}$ pre nejaké $\lambda \in \mathbb{R}$. V tomto prípade platí rovnosť $E = \lambda\,[x_0]$, kde $x_0 \in X \setminus \mathrm{Ker}\, f$ je ľubovoľne zvolený vektor spĺňajúci $f(x_0) = 1$.

Dôkaz Vety 2.

Podľa Poznámok 1 a 2 je jadro $\mathrm{Ker}\, f$ daného lineárneho funkcionálu f lineárny podpriestor v X kodimenzie 1. Zvoľme nejaký vektor $x_0 \in X \setminus \mathrm{Ker}\, f$ taký, že $f(x_0) = 1$. Nech $E \in X/\mathrm{Ker}\, f$ je nejaké nadrovina rovnobežná s $\mathrm{Ker}\, f$. V súlade s Definíciou 3, v ktorej položíme $A := \mathrm{Ker}\, f$, potom $E = \lambda\,[x_0]$ pre jednoznačne určený skalár $\lambda \in \mathbb{R}$. Využitím relácií (5) a (8) sa ľahko ukáže, že na nadrovine E má funkcionál f konštantnú hodnotu λ, nakoľko platí

$$f(x) \overset{(8)}{=} f(\lambda\, x_0 + y) = \lambda\, f(x_0) + f(y) \overset{(5)}{=} \lambda\, f(x_0) = \lambda \quad \text{pre každé } x \in E. \tag{9}$$

Na druhej strane, podľa poznatku (7) v Poznámke 2 a rovnosti (8) každý prvok $x \in X$, v ktorom má funkcionál f hodnotu λ, patrí do danej triedy E, keďže

$$x \overset{(7)}{=} f(x)\, x_0 + y = \lambda\, x_0 + y \overset{(8)}{\in} \lambda\,[x_0] = E. \tag{10}$$

Preto $E = \{x \in X,\ f(x) = \lambda\}$. Naopak, ak $E \subseteq X$ je množina všetkých prvkov

Dôkaz Vety 2 pokračovanie.

$x \in X$, v ktorých má funkcionál f danú hodnotu $\lambda \in \mathbb{R}$, potom podľa (10) máme $E \subseteq \lambda\,[x_0]$. Podľa prvej časti dôkazu na nadrovine $\lambda\,[x_0] \in X/\operatorname{Ker} f$ má lineárny funkcionál f konštantnú hodnotu λ, teda $\lambda\,[x_0] \subseteq E$. Takže platí $E = \lambda\,[x_0]$ a E je nadrovina rovnobežná s podpriestorom $\operatorname{Ker} f$. ■

Poznámka 3

Z Vety 2 vyplýva nasledujúce pozorovanie. Pre každý daný netriviálny lineárny funkcionál f pôsobiaci na lineárnom priestore X platí, že rozklad $X/\operatorname{Ker} f$ splýva s rozkladom priestoru X podľa relácie

$$\text{prvky } x, y \in X \text{ sú v relácii práve vtedy, keď } f(x) = f(y). \tag{11}$$

Dôsledok 1

Nech X je lineárny priestor a $f : X \to \mathbb{R}$ netriviálny lineárny funkcionál. Potom množina $E_f = \{x \in X,\ f(x) = 1\}$ je nadrovina rovnobežná s $\operatorname{Ker} f$.

Dôkaz Dôsledku 1.

Tvrdenie vyplýva priamo z Vety 2 pre voľbu $\lambda := 1$. ■

Veta 3

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ lineárny podpriestor kodimenzie 1. Potom pre každú triedu $E \subseteq X/A$ rôznu od A a pre každý skalár $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existuje jediný lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $E = \{x \in X,\ f(x) = \lambda\}$. Naviac, pre jadro funkcionálu f platí $\operatorname{Ker} f = A$.

Dôkaz Vety 3.

Nech $E \subseteq X/A$, $E \neq A$, a $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sú dané. Využitím predpokladov vety a Definície 3 nie je ťažké si premyslieť, že existuje aspoň jeden prvok $x_0 \in X \setminus A$ taký, že $E = \lambda\,[x_0]$. Zároveň, nadrovina $[x_0] \in X/A$ zrejme generuje celý faktorový priestor X/A, t.j.,

$$X/A = \{\alpha\,[x_0],\ \alpha \in \mathbb{R}\}. \tag{12}$$

Obzvlášť, každý vektor $x \in X$ sa teda dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$x = \alpha\,x_0 + y, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ y \in A. \tag{13}$$

Uvažujme teraz zobrazenie $f : X \to \mathbb{R}$ definované predpisom

$$\text{pre každé } x \in X \text{ je } f(x) := \alpha, \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R} \text{ je dané v (13).} \tag{14}$$

Ľahko sa presvedčíme, že zobrazenie f v (14) je lineárny funkcionál na priestore X, pričom z formuly (8) a z jednoznačnosti vyjadrenia v (13) vyplýva

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

$$f(x_0) = 1, \qquad f(x) = \lambda \iff x \in E, \qquad f(x) = 0 \iff x \in A. \tag{15}$$

To teda znamená, že $E = \{x \in X,\ f(x) = \lambda\}$ a $\operatorname{Ker} f = A$. Napokon ukážeme jednoznačnosť funkcionálu f. Nech $g : X \to \mathbb{R}$ je lineárny funkcionál spĺňajúci $E = \{x \in X,\ g(x) = \lambda\}$. Nakoľko vektor $\lambda\, x_0 \in E = \lambda\,[x_0]$ a $\lambda \neq 0$, platí

$$g(x_0) = g\left(\frac{1}{\lambda}\,\lambda\, x_0\right) = \frac{1}{\lambda}\, g(\lambda\, x_0) = \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda = 1. \tag{16}$$

Ďalej, funkcionál g nadobúda na podpriestore A nulovú hodnotu, keďže pre každý vektor $y \in A$ máme

$$g(y) = g\left([\lambda\, x_0 + y] - \lambda\, x_0\right) = g(\lambda\, x_0 + y) - g(\lambda\, x_0) \overset{(8)}{=} \lambda - \lambda = 0. \tag{17}$$

Kombináciou formúl (13), (14), (16) a (17) potom pre každé $x \in X$ dostávame

$$g(x) \overset{(13)}{=} g(\alpha\, x_0 + y) = \alpha\, g(x_0) + g(y) \overset{(16),(17)}{=} \alpha \overset{(14)}{=} f(x),$$

z čoho vyplýva, že $g = f$ na celom X. Dôkaz je teda kompletný. ∎

Dôsledok 2

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ lineárny podpriestor kodimenzie 1. Potom pre každú nadrovinu $E \subseteq X/A$ rôznu od A existuje jediný lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ taký, že $E = \{x \in X,\ f(x) = 1\}$.

Dôkaz Dôsledku 2.

Daný výsledok je špeciálnym prípadom tvrdenia Vety 3 pre hodnotu $\lambda := 1$. ■

Veta 4

Nech X je lineárny priestor. Potom existuje bijektívne zobrazenie medzi množinou všetkých netriviálnych lineárnych funkcionálov f pôsobiacich na X a množinou všetkých nadrovín priestoru X neobsahujúcich nulový vektor.

Dôkaz Vety 4.

Existencia daného bijektívneho zobrazenia je zaručená výsledkami Dôsledkov 1 a 2. Konkrétne, priradenie dané predpisom

$$\text{netriviálny lineárny funkcionál } f \text{ na } X \ \mapsto\ \text{nadrovina } E_f = \{x \in X,\ f(x) = 1\},$$

je v súlade s Dôsledkom 1 zobrazením, kým podľa Dôsledku 2 je to bijekcia. ■

Obsah

Konvexné množiny a konvexné funkcionály

Definícia 4 (Konvexná množina v lineárnom priestore)

Nech X je lineárny priestor a $x, y \in X$ ľubovoľné vektory. Množina prvkov

$$U(x,y) := \{\lambda x + \eta y, \quad \lambda, \eta \in [0,\infty),\ \lambda + \eta = 1\} \tag{18}$$

sa označuje ako uzavretá úsečka v priestore X spájajúca body x, y. Množina vektorov $U(x,y) \setminus \{x, y\}$ sa nazýva otvorená úsečka v X spájajúca prvky x, y. Množinu $A \subseteq X$ potom nazývame konvexnou v priestore X, ak s každými dvomi bodmi $x, y \in A$ obsahuje i uzavretú úsečku $U(x,y)$.

Definícia 5 (Konvexné teleso v lineárnom priestore)

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ je množina. Pod pojmom vnútro množiny A rozumieme množinu $I(A)$ všetkých vektorov $x \in X$ s vlastnosťou

$$\text{pre každé } y \in X \text{ existuje } \varepsilon > 0 \text{ tak, že vektor } x + ty \in A \text{ pre každé } |t| < \varepsilon. \tag{19}$$

Každá konvexná množina $A \subseteq X$, ktorej vnútro $I(A)$ je neprázdna množina, sa nazýva konvexné teleso v priestore X.

Definícia 6 (Konvexný funkcionál v lineárnom priestore)

Nech X je lineárny priestor. Ľubovoľný nezáporný funkcionál $p : X \to [0, \infty)$ sa označuje prívlastkom konvexný, ak spĺňa vlastnosti

$$p(x+y) \le p(x) + p(y), \quad p(\lambda\, x) = \lambda\, p(x) \quad \text{pre každé } x, y \in X \text{ a } \lambda \in [0, \infty). \tag{20}$$

Príklad 4

Z Definície 6 je zrejmé, každá norma $\|\cdot\|$ definovaná na priestore X je konvexným funkcionálom na X.

Príklad 5

Pre dané $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$, položme $X := \mathcal{B}[a, b]$, t.j., množina všetkých reálnych funkcií definovaných a ohraničených na intervale $[a, b]$. Z predchádzajúcich prednášok vieme, že sa jedná o lineárny priestor. Naviac, nie je ťažké ukázať, že zobrazenie $p : X \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$p(f) := |f(a)|, \quad f \in X, \tag{21}$$

je konvexný funkcionál. Poznamenajme, že zobrazenie p v (21) predstavuje tzv. pseudonormu na priestore X.

Veta 5

Nech X je lineárny priestor a $p : X \to [0, \infty)$ konvexný funkcionál. Potom pre každé kladné reálne číslo c je množina

$$E_c := \{x \in X,\ p(x) \leq c\} \tag{22}$$

konvexné teleso v X. Naviac, pre každé $c > 0$ vnútro množiny E_c spĺňa rovnosť

$$I(E_c) = \{x \in X,\ p(x) < c\}. \tag{23}$$

Poznámka 4

Z druhej podmienky v (20) v Definícii 6 vyplýva, že každý konvexný funkcionál p pôsobiaci na lineárnom priestore X spĺňa $p(0) = 0$. To znamená, že v kontexte Vety 5 pre každé $c > 0$ vnútro $I(E_c)$ konvexného telesa E_c v (22) obsahuje nulový vektor. Obzvlášť, podľa Vety 5 s $c := 1$ je množina

$$E_1 = \{x \in X,\ p(x) \leq 1\} \text{ konvexné teleso s vnútrom } I(E_1) = \{x \in X,\ p(x) < 1\}.$$

Naopak, ak E je konvexné teleso v X spĺňajúce $0 \in I(E)$, potom zobrazenie

$$p_E(x) := \inf\left\{r > 0,\quad \frac{x}{r} \in E\right\}, \quad x \in X, \tag{24}$$

je nezáporný konvexný funkcionál na X, pričom $I(E) = \{x \in X,\ p_E(x) < 1\}$. Funkcionál p_E v (24) sa nazýva Minkowského funkcionál pre konvexné teleso E.

Hahnova–Banachova veta

Definícia 7 (Predĺženie lineárneho funkcionálu)

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ lineárny podpriestor. Nech $f_A : A \to \mathbb{R}$ je lineárny funkcionál pôsobiaci na priestore A. Hovoríme, že lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ pôsobiaci na priestore X je predĺženie (rozšírenie) funkcionálu f_A, ak pre každý vektor $x \in A$ platí rovnosť $f(x) = f_A(x)$.

Lema 1 (Kuratowskeho–Zornova)

Nech M je čiastočne usporiadaná množina. Predpokladajme, že každá lineárne usporiadaná podmnožina $N \subseteq M$ má horné ohraničenie v M. Potom množina M má aspoň jeden maximálny prvok.

Poznámka 5

Poznamenajme, že Kuratowskeho–Zornova lema 1 je mimoriadne dôležitý výsledok teórie množín, ktorý je kľúčovou súčasťou dôkazov mnohých významných tvrdení z rozličných oblastí matematiky. Je ekvivalentná s tzv. axiómou výberu.

Veta 6 (Hahnova–Banachova veta)

Nech X je lineárny priestor a $A \subseteq X$ jeho lineárny podpriestor. Nech $p : X \to \mathbb{R}$ je konvexný funkcionál pôsobiaci na priestore X a $f_A : A \to \mathbb{R}$ je lineárny funkcionál pôsobiaci na priestore A, pričom platí nerovnosť $f_A(x) \leq p(x)$ pre každý vektor $x \in A$. Potom existuje lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ definovaný na X, ktorý je predĺžením funkcionálu f_A, a ktorý pre každý vektor $x \in X$ spĺňa nerovnosť $f(x) \leq p(x)$.

Dôkaz Vety 6.

Skôr, než pristúpime k dôkazu samotnému tvrdenia, odvodíme jedno pozorovanie. Nech $y, z \in A$ sú ľubovoľné vektory. Vďaka konvexnosti funkcionálu p platí

$$f_A(y) - f_A(z) = f_A(y - z) \leq p(y - z) = p(y + u - z - u) \leq p(y + u) + p(-z - u)$$

$$\Downarrow$$

$$-f_A(z) - p(-z - u) \leq -f_A(y) + p(y + u) \quad \text{pre každý vektor } u \in X. \tag{25}$$

Využitím relácie (25) môžeme potom pre ľubovoľné $u \in X$ definovať čísla

$$c_I(u) := \inf\{-f_A(y) + p(y + u), \quad y \in A\}, \tag{26}$$

$$c_S(u) := \sup\{-f_A(z) - p(-z - u), \quad z \in A\}. \tag{27}$$

Dôkaz Vety 6 (pokračovanie).

Zrejme platí $c_S(u) \leq c_I(u)$ pre každý vektor $u \in X$. Predpokladajme teraz, že podpriestor $A \neq X$ (ak totiž $A = X$, tak predložená veta platí triviálne). Dokážeme, že potom je možné lineárny funkcionál f_A predĺžiť na istý väčší (v zmysle inklúzie) lineárny podpriestor $A' \subseteq X$ tak, aby sa zachovala nerovnosť požadovaná vo vete. Zvoľme nejaký prvok $u \in X \setminus A$ a položme

$$A' := \mathrm{Lin}\{A, u\} = \{x + tu,\ x \in A,\ t \in \mathbb{R}\}. \tag{28}$$

Zrejme množina A' v (28) je lineárny podpriestor v X spĺňajúci $A \subsetneq A'$. Zvoľme ďalej reálne číslo c tak, aby $c_S(u) \leq c \leq c_I(u)$, kde $c_S(u), c_I(u)$ sú pre daný vektor u zavedené v (26) a (27), a definujme zobrazenie $f_{A'} : A' \to \mathbb{R}$ predpisom

$$f_{A'}(x') := f_A(x) + tc \quad \text{pre každý vektor } x' = x + tu \in A'. \tag{29}$$

Vďaka jednoznačnosti vyjadrenia prvkov podpriestoru A' v (28) je zobrazenie $f_{A'}$ v (29) zavedené korektne, pričom sa jedná o lineárny funkcionál na A', ktorý je zrejme predĺžením funkcionálu f_A. Naviac, ukážeme, že platí nerovnosť

$$f_{A'}(x') \leq p(x') \quad \text{pre každé } x' \in A'. \tag{30}$$

Podľa predpokladov je táto nerovnosť splnená na podpriestore A. Vyberme preto vektor $x' \in A' \setminus A$, t.j., v súlade s (28) máme $x' = x + tu$ pre vhodné $x \in A$ a $t \neq 0$. Uvažujme najprv prípad $t > 0$. Kombináciou identít (26) a (29) s nerovnosťou $c \leq c_I(u)$ potom dostávame

Dôkaz Vety 6 (pokračovanie).

$$f_{A'}(x') \overset{(29)}{=} f_A(x) + tc \leq f_A(x) + tc_I(u) \overset{(26)}{\leq} f_A(x) + t\left[-f_A(y) + p(y+u)\right] \quad (31)$$

pre každé $y \in A$. Následne, položiac v (31) $y := \frac{x}{t} \in A$ a využijúc vlastnosti funkcionálov f_A a p napokon máme

$$f_{A'}(x') \overset{(31)}{\leq} f_A(x) + t\left[-f_A\left(\frac{x}{t}\right) + p\left(\frac{x}{t} + u\right)\right] = f_A(x) - f_A(x) + p(x+tu) = p(x').$$

V prípade $t < 0$ postupujeme analogicky. Pomocou (27), (29) a nerovnosti $c_S(u) \leq c$ postupne odvodíme

$$f_{A'}(x') \overset{(29)}{=} f_A(x) + tc \leq f_A(x) + tc_S(u) \overset{(27)}{\leq} f_A(x) + t\left[-f_A(z) - p(-z-u)\right] \quad (32)$$

pre každé $z \in A$. Majúc na zreteli, že $-t > 0$, pre $z := \frac{x}{t} \in A$ má (32) tvar

$$f_{A'}(x') \overset{(32)}{\leq} f_A(x) + t\left[-f_A\left(\frac{x}{t}\right) - p\left(-\frac{x}{t} - u\right)\right] = f_A(x) - f_A(x) + p(x+tu) = p(x').$$

Ukázali sme teda existenciu predĺženia každého lineárneho funkcionálu pôsobiaceho na ľubovoľnom lineárnom podpriestore v X a spĺňajúceho nerovnosť v zadaní vety. Uvažujme teraz množinu M všetkých možných predĺžení $\tilde{f}$ lineárneho funkcionálu f_A, ktoré zachovávajú nerovnosť $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ na svojich definičných

Dôkaz Vety 6 (pokračovanie).

oboroch. Množina M je zrejme vzhľadom na reláciu predĺženia čiastočne usporiadaná. Ak $N \subseteq M$ je nejaká lineárne usporiadaná podmnožina, potom lineárny funkcionál $\bar{f}$, ktorý je definovaný na zjednotení definičných oborov všetkých prvkov z N, a ktorý na definičnom obore každého funkcionálu z N nadobúda jeho hodnoty, je zrejme horné ohraničenie množiny N. Podľa Kuratowskeho–Zornovej lemy 1 má teda množina M aspoň jeden maximálny prvok. Tento maximálny prvok je práve náš hľadaný lineárny funkcionál f. Z jeho maximality a z prvej časti dôkazu totiž vyplýva, že je nutne definovaný na celom priestore X. A keďže $f \in M$, je zároveň predĺžením lineárneho funkcionálu f_A, ktoré spĺňa nerovnosť $f(x) \leq p(x)$ pre každé $x \in X$. Dôkaze je teraz úplný. ∎

Poznámka 6 (Hahnova–Banachova veta v komplexnom lineárnom priestore)

V prípade komplexného lineárneho priestoru X sa pod pojmom konvexný funkcionál rozumie nezáporné zobrazenie $p : X \to \mathbb{R}$ spĺňajúce

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \quad \text{pre každé } x, y \in X \text{ a } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{33}$$

Formulácia príslušnej Hahnovej–Banachovej vety pre komplexný priestor X je identická s Vetou 6 s tým, že dané nerovnosti majú tvar $|f_A(x)| \leq p(x)$, resp. $|f(x)| \leq p(x)$ (keďže lineárne funkcionály na X majú komplexné hodnoty).

Obsah

Lineárne funkcionály v normovanom priestore

Definícia 8 (Ohraničenosť funkcionálu)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{R}$ funkcionál. Hovoríme, že funkcionál f je ohraničený na priestore X, ak obraz $f(A)$ každej množiny $A \subseteq X$ ohraničenej v norme $\|\cdot\|$ je množina ohraničená v priestore $\mathbb{E}$.

Definícia 9 (Spojitosť funkcionálu)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{R}$ funkcionál. Hovoríme, že funkcionál f je spojitý v bode $x_0 \in X$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že ak pre $x \in X$ platí $\|x - x_0\| < \delta$, potom $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funkcionál f sa potom označuje ako spojitý na normovanom priestore X, ak je spojitý v každom bode priestoru X.

Veta 7

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{R}$ lineárny funkcionál. Potom funkcionál f je spojitý na priestore X práve vtedy, keď je spojitý aspoň v jednom bode $x \in X$.

Dôkaz Vety 7.

Stačí zrejme dokázať platnosť implikácie "$\Leftarrow$", nakoľko implikácia "$\Rightarrow$" vyplýva priamo z Definície 9. Nech je teda lineárny funkcionál f spojitý v nejakom vektore $x \in X$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Podľa Definície 9 potom existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$\text{ak pre } \tilde{x} \in X \text{ platí } \|\tilde{x} - x\| < \delta, \text{ potom } |f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon. \tag{34}$$

Nech $y \in X$ je ľubovoľný vektor a uvažujme $\tilde{y} \in X$ také, že $\|\tilde{y} - y\| < \delta$. Keďže $\|(\tilde{y} - y + x) - x\| = \|\tilde{y} - y\| < \delta$, v súlade s linearitou f a reláciou v (34) platí

$$|f(\tilde{y}) - f(y)| = |[f(\tilde{y}) - f(y) + f(x)] - f(x)| = |f(\tilde{y} - y + x) - f(x)| \overset{(34)}{<} \varepsilon.$$

Lineárny funkcionál f je teda v zhode s Definíciou 9 spojitý v bode y, a tak i na celom priestore X, čo kompletizuje dôkaz. ■

Veta 8

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{R}$ lineárny funkcionál. Potom funkcionál f je spojitý na priestore X práve vtedy, keď je ohraničený na nejakom okolí bodu 0.

Dôkaz Vety 8.

Ak je lineárny funkcionál f spojitý na priestore X, tak potom je spojitý i v bode

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

0. Obzvlášť, voľbou $\varepsilon := 1$ v Definícii 9 máme zaručenú existuje $\delta > 0$ tak, že platí $|f(x)| = |f(x) - f(0)| < 1$ pre každý vektor $x \in X$ spĺňajúci $\|x\| < \delta$. To znamená, že funkcionál f je ohraničený na otvorenej guli $B(0, \delta)$. Naopak, predpokladajme, že funkcionál f je ohraničený na nejakom okolí nulového vektora, t.j., existujú kladné reálne čísla c, r s vlastnosťou

$$|f(x)| \leq c \quad \text{pre každý vektor } x \in B(0, r). \tag{35}$$

Zvoľme ľubovoľne $\varepsilon > 0$ a položme $\delta := \frac{\varepsilon r}{c}$. Potom pre každý prvok $x \in X$ taký, že $\|x\| < \delta$, platí $\|\frac{c}{\varepsilon} x\| = \frac{c}{\varepsilon} \|x\| < r$, a tak vektor $\frac{c}{\varepsilon} x \in B(0, r)$. Následne

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \left|\frac{\varepsilon}{c} f\left(\frac{c}{\varepsilon} x\right)\right| = \frac{\varepsilon}{c} \left|f\left(\frac{c}{\varepsilon} x\right)\right| \overset{(35)}{<} \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon,$$

a tak funkcionál f je spojitý v bode 0. Napokon, podľa Vety 7 je f spojitý i na celom priestore X. ■

Poznámka 7

Posledné dve vety poukazujú na významnú vlastnosť lineárnych funkcionálov pôsobiacich na normovaných lineárnych priestoroch. Konkrétne, spojitosť daného lineárneho funkcionálu na priestore X je ekvivalentná s jeho ohraničenosťou na X, resp. na nejakom okolí aspoň jedného bodu $x \in X$ (typicky bodu 0).

Norma lineárneho funkcionálu

Definícia 10 (Norma lineárneho funkcionálu)

Nech X je normovaný priestor a $f : X \to \mathbb{R}$ spojitý lineárny funkcionál. Číslo

$$\|f\| := \sup\{|f(x)|,\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\} \tag{36}$$

sa nazýva norma lineárneho funkcionálu f.

Poznámka 8

Spojitosť a linearita zobrazenia f podľa Poznámky 7 zaručujú, že funkcionál f je ohraničený na priestore X. V kontexte Definície 8 je preto zavedenie normy $\|f\|$ v (36) korektné pre každý spojitý lineárny funkcionál pôsobiaci na X. Ďalej, nie je ťažké ukázať, že normu $\|f\|$ v (36) možno ekvivalentne vyjadriť v tvaroch

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|,\ x \in X,\ \|x\| = 1\}, \quad \|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|},\ x \in X \setminus \{0\}\right\}. \tag{37}$$

Obzvlášť, z druhej formuly v (37) vyplýva nerovnosť

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{38}$$

Príklad 6

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ uvažujme X ako euklidovský priestor $\mathbb{E}^n$ so štandardným skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Z Príkladu 1 vyplýva, že pre pevne zvolený nenulový vektor $a \in X$ je zobrazenie $f : X \to \mathbb{R}$ definované predpisom

$$f(x) := \langle a, x \rangle, \quad x \in X, \tag{39}$$

je lineárny funkcionál na X. Nakoľko podľa Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti pre skalárny súčin platí

$$|f(x)| \overset{(39)}{=} |\langle a, x \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\| \quad \text{pre každé } x \in X, \tag{40}$$

funkcionál f je v súlade s Definíciou 8 a Poznámkou 7 ohraničený, a teda i spojitý na celom priestore X. Dokážeme, že jeho norma $\|f\| = \|a\|$. Skutočne, využijúc (37) a (40) získame nerovnosť

$$\|f\| \overset{(37)}{=} \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|},\ x \in X \setminus \{0\} \right\} \overset{(40)}{\leq} \|a\|.$$

Na druhej strane, platí $|f(a)| = |\langle a, a \rangle| = \|a\|^2$, a teda $\frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|$. Podľa druhej identity v (37) to znamená, že $\|f\| \geq \|a\|$. Preto $\|f\| = \|a\|$.

Príklad 7

Pre dané $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$, nech $\mathcal{B}_I[a,b]$ označuje množinu všetkých reálnych funkcií, ktoré sú definované, ohraničené a (riemannovsky) integrovateľné na intervale $[a,b]$. Z predchádzajúcich prednášok vieme, že $\mathcal{B}_I[a,b]$ je (reálny) lineárny priestor, na ktorom je možné zaviesť normu

$$\|u\|_B := \sup_{x\in[a,b]} |u(x)|, \quad u \in \mathcal{B}_I[a,b]. \tag{41}$$

Uvažujme lineárny funkcionál $f : \mathcal{B}_I[a,b] \to \mathbb{R}$ tvaru

$$f(u) := \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x, \quad u \in \mathcal{B}_I[a,b]. \tag{42}$$

Funkcionál f v (42) je ohraničený na istom okolí funkcie identicky nulovej na $[a,b]$, keďže pre každé $u \in \mathcal{B}_I[a,b]$ spĺňajúce $\|u\|_B \leq 1$ platí

$$|f(u)| \overset{(42)}{=} \left|\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |u(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(41)}{\leq} \underbrace{\|u\|_B}_{\leq 1} \int_a^b \mathrm{d}x \leq b-a. \tag{43}$$

Zobrazenie f je teda podľa Vety 8 spojité na priestore $\mathcal{B}_I[a,b]$. Obzvlášť, v súlade s (36) vyplýva z nerovnosti (43) pre normu $\|f\|$ odhad $\|f\| \leq b-a$. Na druhej strane, pre spojitú funkciu $u(x) \equiv 1$ na $[a,b]$ podľa (41) a (42) platí $\|u\|_B = 1$ a $|f(u)| = b-a$, takže norma funkcionálu f spĺňa $\|f\| = b-a$.

Príklad 8

Dá sa ukázať, že lineárny funkcionál f v (3) z Príkladu 3 je spojitý na normovanom lineárnom priestore $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_C)$, pričom pre jeho normu platí

$$\|f\| = \int_a^b |y(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{44}$$

Poznámka 9 (Geometrický význam normy spojitého lineárneho funkcionálu)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{R}$ netriviálny spojitý lineárny funkcionál. V Dôsledku 1 sme ukázali, že potom množina

$$E_f = \{x \in X,\ f(x) = 1\} \tag{45}$$

je nadrovina v lineárnom priestore X rovnobežná s podpriestorom $\operatorname{Ker} f$. Nech d označuje vzdialenosť bodu 0 od množiny E_f, t.j.,

$$d := \rho(E_f, 0) = \inf\{\|x\|,\ x \in X,\ f(x) = 1\}. \tag{46}$$

Nie je ťažké ukázať, že množina E_f v (45) je uzavretá v normovanom priestore X, a keďže zrejme $0 \notin E_f$, vzdialenosť $d > 0$. Dokážeme rovnosť

$$d = \frac{1}{\|f\|}, \tag{47}$$

Poznámka 9 (Geometrický význam normy spojitého lineárneho funkcionálu)

kde $\|f\|$ je norma funkcionálu f definovaná v (41). Skutočne, vzhľadom na charakter E_f v (45) podľa nerovnosti (38) platí $1 = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$, a tak $\|x\| \geq \frac{1}{\|f\|}$ pre každý vektor $x \in E_f$, takže $d \geq \frac{1}{\|f\|}$ v súlade s (46). Na druhej strane, z druhej identity v (37) v Poznámke 8 vyplýva, že pre každé kladné číslo $\varepsilon < \|f\|$ existuje nenulový vektor $x \in X$ s vlastnosťou

$$0 < \|f\| - \varepsilon < \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{48}$$

Položme $\tilde{x} := \frac{x}{f(x)}$. Keďže $f(\tilde{x}) = 1$ a $\|\tilde{x}\| = \frac{\|x\|}{|f(x)|}$, využijúc (45) a (48) máme

$$\tilde{x} \overset{(45)}{\in} E_f, \qquad \|\tilde{x}\| = \frac{\|x\|}{|f(x)|} \overset{(48)}{<} \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}, \tag{49}$$

takže v zhode s (46) platí $d < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}$. Napokon, limitovaním tejto nerovnosti pre $\varepsilon \to 0^+$ dostávame $d \leq \frac{1}{\|f\|}$, čo završuje dôkaz formuly (47). Vidíme teda, že normu každého netriviálneho spojitého lineárneho funkcionálu f pôsobiaceho na normovanom priestore X možno geometricky interpretovať ako prevrátenú hodnotu vzdialenosti nadroviny E_f v (45) od nulového vektora v X.

Príklad 9

Aplikujúc výsledok (47) odvodený v Poznámke 9 na Príklad 6 dostávame, že vzdialenosť množiny všetkých riešení lineárnej rovnice

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 1, \quad (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

od nulového vektora je rovná $\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$. Podobne, v kontexte Príkladu 7 platí, že vzdialenosť množiny všetkých funkcií $u \in \mathcal{B}_I[a,b]$ spĺňajúcich $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = 1$ od funkcie identicky nulovej na intervale $[a,b]$ je rovná číslu $\frac{1}{b-a}$.

Veta 9 (Hahnova–Banachova pre normované lineárne priestory)

Nech X je normovaný lineárny priestor, $A \subseteq X$ jeho (uzavretý) podpriestor a $f_A : A \to \mathbb{R}$ je spojitý lineárny funkcionál pôsobiaci na priestore A. Potom existuje spojité predĺženie $f : X \to \mathbb{R}$ funkcionálu f_A na celý priestor X, ktoré zachováva normu funkcionálu f_A, t.j., platí rovnosť $\|f\|_X = \|f_A\|_A$.

Dôkaz Vety 9.

Označme $c := \|f_A\|_A$ a definujme funkcionál $p : X \to \mathbb{R}$ predpisom

$$p(x) := c\,\|x\|, \quad x \in X. \tag{50}$$

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

Z Príkladu 4 vieme, že zobrazenie p v (50) je konvexný funkcionál pôsobiaci na priestore X, pričom podľa (38) platí pre každý vektor $x \in A$ nerovnosť

$$f_A(x) \leq |f_A(x)| \overset{(38)}{\leq} \|f_A\|_A \cdot \|x\| = c\,\|x\| \overset{(50)}{=} p(x). \tag{51}$$

Následne, na základe Hahnovej–Banachovej vety 6 máme zaručenú existenciu predĺženia funkcionálu f_A na celý priestor X, ktoré zachováva nerovnosť (51). Presnejšie, existuje lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ s vlastnosťami

$$f(x) = f_A(x) \text{ pre každé } x \in A \text{ a } f(x) \leq p(x) = c\,\|x\| \text{ na } X. \tag{52}$$

Dokážeme, že každý takýto funkcionál f je spojitý na priestore X. Z (52) pre každé $x \in X$ máme $-f(x) = f(-x) \leq c\,\|-x\| = c\,\|x\|$, a tak

$$|f(x)| \leq c\,\|x\| \text{ pre každý prvok } x \in X. \tag{53}$$

V súlade s (53) a Definíciou 8 je teda funkcionál f ohraničený na okolí bodu 0 a podľa Vety 8 následne i spojitý na X. Obzvlášť, z druhej rovnosti v (37) a relácie (53) vyplýva, že $\|f\|_X \leq c$. Na druhej strane, keďže $c = \|f_A\|_A$, $A \subseteq X$ a $f = f_A$ na podpriestore A, máme

$$c \overset{(36)}{=} \sup\{|f(x)|,\ x \in A,\ \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{|f(x)|,\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\} \overset{(36)}{=} \|f\|_X,$$

a tak $\|f\|_X = \|f_A\|_A$. Dôkaz je kompletný. ■

Dôsledok 3

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $x_0 \in X$ nenulový vektor. Potom existuje spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ spĺňajúci

$$f(x_0) = \|x_0\| \quad \text{a} \quad \|f\| = 1. \tag{54}$$

Dôkaz Dôsledku 3.

Označme $A := \operatorname{Lin}\{x_0\} = \{\lambda\, x_0,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, t.j., lineárny podpriestor v X generovaný vektorom x_0, a definujme zobrazenie $f_A : A \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$f_A(x) := \lambda\, \|x_0\| \quad \text{pre } x = \lambda\, x_0 \in A. \tag{55}$$

Podpriestor $A \subseteq X$ je zrejme nenulový a uzavretý v normovanom priestore X a zobrazenie f_A v (55) je lineárny funkcionál ohraničený v priestore A, nakoľko

$$|f_A(x)| \overset{(55)}{=} |\lambda|\, \|x_0\| = \|\lambda\, x_0\| = \|x\| \quad \text{pre každé } x = \lambda\, x_0 \in A. \tag{56}$$

Podľa Vety 8 je preto lineárny funkcionál f_A spojitý na priestore A. Naviac, pre jeho normu $\|f_A\|_A$ vzhľadom na A platí

$$\|f_A\|_A \overset{(37)}{=} \sup\{|f_A(x)|,\ x \in A,\ \|x\| = 1\} \overset{(56)}{=} \sup\{\|x\|,\ x \in A,\ \|x\| = 1\} = 1. \tag{57}$$

Podľa Hahnovej–Banachovej vety 9 následne existuje spojitý lineárny funkcionál f pôsobiaci na celom priestore X a spĺňajúci rovnosti v (54). ■

Poznámka 10

Z Dôsledku 3 vyplývajú dva významné výsledky. Prvý z nich je záruka existencie aspoň jedného netriviálneho spojitého lineárneho funkcionálu $f : X \to \mathbb{R}$ pre každý nenulový normovaný lineárny priestor X. Druhý výsledok je skutočnosť, že množina všetkých netriviálnych spojitých lineárnych funkcionálov pôsobiacich na danom nenulovom normovanom priestore X je "dostatočne bohatá". Presnejšie, pre ľubovoľné dva rôzne prvky $x, y \in X$ vždy existuje spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$, ktorý oddeľuje tieto dva prvky, t.j., platí $f(x) \neq f(y)$ (v Dôsledku 3 stačí položiť $x_0 := x - y$).

Dôsledok 4

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$, $A \subsetneq X$ je (uzavretý) podpriestor a $x_0 \in X \setminus A$ daný vektor. Označme $d := \rho(\bar{A}, x_0) > 0$. Potom existuje spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ spĺňajúci

$$f(x) = 0 \text{ pre každé } x \in A, \quad f(x_0) = d \quad \text{a} \quad \|f\| = 1. \tag{58}$$

Dôkaz Dôsledku 4.

Postupujeme podobne ako v dôkaze Dôsledku 3. Uvažujme lineárny priestor

Dôkaz Dôsledku 4 (pokračovanie).

$$\tilde{A} := \mathrm{Lin}\,\{A, x_0\} = \{y + \lambda\, x_0,\ \ y \in A,\ \ \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{59}$$

Je zrejmé, že priestor $\tilde{A}$ je (uzavretý) podpriestor v normovanom priestore X. Vďaka predpokladu $x_0 \notin A$ je reprezentácia prvkov množiny $\tilde{A}$ v (59) jednoznačná, t.j., pre každý vektor $x \in \tilde{A}$ existuje jediný vektor $y \in A$ a jediný skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že $x = y + \lambda\, x_0$. Z definície vzdialenosti $d = \rho(A, x_0)$ dostávame

$$0 < d \leq \|x_0 - y\| \quad \text{pre každé } y \in A. \tag{60}$$

Na podpriestore $\tilde{A}$ teraz uvažujme funkcionál $f_{\tilde{A}}$ s predpisom

$$f_{\tilde{A}}(x) := \lambda\, d, \quad x \overset{(59)}{=} y + \lambda\, x_0 \in \tilde{A}. \tag{61}$$

Nie je ťažké overiť, že $f_{\tilde{A}}$ v (61) je lineárny funkcionál na $\tilde{A}$ spĺňajúci $f_{\tilde{A}}(x) = 0$ pre každé $x \in A$ a $f_{\tilde{A}}(x_0) = d$. Ďalej pre každý vektor $x \in \tilde{A} \setminus A$ platí

$$|f_{\tilde{A}}(x)| \overset{(61)}{=} |\lambda|\, d = \frac{|\lambda|\, d}{\|x\|}\, \|x\| \overset{(59)}{=} \frac{|\lambda|\, d}{\|y + \lambda\, x_0\|}\, \|x\| = \frac{|\lambda|\, d}{|\lambda| \cdot \left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|}\, \|x\|$$

$$= \frac{d}{\left\|x_0 - (-\frac{y}{\lambda})\right\|}\, \|x\| \overset{(60)}{\leq} \frac{d}{d}\, \|x\| = \|x\|, \tag{62}$$

pričom predposlednom kroku sme využili fakt, že vektor $-\frac{y}{\lambda} \in A$. Z nerovnosti

Dôkaz Dôsledku 4 (pokračovanie).

(62) následne podľa Definície 8 vyplýva, že lineárny funkcionál $f_{\tilde{A}}$ je ohraničený na priestore $\tilde{A}$, a teda v súlade s Definíciou 9 i spojitý na $\tilde{A}$. Naviac, pre jeho normu $\|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}}$ vzhľadom na $\tilde{A}$ pomocou odhadu (62) a faktu $f_{\tilde{A}}(A) = 0$ platí

$$\|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}} \overset{(37)}{=} \sup\left\{\frac{|f_{\tilde{A}}(x)|}{\|x\|},\ x \in \tilde{A} \setminus \{0\}\right\} \overset{(62)}{\leq} 1. \tag{63}$$

Na druhej strane, iste existuje postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ s vlastnosťou

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0 - y_k\| = \lim_{k\to\infty} \rho(x_0, y_k) = d. \tag{64}$$

Nakoľko $x_0 - y_k \in \tilde{A}$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, z vlastností zobrazenia $f_{\tilde{A}}$ máme

$$\lim_{k\to\infty} f_{\tilde{A}}(x_0 - y_k) = \lim_{k\to\infty} [f_{\tilde{A}}(x_0) - \underbrace{f_{\tilde{A}}(y_k)}_{0}] = \lim_{k\to\infty} \underbrace{f_{\tilde{A}}(x_0)}_{d} = d, \tag{65}$$

$$|f_{\tilde{A}}(x_0 - y_k)| \overset{(38)}{\leq} \|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}} \cdot \|x_0 - y_k\|, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{66}$$

Limitovaním nerovnosti (66) pre $k \to \infty$ a využitím relácií (64) a (65) získame $d \leq \|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}}\, d$, a tak $1 \leq \|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}}$. Preto norma $\|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}} = 1$. Napokon, Hahnova–Banachova veta 9 nám zaručuje existenciu spojitého predĺženia $f : X \to \mathbb{R}$ funkcionálu $f_{\tilde{A}}$, ktoré spĺňa $\|f\|_X = \|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}} = 1$. Dôkaz je kompletný. ■

Obsah

Pojem duálneho priestoru a jeho vlastnosti

Poznámka 11

Nech X je (reálny) normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Je zrejmé, že pre ľubovoľné dva (spojité) lineárne funkcionály $f, g : X \to \mathbb{R}$ a pre každý skalár $\lambda \in \mathbb{R}$ sú zobrazenia $u, v : X \to \mathbb{R}$ definované

$$u(x) := f(x) + g(x), \qquad v(x) := \lambda\, f(x), \quad x \in X,$$

(spojité) lineárne funkcionály na X. Množina všetkých (spojitých) lineárnych funkcionálov pôsobiacich na priestore X teda vytvára vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

Definícia 11 (Duálny priestor normovaného lineárneho priestoru)

Nech X je (reálny) normovaný lineárny priestor. Vektorový priestor všetkých spojitých lineárnych funkcionálov $f : X \to \mathbb{R}$ sa nazýva duálny priestor priestoru X (tiež priestor adjungovaný k priestoru X) a označuje sa symbolom X'.

Poznámka 12

Ľahko sa presvedčíme, že duálny priestor X' je normovaným lineárnym priestorom vzhľadom na normu funkcionálu zavedenú v Definícii 10 predpisom (36).

Veta 10 (Úplnosť duálneho priestoru)

Nech X je normovaný lineárny priestor a X' je jeho duálny priestor. Potom X' je Banachov priestor, t.j., úplný normovaný priestor vzhľadom na normu v (36).

Dôkaz Vety 10.

Nech X a X' sú ako v zadaní vety a nech $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ je cauchyovská postupnosť spojitých lineárnych funkcionálov na priestore X, t.j., pre každé $\varepsilon > 0$

$$\text{existuje } n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé dva indexy } n, m \geq n_\varepsilon \text{ platí } \|f_n - f_m\| < \varepsilon. \tag{67}$$

Obzvlášť, využitím nerovnosti (38) pre každé dva indexy $n, m \geq n_\varepsilon$ dostávame

$$|f_n(x) - f_m(x)| \overset{(38)}{\leq} \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| \overset{(67)}{<} \varepsilon \|x\| \quad \text{pre každé } x \in X. \tag{68}$$

Z relácie (68) ihneď vyplýva, že pre každý pevný vektor $x \in X$ je číselná postupnosť $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská, a teda vďaka úplnosti euklidovského priestoru $\mathbb{E}$ i konvergentná. Existuje preto funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ daný predpisom

$$f(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x), \quad x \in X. \tag{69}$$

Ukážeme, že $f \in X'$, t.j., že zobrazenie f je spojitý lineárny funkcionál na X. Linearitu zobrazenia f možno ľahko vidieť z jeho definície v (69) a z linearity funkcionálov f_k, $k \in \mathbb{N}$. Naviac, limitovaním nerovnosti (68) pre $n \to \infty$ máme

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

$$|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\| \quad \text{pre každý index } m \geq n_\varepsilon \text{ a každé } x \in X. \tag{70}$$

Podľa (70) a Definície 8 je preto pre každé pevne zvolené $\varepsilon > 0$ lineárny funkcionál $f - f_m$ pre $m \geq n_\varepsilon$ ohraničený na okoliach nulového vektora, a teda v súlade s Vetou 8 i spojitý na celom priestore X. Vďaka spojitosti každého z lineárnych funkcionálov f_k, $k \in \mathbb{N}$, na X je potom v súlade s Poznámkou 12 spojitý i lineárny funkcionál $f = (f - f_m) + f_m$, $m \geq n_\varepsilon$, na priestore X. Takže skutočne $f \in X'$ v zhode s Definíciou 11. Napokon dokážeme, že uvažovaná postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje podľa (69) k funkcionálu f nielen bodovo na X, ale i v norme duálneho priestoru X'. Zvoľme nejaké $\varepsilon > 0$. Kombináciou druhej formuly v (37) a nerovnosti (70) potom dostávame, že pre každé $m \geq n_\varepsilon$ je

$$\|f - f_m\| \overset{(37)}{=} \sup\left\{\frac{|f(x) - f_m(x)|}{\|x\|},\ x \in X \setminus \{0\}\right\} \overset{(70)}{\leq} \varepsilon. \tag{71}$$

To však znamená, že postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná v norme priestoru X' s limitou $f \in X'$. Duálny priestor X' je teda úplný a dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 13

Poznamenajme, že výsledok Vety 10 platí pre každý normovaný lineárny priestor X bez ohľadu na to, či je alebo nie je Banachov priestor. Špeciálne, ak priestor

Poznámka 13

X nie je úplný a $\bar{X}$ označuje jeho úplný obal, potom sa dá dokázať, že odpovedajúce duálne priestory X' a $\bar{X}'$ sú izometricky izomorfné. Hlavná myšlienka je založená na skutočnosti, že pre každý funkcionál $f \in X'$ existuje jediné spojité predĺženie $\bar{f} \in \bar{X}'$ spĺňajúce $\|\bar{f}\|_{\bar{X}} = \|f\|_X$. Naopak, zúžením každého funkcionálu $\bar{f} \in \bar{X}$ na priestor X zrejme dostaneme spojitý lineárny funkcionál f pôsobiaci na X. Priradenie $f \mapsto \bar{f}$ preto sprostredkováva izometriu duálnych priestorov X' a $\bar{X}'$.

Veta 11

Nech X je normovaný lineárny priestor a X' je jeho duálny priestor. Ak X' je separabilný priestor, potom i pôvodný priestor X je separabilný.

Dôkaz Vety 11.

Nech $\|\cdot\|$ je norma na priestore X a predpokladajme, že duálny priestor X' je separabilný. Z teórie metrických priestorov vyplýva, že potom každá podmnožina v X' je ako metrický podpriestor tiež separabilná. Teda i jednotková sféra

$$S'(0,1) := \{f \in X', \ \|f\| = 1\} \tag{72}$$

Dôkaz Vety 11 (pokračovanie).

v priestore X' je separabilná. Nech $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S'(0,1)$ je postupnosť hustá v množine $S'(0,1)$, t.j., pre každý funkcionál $f \in S'(0,1)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje index $k \in \mathbb{N}$ tak, že platí nerovnosť

$$\|f - f_k\| \leq \varepsilon. \tag{73}$$

Nakoľko každý z funkcionálov f_k, $k \in \mathbb{N}$, má jednotkovú normu, v súlade s prvou rovnosťou v (37) máme

$$\sup\{|f_k(x)|,\ x \in X,\ \|x\| = 1\} = 1 \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{74}$$

Z rovnosti (74) a z vlastností supréma následne vyplýva, že pre každý index $k \in \mathbb{N}$ existuje vektor $x_k \in X$ taký, že

$$\|x_k\| = 1, \quad |f_k(x_k)| > \frac{1}{2}. \tag{75}$$

Uvažujme teraz racionálny lineárny obal postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ zostrojenej v (75) vzhľadom na priestor X, t.j.,

$$A := \mathrm{Lin}_{\mathbb{Q}}\{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}. \tag{76}$$

Množina A v (76) teda predstavuje súbor všetkých konečných lineárnych kombinácií vektorov x_k, $k \in \mathbb{N}$, s racionálnymi koeficientami. Nie je ťažké si premyslieť, že A je spočítateľná množina. Ukážeme, že množina $A \subseteq X$ je hustá v priestore X, t.j., platí $X = \overline{A}$. Predpokladajme sporom, že $\overline{A} \subsetneq X$. Množina

Dôkaz Vety 11 (pokračovanie).

$X \setminus \overline{A}$ je teda neprázdna. Zvoľme preto nejaký vektor $y \in X \setminus \overline{A}$. Podľa Dôsledku 4 Hahnovej–Banachovej vety 9 (pre $A := \overline{A}$ a $x_0 := y$) potom existuje spojitý lineárny funkcionál f pôsobiaci X spĺňajúci vlastnosti v (58), t.j.,

$$f(x) = 0 \text{ pre každé } x \in \overline{A}, \quad f(y) = \rho(\overline{A}, y) > 0, \quad \|f\| = 1. \tag{77}$$

Obzvlášť, v súlade s (72) a (76) funkcionál $f \in S'(0,1)$ a $f(x_k) = 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Využijúc relácie v (38) a (75), pre každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &\overset{(75)}{<} |f_k(x_k)| = \big|[f_k(x_k) - f(x_k)] + f(x_k)\big| \le |f_k(x_k) - f(x_k)| + \underbrace{|f(x_k)|}_{0} \\ &= |f_k(x_k) - f(x_k)| \overset{(38)}{\le} \|f_k - f\| \cdot \|x_k\| \overset{(75)}{=} \|f_k - f\|.\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je však v rozpore s odhadom (73) pre hodnotu $\varepsilon = \frac{1}{2}$. To znamená, že spočítateľná množina A v (76) je hustá v X, čo následne implikuje separabilitu priestoru X. Dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 14

Je nutné zdôrazniť, že opačné tvrdenie k Vete 11 vo všeobecnosti neplatí, t.j., duálny priestor X' separabilného priestoru X nemusí byť nutne separabilný.

Duálny priestor Hilbertovho priestoru

Veta 12 (Fréchetova–Rieszova reprezentačná)

Nech H je Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a indukovanou normou $\|\cdot\|$ a nech H' je jeho duálny priestor. Potom pre každý spojitý lineárny funkcionál $f \in H'$ existuje jediný vektor $x_f \in H$ s vlastnosťou

$$f(x) = \langle x, x_f\rangle \quad \text{pre každé } x \in H, \qquad \|f\| = \|x_f\|. \tag{78}$$

Dôkaz Vety 12.

Zvoľme ľubovoľný netriviálny funkcionál $f \in H'$. Kombinácia Poznámok 1 a 2 spolu so spojitosť zobrazenia f zaručujú, že jadro $\operatorname{Ker} f$ je uzavretý podpriestor v H s kodimenziou 1. Z vlastností Hilbertovho priestoru H následne vyplýva, že $H = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp$, pričom $\dim(\operatorname{Ker} f)^\perp = 1$. Preto bez ujmy na všeobecnosti v súlade s (7) existuje nenulový vektor $x_0 \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ s $f(x_0) = 1$ taký, že každý prvok $x \in H$ možno jednoznačne reprezentovať v tvare

$$x = f(x)\, x_0 + y, \quad y \in \operatorname{Ker} f. \tag{79}$$

Pre daný funkcionál f definujme vektor $x_f \in H$ predpisom

$$x_f := \frac{x_0}{\|x_0\|^2}. \tag{80}$$

Dôkaz Vety 12 (pokračovanie).

Využitím vlastností skalárneho súčinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a linearity f pre každé $x \in H$ platí

$$\langle x,\, x_f\rangle \overset{(79),(80)}{=} \left\langle f(x)\, x_0 + y,\ \frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right\rangle = \frac{f(x)}{\|x_0\|^2}\,\langle x_0,\, x_0\rangle + \frac{1}{\|x_0\|^2}\,\underbrace{\langle y,\, x_0\rangle}_{0}$$

$$= \frac{f(x)}{\|x_0\|^2}\,\|x_0\|^2 = f(x), \tag{81}$$

čo ihneď dokazuje prvú rovnosť v (78). Obzvlášť, pomocou rovnosti (81) a Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti dostávame

$$|f(x)| = |\langle x,\, x_f\rangle| \le \|x\|\cdot\|x_f\| \quad \text{pre každý vektor } x \in H. \tag{82}$$

V zhode s druhou formulou v (37) ľahko vidíme, že podľa (82) pre normu $\|f\|$ platí $\|f\| \le \|x_f\|$. Na druhej strane,

$$|f(x_f)| = |\langle x_f,\, x_f\rangle| = \|x_f\|^2, \quad \text{takže} \quad \frac{|f(x_f)|}{\|x_f\|} = \|x_f\|,$$

a teda, opäť podľa (37), máme $\|x_f\| \le \|f\|$. Preto $\|f\| = \|x_f\|$, ukázajúc druhú identitu v (78). Zostáva overiť jednoznačnosť prvku x_f v (80) pre daný funkcionál f. Ak vektor $x'_f \in H$ spĺňa $f(x) = \langle x,\, x'_f\rangle$ pre každé $x \in H$, potom so zreteľom na (81) platí $\langle x,\, x'_f\rangle = \langle x,\, x_f\rangle$, a tak $\langle x,\, x'_f - x_f\rangle = 0$ na H. Obvzlášť, $\|x'_f - x_f\|^2 = \langle x'_f - x_f,\, x'_f - x_f\rangle = 0$, a tak $x'_f = x_f$. Napokon, do-

Dôkaz Vety 12 (pokračovanie).

-dajme, že v prípade triviálneho lineárneho funkcionálu $f = 0$ na H pre odpovedajúci vektor x_f v (78) platí $x_f = 0$. Dôkaz je teraz úplný. ∎

Poznámka 15

Z vlastností skalárneho súčinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ vyplýva, že pre každý daný vektor $y \in H$ je zobrazenie f_y dané predpisom

$$f_y(x) := \langle x,\, y\rangle, \quad x \in H,$$

spojitý lineárny funkcionál pôsobiaci na Hilbertovom priestore H, t.j., $f_y \in H'$. S ohľadom na Fréchetovu–Rieszovu reprezentačnú vetu 12 je potom priradenie

$$H \ni y \mapsto f_y := \langle\cdot,\, y\rangle \in H', \tag{83}$$

bijektívne zobrazenie medzi priestormi H a H' zachovávajúce normu, t.j., izometria priestorov H a H'. Nie je ťažké overiť, že zobrazenie v (83) je lineárne. Naviac, zobrazenie $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H'} : H' \times H' \to \mathbb{R}$ definované predpisom

$$\langle f,\, g\rangle := \langle x_f,\, x_g\rangle, \quad f, g \in H', \tag{84}$$

kde vektory $x_f, x_g \in H$ sú jednoznačne určené podľa (78), predstavuje skalárny súčin na priestore H', ktorý indukuje normu funkcionálu v (36). Priradenie v (83) je preto dokonca izometrický izomorfizmus unitárnych priestory H a H'.

Príklad 10

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ uvažujme normovaný lineárny priestor $X := \mathbb{R}^n$ s nejakou normou $\|\cdot\|$ a nech $B := \{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq X$ je ľubovoľná (algebraická) báza priestoru X, t.j., každý vektor $x \in X$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$x = x_1\, e_1 + \cdots + x_n\, e_n, \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}. \tag{85}$$

Ak $f : X \to \mathbb{R}$ je lineárny funkcionál na X, potom pomocou (85) máme

$$f(x) = x_1\, f(e_1) + \cdots + x_n\, f(e_n) \quad \text{pre každé } x = x_1\, e_1 + \cdots + x_n\, e_n \in \mathbb{R}^n. \tag{86}$$

Obzvlášť, z (86) vyplýva, že každý lineárny funkcionál f pôsobiaci na priestore X je spojitý, t.j., $f \in X'$. Pokúsime sa charakterizovať duálny priestor X'. Uvažujme množinu lineárnych funkcionálov $B' := \{g_1, \ldots, g_n\}$ na X spĺňajúcich

$$g_i(e_j) := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{87}$$

V súlade s (85) potom pre každé $x \in X$ platí

$$g_i(x) \overset{(85),(87)}{=} x_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{88}$$

čo následne, s ohľadom na (86), dáva pre každé $f \in X'$ reprezentáciu

$$f = f(e_1)\, g_1 + \cdots + f(e_n)\, g_n. \tag{89}$$

Príklad 10

Množina B' je zrejme lineárne nezávislá v priestore X' a zo zreteľom na (89) predstavuje (algebraickú) bázu duálneho priestoru X'; hovoríme o tzv. duálnej báze vzhľadom na bázu B. Reálne čísla

$$f_i := f(e_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \tag{90}$$

sú v zhode s (89) súradnice daného funkcionálu $f \in X'$ vzhľadom na bázu B'. Duálny priestor X' je teda n-rozmerný normovaný priestor s normou $\|\cdot\|_*$, ktorá je indukovaná predpísanou normou $\|\cdot\|$ na X podľa (36). Je potrebné zdôrazniť, že rôzne normy $\|\cdot\|$ na X indukujú rôzne normy $\|\cdot\|_*$ na X'. Napríklad pre každé zvolené $p \in (1, \infty)$ platí, že

$$\text{norma } \|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{indukuje normu } \|f\|_* := \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{1/q}, \tag{91}$$

kde $q \in (1, \infty)$ je číslo konjugované s p, t.j., spĺňajúce $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Podobne

$$\text{norma } \|x\| := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{indukuje normu } \|f\|_* := \max_{1 \le i \le n} |f_i|, \tag{92}$$

$$\text{norma } \|x\| := \max_{1 \le i \le n} |x_i| \quad \text{indukuje normu } \|f\|_* := \sum_{i=1}^{n} |f_i|. \tag{93}$$

Príklad 11

V tomto príklade ilustrujeme poznatky prezentované v Príklade 10 pre hodnotu $p = 3$. Konkrétne, ukážeme, že na lineárnom priestore $\mathbb{R}^n$ norma $\|\cdot\|$ tvaru

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^3\right)^{1/3}, \quad x \overset{(85)}{=} x_1\, e_1 + \cdots + x_n\, e_n, \tag{94}$$

indukuje podľa (91) s $q = \frac{3}{2}$ na jeho duálnom priestore normu $\|\cdot\|_*$ tvaru

$$\|f\|_* := \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{2/3}, \quad f \overset{(89),(90)}{=} f_1\, g_1 + \cdots + f_n\, g_n. \tag{95}$$

Skutočne, využitím Hölderovej nerovnosti pre každý daný netriviálny lineárny funkcionál f na $\mathbb{R}^n$ reprezentovaný v súlade s (89) a (90) n-ticou $(f_1, \ldots, f_n)$ a každý vektor $x \in \mathbb{R}^n$ reprezentovaný v zhode s (85) n-ticou $(x_1, \ldots, x_n)$ platí

$$|f(x)| \overset{(86),(90)}{=} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\, f_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i\, f_i| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^3\right)^{1/3} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{2/3}$$

$$\overset{(94)}{=} \|x\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{2/3}, \quad \text{a tak } \|f\|_* \overset{(37)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{2/3}. \tag{96}$$

Príklad 11

Na druhej strane, špeciálnou voľbou $\tilde{x}_i := \sqrt{|f_i|}\,\mathrm{sgn}\, f_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ máme

$$|f(\tilde{x})| \overset{(86),(90)}{=} \left|\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i\, f_i\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{1/3} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{2/3}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\sqrt{|f_i|}\,\mathrm{sgn}\, f_i\right|^{3}\right)^{1/3} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{2/3}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i|^{3}\right)^{1/3} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{2/3} \overset{(94)}{=} \|\tilde{x}\| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{2/3},$$

čo v súlade s druhou formulou v (37) znamená, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{3/2}\right)^{2/3} \leq \|f\|_*. \tag{97}$$

Kombináciou nerovností v (96) a (97) potom dostávame identitu v (95). Obzvlášť, duálny priestor normovaného priestoru $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ je izometricky izomorfný s normovaným priestorom $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$.

Príklad 12

Poznamenajme, že v prípade euklidovskej normy $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$, t.j., pre $p = 2$ v (91), je duálny priestor k euklidovskému priestoru $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ izometricky izomorfný s $\mathbb{E}^n$, pretože v tomto prípade máme $q = 2$ a norma $\|\cdot\|_*$ v (91) je tiež euklidovská. Tento výsledok je v plnom súhlase s Fréchetovou–Rieszovou reprezentačnou vetou 12, nakoľko $\mathbb{E}^n$ je Hilbertov priestor.

Príklad 13 (Duálne priestory priestorov l^p)

Pre dané reálne číslo $p > 1$ je duálny priestor normovaného priestoru l^p izometricky izomorfný s normovaným priestorom l^q, kde $q > 1$ je číslo konjugované s p, t.j., platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ďalej, duálny priestor normovaného priestoru l^1 je lineárne izometrický s priestorom l^∞. Na druhej strane, duálny priestor vzhľadom na priestor l^∞ nie je izometricky izomorfný s l^1. Platí však že priestor l^1 je izometrický s vhodným vlastným podpriestorom duálneho priestoru $(l^\infty)'$. Skutočnosť, že priestor l^1 nemôže byť izometrický s celým $(l^\infty)'$, je jednoduchým dôsledkom Vety 11. Z teórie metrických priestorov vieme, že l^∞ nie je separabilný priestor. V súlade s Vetou 11 nemôže byť separabilný ani jeho duálny priestor $(l^\infty)'$. Priestor l^1 je však separabilný, a preto nemôže byť izometrický s $(l^\infty)'$.

Príklad 14

Duálne priestory normovaných lineárnych priestorov c a c_0 sú lineárne izometrické s priestorom l^1. Pripomeňme, že c, resp. c_0, označuje lineárny priestor všetkých konvergentných reálnych postupností, resp. všetkých reálnych postupností s nulovou limitou, na ktorom je zavedená suprémová norma

$$\|x\| := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c, \text{ resp. } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_0. \tag{98}$$

Príklad 15

Ako dôsledok poznatkov v Príklade 13 poznamenajme, že priestor l^2 je izometricky izomorfný so svojím duálnych priestorom $(l^2)'$. Tento výsledok vyplýva i z Fréchetovej–Rieszovej reprezentačnej vety 12, keďže l^2 je (separabilný) Hilbertov priestor, ako sme dokázali v prednáške o unitárnych priestoroch. Obzvlášť, každý spojitý lineárny funkcionál $f \in (l^2)'$ je možné v súlade s (78) vyjadriť v tvare

$$f(x) = \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2, \tag{99}$$

pre nejaký pevný prvok $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$, pričom platí rovnosť $\|f\| = \|y\|$.

Obsah

Pojem druhého duálneho priestoru

Definícia 12 (Druhý duálny priestor normovaného lineárneho priestoru)

Nech X je normovaný lineárny priestor a X' jeho duálny priestor. Vektorový priestor všetkých spojitých lineárnych funkcionálov pôsobiacich na X', t.j., duálny priestor $(X')'$, nazývame druhý duálny priestor priestoru X a označujeme X''.

Veta 13

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a X' je jeho duálny priestor. Potom pre každé zvolené $x \in X$ je zobrazenie $F_x : X' \to \mathbb{R}$ definované

$$F_x(f) := f(x), \quad f \in X', \tag{100}$$

spojitý lineárny funkcionál na priestore X', pričom platí $\|F_x\| = \|x\|$.

Dôkaz Vety 13.

Zvoľme nejaký nenulový vektor $x \in X$. Je zrejmé, že zobrazenie F_x definované v (100) je lineárny funkcionál pôsobiaci na duálnom priestore X', keďže

$$F_x(\alpha f + \beta g) \overset{(100)}{=} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \overset{(100)}{=} \alpha F_x(f) + \beta F_x(g) \tag{101}$$

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

pre každé $f, g \in X'$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Naviac, v súlade s nerovnosťou (38) máme

$$|F_x(f)| \overset{(100)}{=} |f(x)| \overset{(38)}{\leq} \|x\| \cdot \|f\| \quad \text{pre každé } f \in X', \tag{102}$$

čo podľa Definície 8 a Vety 8 znamená, že zobrazenie F_x v (100) je ohraničené na okolí nulového funkcionálu, a teda spojité na celom priestore X'. Preto F_x je spojitý lineárny funkcionál na X', t.j., $F_x \in X''$. Pre jeho normu dostávame

$$\|F_x\| \overset{(37)}{=} \sup \left\{ \frac{|F_x(f)|}{\|f\|},\ f \in X' \setminus \{0\} \right\} \overset{(102)}{\leq} \|x\|. \tag{103}$$

Na druhej strane, z Dôsledku 3 vieme, že pre daný nenulový vektor x existuje spojitý lineárny funkcionál $f_0 : X \to \mathbb{R}$ spĺňajúci $f_0(x) = \|x\|$ a $\|f_0\| = 1$, teda

$$|F_x(f_0)| \overset{(100)}{=} |f_0(x)| = \|x\| = \|x\| \cdot \underbrace{\|f_0\|}_{1}, \quad \text{a tak} \quad \frac{|F_x(f_0)|}{\|f_0\|} = \|x\|. \tag{104}$$

V zhode s druhou formulou v (37) to znamená, že norma $\|F_x\| \geq \|x\|$. Preto platí $\|F_x\| = \|x\|$. Napokon dodajme, že v prípade voľby $x = 0$ je odpovedajúce zobrazenie F_x v (100) zrejme identicky nulový funkcionál na X', a teda opäť $F_x \in X''$ s $\|F_x\| = 0 = \|x\|$. Dôkaz je teraz kompletný. ∎

Poznámka 16 (Kanonické vnorenie do druhého duálneho priestoru)

Výsledok Vety 13 ukazuje, že na každom danom normovanom lineárnom priestore X je korektne definované zobrazenie $\pi : X \to X''$ s predpisom

$$\pi(x) := F_x \quad \text{s } F_x \text{ zavedeným v (100) pre } x \in X. \tag{105}$$

Zobrazenie π v (105) sa štandardne označuje ako prirodzené zobrazenie priestoru X do jeho druhého duálneho priestoru X''. Zrejme sa jedná o lineárne zobrazenie, nakoľko využitím (100) pre každé $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $f \in X'$ máme

$$F_{\alpha\, x+\beta\, y}(f) = f(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, f(x) + \beta\, f(y) = \alpha\, F_x(f) + \beta\, F_y(f), \tag{106}$$

a tak v súlade s (105) platí $\pi(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, \pi(x) + \beta\, \pi(y)$. Naviac, podľa druhej časti Vety 13 je prirodzené zobrazenie π izometrické, t.j.,

$$\|\pi(x)\| \overset{(105)}{=} \|F_x\| = \|x\| \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{107}$$

Obzvlášť, π je spojitá injekcia. Z tohto dôvodu sa preto o prirodzenom zobrazení π často hovorí ako o kanonickom vnorení priestoru X do priestoru X''.

Definícia 13 (Reflexívny normovaný lineárny priestor)

Normovaný lineárny priestor X sa nazýva reflexívny, ak prirodzené zobrazenie $\pi : X \to X''$ zavedené v (105) je surjektívne, t.j., platí rovnosť $\pi(X) = X''$.

Poznámka 17

Z Definície 13 a Poznámky 16 ihneď vyplýva, že každý reflexívny normovaný lineárny priestor X je izometricky izomorfný s druhým duálnym priestorom X''. Príslušný izomorfizmus je sprostredkovaný prirodzeným zobrazením π v (105), keďže v tomto prípade sa jedná o lineárnu bijekciu medzi priestormi X a X'', ktorá zachováva normu. Následne, so zreteľom na Vetu 10, každý reflexívny priestor je nutne Banachov, t.j., úplný normovaný priestor. Je však potrebné zdôrazniť, že opačné tvrdenia neplatia. Konkrétne, z izometrického izomorfizmu priestorov X a X'' vo všeobecnosti nevyplýva reflexívnosť priestoru X. Slávnym a klasickým príkladom nereflexívneho normovaného priestoru X, ktorý je lineárne izometrický so svojim druhým duálnym priestorom X'', je tzv. Jamesov priestor. Nereflexívne Banachove priestory uvedieme v Príkladoch 19, 20 a 21.

Veta 14 (Kritérium reflexívnosti Banachových priestorov)

Nech X je (reálny) Banachov priestor, t.j., úplný normovaný lineárny priestor. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X je reflexívny.*

(ii) *Duálny priestor X' je reflexívny.*

Poznámka 18

Z Vety 10 vieme, že duálny priestor X' každého normovaného priestoru X je Banachov. Podľa Vety 14 je tak X' reflexívny práve vtedy, keď je reflexívny X''.

Príklad 16 (Reflexívnosť priestorov s konečnou dimenziou)

Každý normovaný lineárny priestor X s konečnou dimenziou $n \in \mathbb{N}$ je reflexívny. Vyplýva to z pozorovania v Príklade 10, podľa ktorého duálny priestor X' má opäť dimenziu n. Obzvlášť, druhý duálny priestor X'' je n-rozmerný normovaný priestor. Na druhej strane, z lineárnej algebry vieme, že každé lineárne vnorenie priestorov s rovnakou konečnou dimenziou je nutne i surjektívne. Preto je prirodzené zobrazenie π v (105) lineárnou izometriou priestorov X a X''.

Príklad 17 (Reflexívnosť Hilbertovho priestoru)

Každý Hilbertov priestor H je reflexívny. Tento významný a klasický výsledok je bezprostredným dôsledkom lineárnej izometrie priestorov H a H', a následne i priestorov H' a H'', diskutovanej v Poznámke 15. V oboch prípadoch je uvedený izomorfizmus realizovaný pomocou skalárnych súčinov v súlade s (83) a (84). Na druhej strane, obraz každého vektora $x \in H$ v prirodzenom zobrazení $\pi : H \to H''$ je možné reprezentovať práve skalárnym súčinom $\langle x, \cdot \rangle$.

Príklad 18 (Reflexívnosť l^p-priestorov)

Dôležitým príkladom triedy reflexívnych normovaných priestorov, ktoré nie sú Hilbertovými priestormi, sú priestory l^p pre $p \in (1, \infty)$, $p \neq 2$. Podľa Príkladu 13 je totiž pre dané $p \in (1, \infty)$ duálny priestor $(l^p)'$ lineárne izometrický s priestorom l^q, kým duálny priestor $(l^q)'$ je izometricky izomorfný s priestorom l^p, kde $q \in (1, \infty)$ je číslo konjugované s p, t.j., platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Celkovo je teda priestor l^p lineárne izometrický so svojim druhým duálnym priestorom $(l^p)''$, pričom jedna z týchto izometrií je sprostredkovaná práve prirodzeným zobrazením π v (105). Napokon dodajme, že pre $p = 2$ je reflexívnosť priestoru l^p zaručená i na základe Príkladu 17, keďže v tomto prípade sa jedná o Hilbertov priestor.

Príklad 19 (Nereflexívnosť priestorov l^1 a l^∞)

Na druhej strane, normovaný priestor l^1 nie je reflexívny. Vyplýva to z Príkladu 13, podľa ktorého druhý duálny priestor $(l^1)''$ je izometricky izomorfný s duálnym priestorom $(l^\infty)'$, avšak l^1 nie je izometrický s $(l^\infty)'$. Preto priestor l^1 nie je izometricky izomorfný so svojím druhým duálnym priestorom $(l^1)''$, a teda v súlade s Poznámkou 17 nemôže byť ani reflexívny. Obzvlášť, duálny priestor $(l^\infty)'$ nie je reflexívny. A keďže l^∞ je Banachov priestor, z Vety 14 vyplýva i nereflexívnosť normovaného priestoru l^∞.

Príklad 20 (Nereflexívnosť priestorov c a c_0)

Podobným spôsobom ukážeme i nereflexívnosti priestorov c a c_0. Konkrétne, z Príkladu 14 vieme, že obidva duálne priestory c' a $(c_0)'$ sú izometricky izomorfné s priestorom l^1, a teda v zhode s Príkladom 19 sú nereflexívne. Jedná sa však o Banachove priestory, preto podľa Vety 14 c a c_0 nemôžu byť reflexívne priestory.

Príklad 21 (Nereflexívnosť priestoru spojitých funkcií)

Ďalším významným príkladom nereflexívneho Banachovho priestoru je priestor $\mathcal{C}[a,b]$ všetkých reálnych funkcií spojitých na danom nedegenerovanom kompaktnom intervale $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ s normou rovnomernej konvergencie $\|\cdot\|_C$. Výnimočnosť priestoru $\mathcal{C}[a,b]$ je zvýraznená i skutočnosťou, že tento priestor dokonca nie je ani izometricky izomorfný s duálnym priestorom žiadneho normovaného priestoru.

Poznámka 19

Napokon ešte dodajme, že v prípade reflexívnych normovaných priestorov možno tvrdenie vo Vete 11 obrátiť. Presnejšie, reflexívny normovaný lineárny priestor X je separabilný práve vtedy, keď je separabilný jeho duálny priestor X'.

Obsah

Slabá konvergencia v normovanom priestore

Definícia 14 (Slabá ohraničenosť v normovanom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $A \subseteq X$ je množina. Hovoríme, že množina A je slabo ohraničená v priestore X, ak pre každý spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ pôsobiaci na X je množina

$$f(A) := \{f(x),\ x \in A\} \text{ ohraničená v } \mathbb{R}. \tag{108}$$

Poznámka 20

V kontexte Definície 14 sa ohraničenosť množiny $A \subseteq X$ v zmysle normy $\|\cdot\|$, t.j., existencia kladnej reálnej konštanty K s vlastnosťou

$$\|x\| \leq K \quad \text{pre každý vektor } x \in A, \tag{109}$$

niekedy označuje termínom silná ohraničenosť množiny A v priestore X. Pomocou nerovnosti (38) platiacej pre každé $f \in X'$ ľahko overíme, že každá silno ohraničená množina $A \subseteq X$ je v súlade s (108) zároveň i slabo ohraničená v priestore X. Jedným z významných výsledkov funkcionálnej analýzy s mnohými praktickými aplikáciami je ukázanie platnosti obráteného tvrdenia – tzv. princíp rovnomernej ohraničenosti alebo tiež Banachova–Steinhausova veta.

Lema 2

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$, X' jeho duálny priestor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ postupnosť vektorov. Nech existuje nedegenerovaná uzavretá guľa $B \subseteq X'$ s vlastnosťou, že množina

$$\{f(x_k),\ f \in B,\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \quad \textit{je ohraničená v } \mathbb{R}. \tag{110}$$

Potom postupnosť noriem $\{\|x_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená v $\mathbb{R}$.

Dôkaz Lemy 2.

Nech $f_B \in X'$ označuje stred gule B a $r \in (0, \infty)$ jej polomer, t.j., platí

$$B = \{f \in X',\ \|f - f_B\| \leq r\}. \tag{111}$$

Z (111) je zrejmé, že množina všetkých funkcionálov $\frac{1}{r}(f - f_B)$, $f \in B$, predstavuje uzavretú guľu $B[0, 1]$ v X' so stredom v nulovom funkcionále a s jednotkovým polomerom. V súlade s (110) nech $K > 0$ je také, že

$$|f(x_k)| \leq K \quad \text{pre každé } f \in B \text{ a } k \in \mathbb{N}. \tag{112}$$

Využitím trojuholníkovej nerovnosti následne máme

$$\left|\frac{1}{r}(f - f_B)(x_k)\right| = \left|\frac{1}{r} f(x_k) - \frac{1}{r} f_B(x_k)\right| \leq \frac{|f(x_k)|}{r} + \frac{|f_B(x_k)|}{r} \overset{(112)}{\leq} \frac{2K}{r} \tag{113}$$

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

pre každý funkcionál $f \in B$ a každý index $k \in \mathbb{N}$. V kontexte vyššie uvedených pozorovaní to znamená, že guľa $B[0,1]$ spĺňa reláciu

$$|g(x_k)| \leq \frac{2K}{r} \quad \text{pre každé } g \in B[0,1] \text{ a } k \in \mathbb{N}. \tag{114}$$

Pre každý index $k \in \mathbb{N}$ teraz uvažujme spojitý lineárny funkcionál $F_{x_k} : X' \to \mathbb{R}$ definovaný v (100). Z Vety 13 vieme, že platí $\|x_k\| = \|F_{x_k}\|$. Využitím formúl (36) a (100) v kombinácii s nerovnosťou (114) potom dostávame

$$\begin{aligned} \|x_k\| = \|F_{x_k}\| &\overset{(36)}{=} \sup\{|F_{x_k}(g)|,\ g \in B[0,1]\} \overset{(100)}{=} \sup\{|g(x_k)|,\ g \in B[0,1]\} \\ &\overset{(114)}{\leq} \frac{2K}{r} \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{115}$$

Podľa (115) je teda postupnosť noriem $\{\|x_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená. ■

Veta 15

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ slabo ohraničená postupnosť vektorov. Potom existuje reálne číslo $K > 0$ tak, že $\|x_k\| \leq K$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, t.j., postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je (silno) ohraničená v X.

Dôkaz Vety 15.

Nech X' označuje duálny priestor normovaného priestoru X. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme teda, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ nie je ohraničená v X, t.j., postupnosť noriem $\{\|x_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ nie je ohraničená v $\mathbb{R}$. Vo svetle Lemy 2 to znamená, že pre každú nedegenerovanú uzavretú guľu $B \subseteq X'$ je množina

$$M_B := \{f(x_k),\ f \in B,\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \tag{116}$$

neohraničená v $\mathbb{R}$. Nech $B_0 \subseteq X'$ je nejaká uzavretá guľa s polomerom $r_0 = 1$. Nakoľko odpovedajúca množina M_{B_0} v (116) nie je ohraničená, existuje index $k_0 \in \mathbb{N}$ a funkcionál $f_0 \in B_0$ tak, že $|f_0(x_{k_0})| > 1$. Obzvlášť, funkcionál $F_{x_{k_0}} \in X''$ predstavený v (100) spĺňa $|F_{x_{k_0}}(f_0)| > 1$, a vďaka jeho spojitosti existuje uzavretá guľa $B_1 \subseteq B_0$ so stredom v f_0 a polomerom $r_1 < \frac{1}{2}$ tak, že

$$|f(x_{k_0})| \overset{(100)}{=} |F_{x_{k_0}}(f)| > 1 \quad \text{pre každý funkcionál } f \in B_1. \tag{117}$$

Vyššie uvedené argumenty teraz aplikujeme na uzavretú guľu B_1. Príslušná množina M_{B_1} opäť nie je ohraničená v $\mathbb{R}$, preto (bez ujmy na všeobecnosti) existuje index $k_1 > k_0$ a uzavretá guľa $B_2 \subseteq B_1$ s polomerom $r_2 < \frac{1}{4}$ tak, že

$$|f(x_{k_1})| > 2 \quad \text{pre každý funkcionál } f \in B_2. \tag{118}$$

Predĺžiac túto úvahu, zostrojíme rastúcu postupnosť indexov $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ a k nej odpovedajúcu postupnosť $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ do seba vložených uzavretých gulí v duálnom priestore X', ktoré spĺňajú relácie

Dôkaz Vety 15 (pokračovanie).

$$\text{polomer } B_n \text{ je menší než } \frac{1}{2^n} \text{ a } |f(x_{k_n})| > n \text{ pre každý funkcionál } f \in B_n. \qquad (119)$$

Duálny priestor X' je podľa Vety 10 úplný, a tak v zhode s výsledkami teórie metrických priestorov postupnosť $\{B_n\}$ má neprázdny prienik v X', t.j., existuje (jediný) spojitý lineárny funkcionál $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ spĺňajúci $\tilde{f} \in \cap_{n=0}^{\infty} B_n$. Obvzlášť, v súlade s (119) pre funkcionál $\tilde{f}$ platí nerovnosť

$$|\tilde{f}(x_{k_n})| > n \text{ pre každý index } n \in \mathbb{N}. \qquad (120)$$

Relácie v (120) znamenajú, že číselná postupnosť $\{\tilde{f}(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ nie je ohraničená v $\mathbb{R}$. Podľa Definície 14 to však odporuje predpokladu slabej ohraničenosti postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Preto $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je (silno) ohraničená v X a dôkaz je hotový. ∎

Veta 16 (Banachova–Steinhausova)

Nech X je normovaný lineárny priestor. Potom každá podmnožina $A \subseteq X$, ktorá je slabo ohraničená v X, je zároveň i (silno) ohraničená v priestore X. Inými slovami, slabá a silná ohraničenosť množín v normovaných priestoroch splývajú.

Dôkaz Vety 16.

Nech $\|\cdot\|$ je norma v priestore X a nech $A \subseteq X$ je nejaká slabo ohraničená podmnožina. Predpokladajme, že A nie je ohraničená v X. To znamená, že existuje postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ s vlastnosťou $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$. Zo slabej ohraničenosti množiny A vyplýva, že i postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je slabo ohraničená v X. V súlade s Vetou 15 teda musí byť táto postupnosť i (silno) ohraničená v X, čo však zrejme odporuje jej definícii. Množina A je preto (silno) ohraničená v priestore X a dôkaz je kompletný. ■

Definícia 15 (Slabá konvergencia v normovanom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$. Hovoríme, že postupnosť vektorov $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ slabo konverguje v priestore X k bodu $x \in X$, ak pre každý spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ pôsobiaci na X je číselná postupnosť $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentná v $\mathbb{R}$ s limitou $f(x)$. Vektor x potom nazývame slabou limitou postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ v priestore X a píšeme $x_k \rightharpoonup x$ pre $k \to \infty$.

Poznámka 21

Poznamenajme, že analogicky ako v Poznámke 20 sa konvergencia v norme $\|\cdot\|$

Poznámka 21

označuje prívlastkom silná. Je zrejmé, že v súlade s Definíciou 15 každá silno konvergentná postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ so (silnou) limitou $x \in X$ je zároveň i slabo konvergentná v X s rovnakou (slabou) limitou x. Táto skutočnosť je dôsledkom spojitosti funkcionálov $f \in X'$. Opačné tvrdenie však neplatí, t.j., slabá konvergencia vo všeobecnosti neimplikuje (silnú) konvergenciu v norme.

Veta 17

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť vektorov. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ má najviac jednu slabú limitu v X.*

(ii) *Ak $x_k \rightharpoonup x$ pre $k \to \infty$, kde $x \in X$, potom každá vybraná podpostupnosť $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je slabo konvergentná v X s limitou x.*

(iii) *Ak $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ slabo konverguje v X, potom je (silno) ohraničená v X.*

Dôkaz Vety 17.

(i) Ak by pre $k \to \infty$ platilo $x_k \rightharpoonup x$ a zároveň $x_k \rightharpoonup y$, kde $x, y \in X$ sú rôzne prvky, potom podľa Poznámky existuje spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$

Dôkaz Vety 17 (pokračovanie).

s vlastnosťou $f(x) \neq f(y)$. V súlade s Definíciou 15 by teda číselná postupnosť $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ mala dve rôzne limity $f(x)$ a $f(y)$, čo však je zrejmý spor. Preto postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ môže mať najviac jednu slabú limitu v X.
(ii) Tvrdenie vyplýva z pozorovania, že pre každé $f \in X'$ je $\{f(x_{k_n})\}_{n=1}^{\infty}$ vybraná podpostupnosť konvergentnej číselnej postupnosti $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou $f(x)$. Preto $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x)$, a tak v zhode s Definíciou 15 je v X slabo konvergentná i postupnosť $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ s rovnakou limitou x.
(iii) Z kombinácie Definícií 14 a 15 vyplýva, že každá postupnosť, ktorá slabo konverguje v priestore X, je slabo ohraničená v X. Predložená postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je teda slabo ohraničená v priestore X, čo vďaka Banachovej–Steinhausovej vety 16 zaručuje i jej (silnú) ohraničenosť v X. ■

Veta 18

Nech X je normovaný lineárny priestor, X' jeho duálny priestor a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$. Potom postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je slabo konvergentná v X s limitou $x \in X$ práve vtedy, keď je (silno) ohraničená v X a existuje množina $A \subseteq X'$ s vlastnosťami

$$\overline{\operatorname{Lin} A} = X' \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x) \quad \text{pre každý funkcionál } g \in A. \tag{121}$$

Dôkaz Vety 18.

Platnosť implikácie "⇒" je priamym dôsledkom Definície 15 a Vety 17(iii). Zameriame sa preto na dôkaz opačnej implikácie "⇐". Nech teda postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená v X a nech existuje množina $A \subseteq X'$ spĺňajúca relácie v (121) pre nejaký prvok $x \in X$. Obzvlášť to znamená, že existuje $K > 0$ také, že platí

$$\|x\| \leq K, \quad \text{a zároveň} \quad \|x_k\| \leq K \quad \text{pre každý index } k \in \mathbb{N}, \tag{122}$$

kde $\|\cdot\|$ je norma v priestore X. Z prvej relácie v (121) ďalej vyplýva, že pre každý funkcionál $f \in X'$ existuje postupnosť $\{g_l\}_{l=1}^{\infty} \subseteq \operatorname{Lin} A$ s vlastnosťou

$$\lim_{l\to\infty} \|f - g_l\| = 0. \tag{123}$$

Poznamenajme, že vďaka druhej rovnosti v (121) každý funkcionál g_l, $l \in \mathbb{N}$, ako konečná lineárna kombinácia prvkov množiny A, spĺňa formulu

$$\lim_{k\to\infty} g_l(x_k) = g_l(x). \tag{124}$$

Zvoľme teraz nejaký funkcionál $f \in X'$. Dokážeme platnosť rovnosti

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x). \tag{125}$$

Nech $\varepsilon > 0$ je dané. Z (123) vyplýva existencia indexu $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou

$$\|f - g_{l_\varepsilon}\| < \frac{\varepsilon}{3K}. \tag{126}$$

Dôkaz Vety 18 (pokračovanie).

Následne, rovnosť (124) s $l := l_\varepsilon$ zaručuje existenciu indexu $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ spĺňajúceho

$$|g_{l_\varepsilon}(x) - g_{l_\varepsilon}(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pre každé } k \geq k_\varepsilon. \tag{127}$$

Pomocou nerovností (38), (122), (126) a (127) potom pre každé $k \geq k_\varepsilon$ máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_k)| &= \big|[f(x) - g_{l_\varepsilon}(x)] + [g_{l_\varepsilon}(x) - g_{l_\varepsilon}(x_k)] + [g_{l_\varepsilon}(x_k) - f(x_k)]\big| \\ &\leq |f(x) - g_{l_\varepsilon}(x)| + |g_{l_\varepsilon}(x) - g_{l_\varepsilon}(x_k)| + |g_{l_\varepsilon}(x_k) - f(x_k)| \\ &\overset{(38),(127)}{<} \|f - g_{l_\varepsilon}\| \cdot \|x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f - g_{l_\varepsilon}\| \cdot \|x_k\| \\ &\overset{(122),(126)}{<} \frac{\varepsilon}{3K} \cdot K + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K} \cdot K = \varepsilon. \end{aligned} \tag{128}$$

Získaná nerovnosť (128) je však ekvivalentná s reláciou (125). Keďže funkcionál $f \in X'$ bol zvolený ľubovoľne, v súlade s Definíciou 15 je teda postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ slabo konvergentná v priestore X so slabou limitou x. ∎

Príklad 22 (Slabá konvergencia v priestoroch s konečnou dimenziou)

V každom normovanom lineárnom priestore X s konečnou dimenziou $n \in \mathbb{N}$ je slabá konvergencia ekvivalentná so silnou konvergenciou v príslušnej norme $\|\cdot\|$. Dokážeme túto skutočnosť. Nech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je nejaká (algebraická) báza priestoru X a $\{g_1, \ldots, g_n\}$ je k nej odpovedajúca duálna báza predstavená v Príklade 10. Predpokladajme, že postupnosť $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ slabo konverguje k vektoru $x \in X$. Nech $(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k) \subseteq \mathbb{R}^n$ a $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ označujú súradnice prvkov x^k, $k \in \mathbb{N}$, a x v báze $\{e_1, \ldots, e_n\}$, t.j.,

$$x^k = x_1^k\, e_1 + x_2^k\, e_2 + \cdots + x_n^k\, e_n, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{129}$$

$$x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n. \tag{130}$$

Podľa rovností v (88) v Príklade 10 a reprezentácií v (129)–(130) potom platí

$$g_i(x^k) = x_i^k, \quad g_i(x) = x_i, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{131}$$

Keďže $g_i \in X'$ pre každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, v súlade s Definíciou 15 máme

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k \overset{(131)}{=} \lim_{k\to\infty} g_i(x^k) = g_i(x) \overset{(131)}{=} x_i, \quad \text{pre každé } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{132}$$

Formula (132) teda ukazuje súradnicovú konvergenciu postupnosti $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ vzhľadom na bázu $\{e_1, \ldots, e_n\}$, z ktorej však, vďaka konečnorozmernosti priestoru X, vyplýva konvergencia v danej norme $\|\cdot\|$.

Príklad 23 (Slabá konvergencia v l^p-priestoroch)

Pri charakterizácii slabej konvergencie v priestore l^p, kde $p > 1$ je pevne dané, využijeme výsledok Vety 18. Za týmto účelom pre každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$e^n := \{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{t.j.,} \quad e^n = (0, \dots, \underbrace{1}_{n-\text{tý člen}}, \dots, 0, \dots). \tag{133}$$

Je zrejmé, že postupnosť $e^n \in l^p$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Ďalej uvažujme množinu

$$A := \{g_n \ : \ l^p \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq (l^p)' \tag{134}$$

spojitých lineárnych funkcionálov pôsobiacich na priestore l^p tvaru

$$g_m(e^n) := \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \qquad m, n \in \mathbb{N}. \tag{135}$$

Z detailnej konštrukcie duálneho priestoru $(l^p)'$ v Príklade 13 vyplýva, že množina A v (134) spĺňa rovnosť $\overline{\text{Lin}\ A} = (l^p)'$ a pre každý prvok $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ platí

$$g_n(x) = x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{136}$$

Pomocou Vety 18 potom nie je ťažké si premyslieť, že postupnosť $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq l^p$, t.j., $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, je slabo konvergentná v priestore l^p s limitou $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ práve vtedy, keď platia podmienky

Príklad 23 (Slabá konvergencia v l^p-priestoroch)

(i) postupnosť $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ je (silno) ohraničená v l^p, t.j., číselná postupnosť $\{\|x^n\|\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená v $\mathbb{R}$,

(ii) postupnosť $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ po zložkách konverguje k prvku x, t.j., platí

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{137}$$

Poznamenajme, že na rozdiel od predchádzajúceho Príkladu 22 v tomto prípade slabá konvergencia nie je ekvivalentná so silnou konvergenciou. Napríklad postupnosť $\{e^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq l^p$ definovaná v (133) konverguje slabo k identicky nulovej postupnosti, keďže je očividne (silno) ohraničená a máme

$$\lim_{n\to\infty} e_k^n \overset{(133)}{=} \lim_{n\to\infty} \delta_{kn} = 0 \quad \text{pre každé pevné } k \in \mathbb{N}.$$

Na druhej strane, postupnosť $\{e^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá v priestore l^p silnú limitu, pretože nie je ani cauchyovská vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, nakoľko pre každé dva rôzne indexy $m, n \in \mathbb{N}$ platí $\|e^m - e^n\| = 2^{1/p}$, ako sa môžeme ľahko presvedčiť.

Príklad 24 (Slabá konvergencia v priestore l^1 – Schurova veta)

V priestore l^1 slabá konvergencia a (silná) konvergencia v norme splývajú.

Príklad 25 (Slabá konvergencia v priestore spojitých funkcií)

V prípade priestoru $\mathcal{C}[a,b]$ všetkých reálnych funkcií spojitých na netriviálnom kompaktnom intervale $[a,b]$, $a < b$, s normou rovnomernej konvergencie $\|\cdot\|_C$ má slabá konvergencia obzvlášť významnú interpretáciu. Dá sa totiž ukázať, že postupnosť funkcií $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}[a,b]$ je slabo konvergentná v priestore $\mathcal{C}[a,b]$ so slabou limitou $u \in \mathcal{C}[a,b]$ práve vtedy, keď

(i) postupnosť $\{u_k\}_{n=1}^{\infty}$ je (silno) ohraničená v $\mathcal{C}[a,b]$, t.j., existuje kladná reálna konštanta K taká, že platí

$$|u_k(x)| \leq K \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N} \text{ a každé } x \in [a,b], \tag{138}$$

(ii) postupnosť $\{u_k\}_{n=1}^{\infty}$ bodovo konverguje k funkcii u na intervale $[a,b]$, t.j.,

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x) \quad \text{pre každé } x \in [a,b]. \tag{139}$$

Príklad 26 (Slabá a silná konvergencia v Hilbertovom priestore)

Nech H je Hilbertov priestor s normou $\|\cdot\|$ (indukovanou príslušným skalárnym súčinom). Potom postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq H$ konverguje (silno) k vektoru $x \in H$ práve vtedy, keď je slabo konvergentná v H s limitou x a $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$.

Pojem $*$-slabej konvergencie v duálnom priestore

Definícia 16 ($*$-slabá ohraničenosť v duálnom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor, X' jeho duálny priestor a $A \subseteq X'$ je množina. Hovoríme, že množina A je $*$-slabo ohraničená v priestore X', ak pre každý vektor $x \in X$ je množina

$$A_x := \{f(x),\ f \in A\} \text{ ohraničená v } \mathbb{R}. \tag{140}$$

Poznámka 22

S ohľadom na Definíciu 16 nie je ťažké si uvedomiť, že $*$-slabá ohraničenosť podmnožín duálneho priestoru X' je pojem "hrubší" než (silná) ohraničenosť v norme priestoru X'. Presnejšie, každá silno ohraničená množina $A \subseteq X'$ je zároveň i $*$-slabo ohraničená v priestore X'. Ak totiž pre nejaké $K > 0$ je $\|f\| \leq K$ pre každý funkcionál $f \in A$, potom na základe nerovnosti (38) máme

$$|f(x)| \overset{(38)}{\leq} \|f\| \cdot \|x\| \leq K\|x\| \quad \text{pre každé } x \in X. \tag{141}$$

Číselná množina A_x v (140) je teda pre každý daný vektor $x \in X$ ohraničená, a tak podľa Definície 16 je A $*$-slabo ohraničená v X'. Opačné tvrdenie však neplatí, t.j., $*$-slabá ohraničenosť v X' v prípade všeobecného normovaného lineárneho priestoru X neimplikuje (silnú) ohraničenosť v norme priestoru X'.

Príklad 27

Uvažujme reálny lineárny priestor X tvaru

$$X := \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq l^1,\ x \text{ má len konečne veľa nenulových členov} \right\}, \tag{142}$$

na ktorom uvažujeme normu priestoru l^1, t.j., $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ pre $x \in X$. Nech X' je odpovedajúci duálny priestor a nech A označuje množinu funkcionálov $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, s predpisom

$$f_n(x) := n\, x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X. \tag{143}$$

Nie je ťažké overiť, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je zobrazenie f_n v (143) spojitý lineárny funkcionál na X, t.j., $A \subseteq X'$. Zvoľme nejaký prvok $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ a nech

$$K_x := \max_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad n_x := \max\{k \in \mathbb{N},\ x_k \neq 0\}. \tag{144}$$

Využitím relácií v (143) a (144) potom pre každý index $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$|f_n(x)| \overset{(143)}{=} n\,|x_n| \overset{(144)}{=} \left\{ \begin{array}{ll} n\,|x_n|, & n \le n_x, \\ 0, & n > n_x, \end{array} \right\} \overset{(144)}{\le} n_x\, K_x, \tag{145}$$

a teda odpovedajúca množina A_x v (140) je ohraničená. V súlade s Definíciou 16 to znamená, že predložená množina A je $*$-slabo ohraničená v X'. Nie je však ohraničená v X', nakoľko pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $|f_n(e^n)| = n$, kde $e^n \in X$ je postupnosť definovaná v (133). A keďže $\|e^n\| = 1$, podľa (37) platí $\|f_n\| \ge n$.

Lema 3

Nech X je normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$, X' jeho duálny priestor a $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ postupnosť funkcionálov. Nech existuje nedegenerovaná uzavretá guľa $B \subseteq X$ s vlastnosťou, že množina

$$\{f_k(x),\ x \in B,\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \quad \textit{je ohraničená v } \mathbb{R}. \tag{146}$$

Potom postupnosť noriem $\{\|f_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená v $\mathbb{R}$.

Veta 19

Nech X je Banachov priestor, t.j., úplný normovaný lineárny priestor, X' jeho duálny priestor s normou $\|\cdot\|$ a $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ $*$-slabo ohraničená postupnosť funkcionálov. Potom existuje reálne číslo $K > 0$ tak, že $\|f_k\| \leq K$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, t.j., postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je (silno) ohraničená v X'.

Veta 20 (Banachova–Steinhausova)

Nech X je Banachov priestor a X' jeho duálny priestor. Potom každá podmnožina $A \subseteq X'$, ktorá je $*$-slabo ohraničená v X', je zároveň i (silno) ohraničená v norme priestoru X'. Inými slovami, $*$-slabá a silná ohraničenosť podmnožín v duálnych priestoroch Banachových priestorov splývajú.

Poznámka 23

Poznamenajme, že dôkazy Lemy 3 a Viet 19 a 20 sú založené na formálne rovnakých myšlienkach ako dôkazy Lemy 2 a Viet 15 a 16 týkajúce sa slabej ohraničenosti v priestore X. Obzvlášť, v tvrdeniach Viet 19 a 20 je kľúčový predpoklad, že východiskový priestor X je Banachov. Úplnosť normovaného priestoru X teda zaručuje ekvivalenciu $*$-slabej a silnej ohraničenosti v duálnom priestore X'. Táto skutočnosť je názorne ilustrovaná v Príklade 27, kde skúmaný priestor X definovaný v (142) nie je Banachov (platí totiž $\overline{X} = l^1 \supsetneq X$, ako sme diskutovali v jednom z príkladov v prednáškach o lineárnych priestoroch).

Definícia 17 ($*$-slabá konvergencia v duálnom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor a X' jeho duálny priestor s normou $\|\cdot\|$. Hovoríme, že postupnosť funkcionálov $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ $*$-slabo konverguje v priestore X' k funkcionálu $f \in X'$, ak pre každý vektor $x \in X$ je číselná postupnosť $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentná v $\mathbb{R}$ s limitou $f(x)$. Funkcionál f potom označujeme ako $*$-slabú limitu postupnosti $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ v duálnom priestore X' a píšeme $f_k \xrightarrow{*} f$ pre $k \to \infty$.

Poznámka 24

Analogicky ako v Poznámke 21 každá postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ funkcionálov konvergentná v norme priestoru X' s limitou $f \in X'$ je zároveň i $*$-slabo konvergentná v priestore X' s rovnakou (slabou) limitou f. Tento fakt vyplýva z nerovnosti (38), podľa ktorej platí

$$|f_k(x) - f(x)| \overset{(38)}{\leq} \|f_k - f\| \cdot \|x\| \quad \text{pre každé } x \in X. \tag{147}$$

Ak teda postupnosť $f_k \to f$ pre $k \to \infty$ v norme duálneho priestoru X', t.j., $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0$, potom podľa (147) máme $\lim_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$ pre každý vektor $x \in X$. V kontexte Definície 17 to potom znamená, že postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje $*$-slabo k funkcionálu f, t.j., $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pre $k \to \infty$. Opačná implikácia samozrejme vo všeobecnosti neplatí, ako ukazujeme v Príklade 28.

Veta 21

Nech X je Banachov priestor, X' jeho duálny priestor a $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$. Potom postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je $*$-slabo konvergentná v X' s limitou $f \in X'$ práve vtedy, keď je (silno) ohraničená v X' a existuje množina $A \subseteq X$ s vlastnosťami

$$\overline{\mathrm{Lin}\, A} = X \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{pre každý vektor } x \in A. \tag{148}$$

Príklad 28

Uvažujme normovaný lineárny priestor $X := c_0$. Z Príkladu 14 vieme, že odpovedajúci duálny priestor X' je izometricky izomorfný s priestorom l^1, pričom príslušná korešpondencia má tvar

$$X' \ni f \leftrightarrow \lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^1, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, x_k, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X. \tag{149}$$

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in X'$ je postupnosť funkcionálov, ktorá v kontexte ekvivalencie (149) odpovedá postupnosti $\{e^n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $e^n := \{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty} \in l^1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Každý z funkcionálov f_n, $n \in \mathbb{N}$, teda spĺňa

$$f_n(x) \overset{(149)}{=} x_n \quad \text{pre každé } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X. \tag{150}$$

Avšak $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ pre každé $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$, a tak z (150) vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{(150)}{=} \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{pre každý prvok } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X. \tag{151}$$

Podľa Definície 17 teda postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ $*$-slabo konverguje v duálnom priestore X' k nulovému funkcionálu, t.j., $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ pre $k \to \infty$. Nejedná sa však o silnú konvergenciu v X', pretože pre každý daný index $n \in \mathbb{N}$ voľbou $x := \{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty} \in X$ máme $f_n(x) = 1$, a keďže $\|x\|_X = 1$, platí $\|f_n\| \geq 1$.

Príklad 29

Z Príkladov 3 a 8 vieme, že pre danú reálnu funkciu y spojitú na kompaktnom intervale $I := [-1, 1]$ je zobrazenie f definované predpisom

$$f(u) := \int_{-1}^{1} u(x)\, y(x)\, \mathrm{d}x, \quad \text{kde } u \text{ je funkcia spojitá na } I,$$

spojitý lineárny funkcionál pôsobiaci na normovanom priestore $X := \mathcal{C}(I)$ s normou rovnomernej konvergencie $\|\cdot\|_C$. Uvažujme postupnosť spojitých funkcií $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ spĺňajúcich pre každé $k \in \mathbb{N}$ vlastnosti

$$y_k(x) \geq 0, \quad x \in I, \qquad y_k \equiv 0 \quad \text{na } I \setminus \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \qquad \int_{-1}^{1} y_k(x)\, \mathrm{d}x = 1. \tag{152}$$

Súbor funkcií y_k, $k \in \mathbb{N}$, určuje postupnosť funkcionálov $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ tvaru

$$f_k(u) := \int_{-1}^{1} u(x)\, y_k(x)\, \mathrm{d}x, \quad u \in X. \tag{153}$$

Pomocou (153), formuly (44) a podmienok v (152) nie je ťažké overiť, že

$$\|f_k\| \overset{(153),(44)}{=} \int_{-1}^{1} |y_k(x)|\, \mathrm{d}x \overset{(152)}{=} \int_{-1/k}^{1/k} y_k(x)\, \mathrm{d}x = 1. \tag{154}$$

Príklad 29

Dokážeme, že postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje $*$-slabo v duálnom priestore X' k funkcionálu $\delta_0 \in X'$ z Príkladu 3 s predpisom

$$\delta_0(u) := u(0), \quad u \in X. \tag{155}$$

Skutočne, pre každý index $k \in \mathbb{N}$ a každý prvok $u \in X$ postupne platí

$$\begin{aligned}
|f_k(u) - \delta_0(u)| &\overset{(153),(155)}{=} \left| \int_{-1}^{1} u(x)\, y_k(x)\, \mathrm{d}x - u(0) \right| \\
&\overset{(152)}{=} \left| \int_{-1}^{1} [u(x) - u(0)]\, y_k(x)\, \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |u(x) - u(0)|\, y_k(x)\, \mathrm{d}x \\
&\overset{(152)}{=} \int_{-1/k}^{1/k} |u(x) - u(0)|\, y_k(x)\, \mathrm{d}x \\
&= |u(\eta_k) - u(0)| \int_{-1/k}^{1/k} y_k(x)\, \mathrm{d}x \\
&\overset{(152)}{=} |u(\eta_k) - u(0)| \quad \text{pre isté } \eta_k \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right].
\end{aligned} \tag{156}$$

V predposlednom kroku v (156) sme využili kombináciu vety o strednej hodnote

Príklad 29

a Bolzanovej vety pre spojitú funkciu $|u - u(0)|$ na kompaktnom intervale $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$. A keďže postupnosť $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ očividne spĺňa $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$, máme

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(u) - \delta_0(u)| \overset{(156)}{=} \lim_{k\to\infty} |u(\eta_k) - u(0)| = |u(0) - u(0)| = 0 \quad \text{pre každé } u \in X,$$

a tak podľa Definície 17 platí $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0$ pre $k \to \infty$. Naviac, platí $\|\delta_0\| = 1$, ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Na druhej strane, dá sa ukázať, že uvažovaná postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ pre žiadnu voľbu funkcií y_k, $k \in \mathbb{N}$, spĺňajúcich vlastnosti (152) nekonverguje silno, t.j., v norme duálneho priestoru X'. Dôkaz je založený na pozorovaní, že postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ nie je cauchyovská v norme priestoru X', a teda nemôže byť ani (silno) konvergentná v X'.

Poznámka 25 (Silná a $*$-slabá topológia v duálnom priestore)

V súlade s prezentovanou teóriu máme teda v duálnom priestore X' každého normovaného lineárneho priestoru X s normou $\|\cdot\|$ zavedené dve topológie – silnú a $*$-slabú. Nech $A \subseteq X'$ je nejaká podmnožina spojitých lineárnych funkcionálov. Podľa Definície 8 je množina A silno ohraničená v X', t.j., ohraničená v silnej topológii, ak existuje kladná reálna konštanta K taká, že $\|f\| \leq K$ pre každé $f \in A$. Nie je ťažké ukázať, že táto skutočnosť je ekvivalentná s vlastnosťou

Poznámka 25 (Silná a $*$-slabá topológia v duálnom priestore)

$$\text{pre každú ohraničenú množinu } B \subseteq X \text{ je } \{f(x),\ f \in A,\ x \in B\} \text{ ohraničená.} \tag{157}$$

Analogicky možno v zhode s Definíciou 16 $*$-slabú ohraničenosť množiny A v X', t.j., v $*$-slabej topológii, charakterizovať vlastnosťou

$$\text{pre každú konečnú množinu } B \subseteq X \text{ je } \{f(x),\ f \in A,\ x \in B\} \text{ ohraničená.} \tag{158}$$

Z relácií v (157) a (158) následne vyplýva tvar okolí prvkov duálneho priestoru X' jednotlivých topológiách. Konkrétne, pre každé $\varepsilon > 0$ a $f \in X'$ máme

$$\varepsilon\text{-okolie prvku } f \text{ v silnej topológii } : \{g \in X',\ \|g - f\| < \varepsilon\}, \tag{159}$$

$$\varepsilon\text{-okolie prvku } f \text{ v } *\text{-slabej topológii } : \{g \in X',\ |g(x) - f(x)| < \varepsilon,\ x \in B\} \\ \text{pre nejakú konečnú množinu } B \subseteq X. \tag{160}$$

Ďalej vieme, že silná konvergencia v duálnom priestore X', t.j., konvergencia vzhľadom na normu $\|\cdot\|$, je indukovaná metrikou, konkrétne $\rho(f, g) := \|f - g\|$, $f, g \in X'$. Priestor X' je teda ako topologický lineárny priestor vzhľadom na silnú topológiu metrizovateľný. Dá sa ukázať, že v prípade separabilného priestoru X je i $*$-slabá konvergencia indukovaná istou metrikou. Presnejšie, ak $B'[0,1] \subseteq X'$ je uzavretá jednotková guľa v duálnom priestore X', potom $*$-slabá konvergencia v $B'[0,1]$ je ekvivalentná s konvergenciou v metrike ρ' tvaru

Poznámka 25 (Silná a $*$-slabá topológia v duálnom priestore)

$$\rho'(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(x_k) - g(x_k)|}{2^k}, \quad f,g \in B'[0,1], \tag{161}$$

kde $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B[0,1]$ je spočítateľná množina hustá v uzavretej jednotkovej guli $B[0,1] \subseteq X$. To znamená, že množina $B'[0,1]$ je metrizovateľný topologický priestor vzhľadom na $*$-slabú topológiu. Dodajme, že tento záver platí pre každú uzavretú guľu $B'[0,r]$, $r>0$, resp. pre každú ohraničenú množinu $A \subseteq X'$.

Poznámka 26

Poznamenajme, že v duálnom priestore X' môžeme okrem $*$-slabej ohraničenosti a konvergencie zavedených v Definíciách 16 a 17 uvažovať i "klasickú" slabú ohraničenosť a konvergenciu v zmysle Definícií 14 a 15, v ktorých budeme X' chápať ako východiskový normovaný lineárny priestor a druhý duálny priestor X'' ako k nemu odpovedajúci duálny priestor. Konkrétne, množina spojitých lineárnych funkcionálov $A \subseteq X'$ je slabo ohraničená v priestore X', ak pre každý spojitý lineárny funkcionál $F : X' \to \mathbb{R}$ pôsobiaci na X' je množina

$$F(A) := \{F(f),\ f \in A\} \text{ ohraničená v } \mathbb{R}. \tag{162}$$

Podobne, postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ je slabo konvergentná v X' so slabou limitou $f \in X'$, ak pre každý funkcionál $F \in X''$ je $\lim_{k\to\infty} F(f_k) = F(f)$.

Poznámka 26

Vďaka kanonickému vnoreniu π v (105) a (100) zo slabej ohraničenosti, resp. konvergencie, vyplýva $*$-slabá ohraničenosť, resp. konvergencia. Skutočne, ak množina $A \subseteq X'$ je slabo ohraničená v X', potom pre každé $x \in X$ je množina

$$A_x \overset{(140)}{=} \{f(x),\ f \in A\} \overset{(100)}{=} \{F_x(f),\ f \in A\} \overset{(162)}{=} F_x(A) \tag{163}$$

ohraničená v $\mathbb{R}$, a tak podľa Definície 16 je A $*$-slabo ohraničená v X'. Analogicky, ak postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ slabo konverguje v X' k funkcionálu $f \in X'$, potom pre každý vektor $x \in X$ máme

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) \overset{(100)}{=} \lim_{k\to\infty} F_x(f_k) = F_x(f) \overset{(100)}{=} f(x), \tag{164}$$

čo v súlade s Definíciou 17 znamená, že postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ $*$-slabo konverguje s $*$-slabou limitou f v priestore X'. Platia teda nasledujúce relácie

$$\begin{gathered}\text{silná topológia v duálnom priestore } X' \\ \Downarrow \\ \text{slabá topológia v duálnom priestore } X' \\ \Downarrow \\ *\text{-slabá topológia v duálnom priestore } X'.\end{gathered}$$

Napokon dodajme, že slabá a $*$-slabá topológia v X' splývajú práve vtedy, keď priestor X je reflexívny, ako možno vidieť prostredníctvom Definície 13.

Veta 22

Nech X je separabilný normovaný lineárny priestor, X' jeho duálny priestor a $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ (silno) ohraničená postupnosť. Potom z $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je možné vybrať podpostupnosť, ktorá $*$-slabo konverguje v X'.

Dôkaz Vety 22.

Nech $A := \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je spočítateľná množina hustá v priestore X, t.j., platí $\overline{A} = X$ v norme $\|\cdot\|$ priestoru X. Keďže postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je (silno) ohraničená v duálnom priestore X', existuje $K > 0$ s vlastnosťou

$$\|f_k\| \leq K \quad \text{pre každý index } k \in \mathbb{N}. \tag{165}$$

Následne, využijúc nerovnosť (38), dostávame reláciu

$$|f_k(x_l)| \overset{(38)}{\leq} \|f_k\| \cdot \|x_l\| \leq K\|x_l\| \quad \text{pre každú dvojicu indexov } k, l \in \mathbb{N}. \tag{166}$$

To znamená, že pre každý daný vektor x_l, $l \in \mathbb{N}$, je číselná postupnosť $\{f_k(x_l)\}_{k=1}^{\infty}$ ohraničená v euklidovskom priestore $\mathbb{E}$. Obzvlášť, číselná postupnosť $\{f_k(x_1)\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená v $\mathbb{E}$, a preto podľa Bolzanovej–Weierstrassovej vety je možné z nej vybrať konvergentnú podpostupnosť. Inými slovami, z postupnosti funkcionálov $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je možné vybrať podpostupnosť $\{f_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že

Dôkaz Vety 22 (pokračovanie).

postupnosť $\{f_k^1(x_1)\}_{k=1}^\infty$ konverguje v $\mathbb{E}$. Nech $L_1 \in \mathbb{R}$ označuje jej limitu, t.j.,

$$\lim_{k\to\infty} f_k^1(x_1) =: L_1. \tag{167}$$

Postupnosť $\{f_k^1\}_{k=1}^\infty$ je však tiež (silno) ohraničená v X', a tak i číselná postupnosť $\{f_k^1(x_2)\}_{k=1}^\infty$ je ohraničená v $\mathbb{E}$. Preto je možné z nej vybrať konvergentnú podpostupnosť, t.j., z postupnosti funkcionálov $\{f_k^1\}_{k=1}^\infty$ je možné vybrať podpostupnosť $\{f_k^2\}_{k=1}^\infty$ tak, že $\{f_k^2(x_2)\}_{k=1}^\infty$ konverguje v $\mathbb{E}$ s limitou

$$\lim_{k\to\infty} f_k^2(x_2) =: L_2. \tag{168}$$

V súlade s rovnosťou (167) je zároveň konvergentná i postupnosť $\{f_k^2(x_1)\}_{k=1}^\infty$ (ako vybraná z postupnosti $\{f_k^1(x_1)\}_{k=1}^\infty$) s limitou L_1, teda $\lim_{k\to\infty} f_k^2(x_1) = L_1$. V podobnom duchu pokračujeme ďalej. Zostavíme tak postupnosť

$$\begin{array}{cccccc}
f_1^1, & f_2^1, & f_3^1, & \dots, & f_k^1, & \dots, \\
f_1^2, & f_2^2, & f_3^2, & \dots, & f_k^2, & \dots, \\
f_1^3, & f_2^3, & f_3^3, & \dots, & f_k^3, & \dots, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
f_1^n, & f_2^n, & f_3^n, & \dots, & f_k^n, & \dots, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots &
\end{array} \tag{169}$$

Dôkaz Vety 22 (pokračovanie).

ktorá spĺňa nasledujúce vlastnosti.

(i) Pre každé $n \in \mathbb{N}$ je postupnosť $\{f_k^{n+1}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z postupnosti $\{f_k^n\}_{k=1}^{\infty}$.

(ii) Pre každý daný index $n \in \mathbb{N}$ je každá z číselných postupností $\{f_k^n(x_l)\}_{k=1}^{\infty}$, kde $l \in \{1, \ldots, n\}$, konvergentná, pričom pre každé pevné $l \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} f_k^n(x_l) =: L_l \quad \text{pre každé } n \geq l. \tag{170}$$

V schéme (169) teraz uvažujme diagonálnu vybranú podpostupnosť $\{f_k^k\}_{k=1}^{\infty}$ a dokážeme, že bodovo konverguje v každom vektore x_l, $l \in \mathbb{N}$. Skutočne, pre každý pevne zvolený index $l \in \mathbb{N}$ je číselná postupnosť $\{f_k^k(x_l)\}_{k=l}^{\infty}$ vybraná podpostupnosť z konvergentnej postupnosti $\{f_k^l(x_l)\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou L_l, v súlade s (170). Preto aj $\{f_k^k(x_l)\}_{k=l}^{\infty}$ je konvergentná s rovnakou limitou L_l. Následne dostávame i konvergenciu číselnej postupnosti $\{f_k^k(x_l)\}_{k=1}^{\infty}$ a rovnosť

$$\lim_{k\to\infty} f_k^k(x_l) = L_l \quad \text{pre každé } l \in \mathbb{N}. \tag{171}$$

A keďže podľa predpokladov množina $A = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ spĺňa $\overline{\operatorname{Lin} A} = X$, ako možno ľahko overiť, podľa Vety 21 je vybraná podpostupnosť funkcionálov $\{f_k^k\}_{k=1}^{\infty}$ $*$-slabo konvergentná v duálnom priestore X'. ∎

Poznámka 27

Nech X je separabilný normovaný lineárny priestor s normou $\|\cdot\|$ a X' jeho duálny priestor. V prednáškach o metrických priestoroch sme zaviedli pojem kompaktnosti, resp. prekompaktnosti podmnožín metrického priestoru. Keďže v súlade s Poznámkou 25 každá silno ohraničená množina $A \subseteq X'$ je vzhľadom na $*$-slabú topológiu v X' metrickým priestorom s metrikou definovanou v (161), môžeme uvažovať o tzv. $*$-slabej kompaktnosti, resp. $*$-slabej prekompaktnosti množiny A. Ohraničená množina $A \subseteq X'$ sa označuje ako $*$-slabo uzavretá v X', ak pre každú postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ $*$-slabo konvergentnú v X' jej $*$-slabá limita $f \in A$. Inými slovami, $*$-slabý uzáver množiny A v X' splýva s A. Ďalej, ohraničenú množinu $A \subseteq X'$ budeme nazývať $*$-slabo (spočítateľne) kompaktnú, ak každá jej nekonečná podmnožina obsahuje $*$-slabo konvergentnú postupnosť s limitou v A. Napokon, (silno) ohraničená množina $A \subseteq X'$ sa nazýva $*$-slabo prekompaktná, ak jej $*$-slabý uzáver v X' je $*$-slabo kompaktný. Pre $*$-slabú kompaktnosť (silno) ohraničených podmnožín duálneho priestoru X' separabilného priestoru X platia analogické vlastnosti ako v prípade "klasickej" kompaktnosti v metrických priestoroch. Obzvlášť, každá $*$-slabo kompaktná podmnožina $A \subseteq X'$ je $*$-slabo uzavretá a $*$-slabo ohraničená v duálnom priestore X'. Dodajme, že kompaktnosť, resp. prekompaktnosť podmnožín duálneho priestoru X' vzhľadom na metriku $\rho(f,g) := \|f-g\|$, $f,g \in X'$, sa niekedy označuje prívlastkom silná kompaktnosť, resp. silná prekompaktnosť.

Veta 23

Nech X je separabilný normovaný lineárny priestor, X' jeho duálny priestor a $A \subseteq X'$ (silno) ohraničená množina. Potom A je $*$-slabo prekompaktná množina.

Dôkaz Vety 23.

Tvrdenie je priamym dôsledkom Vety 22 a komentára v Poznámke 27. Označme symbolom $\overline{A}^*$ $*$-slabý uzáver množiny A v duálnom priestore X'. Potom množina $\overline{A}^*$ je (silne) ohraničená a $*$-slabo uzavretá v X'. Následne, podľa Vety 22, každá nekonečná podmnožina $B \subseteq \overline{A}^*$ obsahuje $*$-slabo konvergentnú postupnosť, ktorej limita patrí do $\overline{A}^*$. V zhode s Poznámkou 27 je teda množina $\overline{A}^*$ $*$-slabo kompaktná, a teda A je $*$-slabo prekompaktná množina. Dôkaz je úplný. ■

Dôsledok 5

Nech X je separabilný normovaný priestor a X' jeho duálny priestor. Potom každá ohraničená a $*$-slabo uzavretá množina $A \subseteq X'$ je $*$-slabo kompaktná.

Dôkaz Dôsledku 5.

Výsledok vyplýva z dôkazu Vety 23, nakoľko v tomto prípade platí $A = \overline{A}^*$. ■

Lema 4

Nech X je separabilný normovaný lineárny priestor, X' jeho duálny priestor a $B' \subseteq X'$ (silno) uzavretá guľa. Potom B' je $*$-slabo uzavretá množina v X'.

Dôkaz Lemy 4.

Je zrejmé, že bez ujmy na všeobecnosti stačí uvedenú vlastnosť dokázať iba pre uzavreté gule so stredom v nulovom funkcionále, t.j.,

$$B' := B'[0,r] = \{f \in X',\ \|f\| \leq r\}, \quad r \in (0,\infty), \tag{172}$$

kde $\|\cdot\|$ norma funkcionálu definovaná v (36). Zvoľme teda nejaké $r > 0$ a nech $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B'[0,r]$ je $*$-slabo konvergentná postupnosť funkcionálov s limitou $f \in X'$. Ukážeme, že funkcionál $f \in B'[0,r]$, t.j., že $\|f\| \leq r$. Podľa Definície 17 pre každý daný vektor $x \in X$ spĺňajúci $\|x\| \leq 1$ platí

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a teda} \quad \lim_{k\to\infty} |f_k(x)| = |f(x)|. \tag{173}$$

Ďalej, z (36) a (172) vyplýva, že $|f_k(x)| \leq \|f_k\| \leq r$ pre každý index $k \in \mathbb{N}$ a každé $x \in X$ s $\|x\| \leq 1$. Následne, využitím (173) dostávame nerovnosť $|f(x)| \leq r$ pre každé $x \in X$ s $\|x\| \leq 1$. To napokon podľa (36) znamená, že $\|f\| \leq r$, t.j., funkcionál $f \in B'[0,r]$. V súlade s Poznámkou 27 je teda (silno) uzavretá guľa $B'[0,r]$ i $*$-slabo uzavretá v duálnom priestore X'. ∎

Dôsledok 6 (Banachova–Alaogluova veta)

Nech X je separabilný normovaný lineárny priestor a X' jeho duálny priestor. Potom každá uzavretá guľa $B' \subseteq X'$ je $*$-slabo kompaktná množina.

Dôkaz Dôsledku 6.

Platnosť tvrdenia je založená na kombinácii výsledkov Dôsledku 5 a Lemy 4. Konkrétne, každá uzavretá guľa $B' \subseteq X'$ je zrejme (silne) ohraničená a podľa Lemy 4 i $*$-slabo uzavretá v duálnom priestore X'. Podľa Dôsledku 5 je potom B' $*$-slabo kompaktná množina a dôkaz je hotový. ■

Poznámka 28 (Eberleinova–Šmuljanova veta)

Pojem slabej a $*$-slabej konvergencie v normovaných a duálnych priestoroch má rozsiahle využitie v konkrétnych aplikáciach v mnohých oblastiach matematiky. Na záver tejto prednášky uvedieme jednu takúto aplikáciu týkajúcu sa charakterizácie vlastnosti reflexívnosti Banachových priestorov. Toto tvrdenie sa v literatúre označuje ako Eberleinova–Šmuljanova veta. Konkrétne, Banachov priestor X je reflexívny práve vtedy, keď z každej (silno) ohraničenej postupnosti v X je možné vybrať slabo konvergentnú podpostupnosť (v zmysle Definície 15).