M7180 Funkcionálna analýza II

Lineárne operátory

Peter Šepitka

zima 2021

Obsah

Obsah

Pojem lineárny operátor

Nech X a Y sú dané lineárne priestory nad telesom komplexných čísiel $\mathbb{C}$.

Definícia 1 (Lineárny operátor medzi vektorovými priestormi)

Ľubovoľné zobrazenie $T : X \to Y$ nazývame operátorom na priestore X (zobrazujúcim do priestoru Y). Ak zobrazenie T je lineárne, t.j., platí

$$T(x+y) = T(x) + T(y), \quad T(\lambda x) = \lambda T(x) \quad \text{pre každé } x, y \in X \text{ a } \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

hovoríme o lineárnom operátore na priestore X.

V prípade hodnôt operátorov na lineárnych priestoroch budeme často používat namiesto označenia $T(x)$, $x \in X$, štandardný symbol Tx.

Príklad 1 (Identický operátor)

Nech $Y = X$. Potom operátor $I : X \to X$ daný predpisom $Ix := x$, $x \in X$, je zrejme lineárny. Nazývame ho identický (jednotkový) operátor na priestore X.

Príklad 2 (Projektor do podpriestoru)

Nech $X = H$ je Hilbertov priestor a $Y = A$ je jeho uzavretý podpriestor. Z vety o projekcii vieme, že platí rovnosť $H = A \oplus A^\perp$, kde $A^\perp$ je ortogonálny doplnok podpriestoru A v H. Inými slovami, každý vektor $x \in H$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $x = y + z$, kde $y \in A$ a $z \in A^\perp$. Uvažujme operátor $P_A : H \to A$ daný predpisom $P_A x := y$, $x \in H$. Z jednoznačnosti rozkladu každého vektora $x \in H$ vyplýva, že P_A je lineárny operátor. Štandardne sa označuje ako operátor ortogonálnej projekcie, resp. (ortogonálny) projektor do podpriestoru A.

Príklad 3 (Diferenciálny a integrálny operátor)

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Lineárny operátor $D : \mathcal{C}^1[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ daný predpisom

$$Df(\cdot) := f'(\cdot), \quad f \in \mathcal{C}^1[a,b], \tag{2}$$

sa nazýva diferenciálny operátor. Podobne pre funkciu $k \in \mathcal{C}([a,b] \times [a,b])$ sa lineárny operátor $K : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ daný predpisom

$$Kf(\cdot) := \int_a^b k(\cdot, s)\, f(s)\, \mathrm{d}s, \quad f \in \mathcal{C}[a,b], \tag{3}$$

označuje ako integrálny operátor.

Ohraničenosť a spojitosť lineárneho operátora

Nech X a Y sú dané normované lineárne priestory nad $\mathbb{C}$.

Definícia 2 (Ohraničenosť lineárneho operátora)

Operátor $T : X \to Y$ sa nazýva ohraničený, ak každú ohraničenú množinu v priestore X zobrazuje na ohraničenú množinu v priestore Y.

Veta 1

Nech $T : X \to Y$ je lineárny operátor. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Operátor T je ohraničený.*

(ii) *Operátor T je ohraničený na nejakom okolí bodu 0.*

(iii) *Operátor T je spojitý na priestore X.*

(iv) *Operátor T je spojitý v nejakom bode priestoru X (typicky v bode 0).*

Množina všetkých spojitých (ohraničených) lineárnych operátorov $L : X \to Y$ sa štandardne označuje symbolom $\mathcal{L}(X, Y)$. V prípade $X = Y$ budeme používať skrátené označenie $\mathcal{L}(X)$.

Lema 1

Nech $L : X \to Y$ je daný lineárny operátor. Potom $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ práve vtedy, keď existuje kladné reálne číslo c_L s vlastnosťou

$$\|Lx\|_Y \le c_L \|x\|_X \quad \textit{pre každé } x \in X. \tag{4}$$

Dôkaz Lemy 1.

Zrejme v (4) stačí uvažovať iba nenulové vektory $x \in X$. Nech $L \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pre každé $x \in X \setminus \{0\}$ je vektor $\bar{x} := x/\|x\|_X$ prvkom jednotkovej sféry $S(0, 1)$ v X. Množina $S(0, 1)$ je ohraničená v X, a preto v súlade s Definíciou 2 i jej obraz $L(S(0, 1))$ je množina ohraničená v Y. Existuje preto kladné reálne číslo c_L s vlastnosťou $\|Ly\|_Y \le c_L$ pre každé $y \in S(0, 1)$. Potom pre každý vektor $x \in X \setminus \{0\}$ platí

$$\|Lx\|_Y = \|L(\|x\|_X \bar{x})\|_Y = \|x\|_X \|L\bar{x}\|_Y \le c_L \|x\|_X,$$

t.j., platí nerovnosť (4). Naopak, nech je splnená nerovnosť (4) a nech A je nejaká ohraničená množina v X, t.j., existuje kladné reálne číslo r s vlastnosťou $\|x\|_X \le r$ pre každé $r \in A$. Potom pre každý vektor $x \in A$ platí

$$\|Lx\|_Y \le c_L \|x\|_X \le c_L r,$$

t.j., obraz $L(A)$ je ohraničený v Y. Podľa Definície 2 je operátor L ohraničený, teda $L \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dôkaz je hotový. ■

Norma lineárneho operátora

Definícia 3 (Norma lineárneho operátora)

Nech X, Y sú normované priestory a $L : X \to Y$ spojitý lineárny operátor. Číslo

$$\inf \{c_L \in \mathbb{R}, \quad \|Lx\|_Y \leq c_L \|x\|_X \text{ pre každé } x \in X\} \tag{5}$$

sa nazýva norma lineárneho operátora L a označuje sa symbolom $\|L\|$.

Poznámka 1

V kontexte Lemy 1 je hodnota v (5) korektne definovaná pre každý spojitý lineárny operátor, keďže množina čísiel c_L je neprázdna a $c_L \geq 0$. Naviac, nie je ťažké si uvedomiť, že normu $\|L\|$ v (5) možno ekvivalentne vyjadriť v tvaroch

$$\|L\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X,\ \|x\|_X \leq 1} \|Lx\|_Y = \sup_{x \in X,\ \|x\|_X = 1} \|Lx\|_Y. \tag{6}$$

Obzvlášť, z prvej formuly v (6) vyplýva nerovnosť

$$\|Lx\|_Y \leq \|L\| \cdot \|x\|_X \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{7}$$

Veta 2

Nech X, Y sú normované lineárne priestory. Množina $\mathcal{L}(X, Y)$ je normovaný lineárny priestor s normou definovanou v (5) a platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Ak priestor Y je Banachov, potom i $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachov priestor.*

(ii) *Ak priestor X je konečnorozmerný, potom každý lineárny operátor $L : X \to Y$ je spojitý (ohraničený).*

Veta 3

Nech X, Y, Z sú normované lineárne priestory a nech $L : X \to Y$, $K : Y \to Z$ sú spojité lineárne operátory. Potom zložený operátor $K \circ L : X \to Z$ je spojitý a lineárny a platí nerovnosť $\|K \circ L\| \leq \|K\|\,\|L\|$.

Dôkaz Vety 3.

Spojitosť a linearita zloženého operátora $K \circ L$ je zrejmá. Naviac, pre ľubovoľný vektor $x \in X \setminus \{0\}$ postupne platí

$$\|(K \circ L)x\|_Z = \|K(Lx)\|_Z \leq \|K\|\,\|Lx\|_Y \leq \|K\|\,\|L\| \cdot \|x\|_X .$$

V súlade s (6) napokon dostávame nerovnosť $\|K \circ L\| \leq \|K\|\,\|L\|$. ∎

Veta 4

Nech X je normovaný lineárny priestor, $A \subseteq X$ je podpriestor hustý v X a Y je Banachov priestor. Nech $K : A \to Y$ je spojitý lineárny operátor. Potom existuje jediný spojitý lineárny operátor $L : X \to Y$ taký, že

$$L|_A = K \quad \text{a} \quad \|L\|_X = \|K\|_A. \tag{8}$$

Dôkaz Vety 4.

Podľa predpokladov vety platí $\bar{A} = X$. To znamená, že pre každé $x \in X \setminus A$ existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ taká, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ v norme priestoru X. Odpovedajúca postupnosť $\{Kx_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ je cauchyovská v Y, keďže

$$\|Kx_m - Kx_n\|_Y = \|K(\underbrace{x_m - x_n}_{\in A})\|_Y \leq \|K\|_A \cdot \|x_m - x_n\|_X \quad \text{pre každé } m, n \in \mathbb{N}.$$

Vďaka úplnosti priestoru Y je postupnosť $\{Kx_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná v Y. Tento fakt nám umožnuje definovať nový operátor L na celom priestore X, konkrétne

$$Lx := \begin{cases} Kx, & x \in A, \\ \lim_{n\to\infty} Kx_n, & x \in X \setminus A, \end{cases} \tag{9}$$

kde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ je nejaká postupnosť vyššie, ktorá odpovedá danému prvku $x \in X \setminus A$. Operátor L v (9) je koretne definovaný a je rozšírením operátora K

Dôkaz Vety 4 (pokračovanie).

na celé X. Nie je ťažké si premyslieť, že operátor L je lineárny. Dokážeme, že

$$\|Lx\|_Y \leq \|K\|_A \cdot \|x\|_X \quad \text{pre každé } x \in X. \tag{10}$$

Pre vektory $x \in A$ nerovnosť (10) triviálne vyplýva z (9) a (7) (pre $X := A$) a z toho, že $\|x\|_A = \|x\|_X$. Nech $x \in X \setminus A$ a nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ je odpovedajúca postupnosť s $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ v norme priestoru X. Potom

$$\begin{aligned}\|Lx\|_Y &\overset{(9)}{=} \Big\|\lim_{n\to\infty} Kx_n\Big\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|Kx_n\|_Y \\ &\overset{(7)}{\leq} \lim_{n\to\infty} (\|K\|_A \cdot \|x_n\|_A) = \|K\|_A \cdot \|x\|_A = \|K\|_A \cdot \|x\|_X .\end{aligned}$$

Nerovnosť (10) dokazuje jednak spojitosť operátora L na X, a jednak odhad $\|L\|_X \leq \|K\|_A$. Opačný odhad $\|L\|_X \geq \|K\|_A$ platí triviálne. ■

Poznámka 2

Výsledok Vety 4 ukazuje, že každý spojitý lineárny operátor s definičným oborom hustým v podkladovom priestore, ktorý zobrazuje do Banachovho priestoru, je možné spojito rozšíriť na celý podkladový priestor so zachovaním jeho normy.

Príklad 4

Na priestore $X = \mathcal{C}[-1,1]$ s maximálnou normou $\|\cdot\|_C$ uvažujme funkcionál

$$Lf := 9f(-1) - 2f(0) + f(1/4), \quad f \in \mathcal{C}[-1,1].$$

Jedná sa zrejme o lineárny funkcionál. Naviac, pre každé $f \in X$ platí

$$|Lf| = |9f(-1) - 2f(0) + f(1/4)| \leq 9|f(-1)| + 2|f(0)| + |f(1/4)| \leq 12\|f\|_C,$$

čo dokazuje ohraničenosť, a teda i spojitosť funkcionálu L. Nájdeme jeho normu. Z poslednej nerovnosti máme $\|L\| \leq 12$. Na druhej strane, iste existuje funkcia g, ktorá je spojitá na intervale $[-1,1]$ a spĺňa podmienky

$$g(-1) = g(1/4) = 1, \quad g(0) = -1, \quad \|g\|_C = 1.$$

Potom $|Lg| = 12 = 12\|g\|_C$, čo znamená, že $\|L\| \geq 12$. Preto norma $\|L\| = 12$.

Príklad 5

Na priestore $X = l^2$ uvažujme funkcionál L daný predpisom

$$Lx := x_1 + x_2, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2. \tag{11}$$

Linearita funkcionálu L je evidentná. Dokážeme jeho spojitosť na priestore X. Pre ľubovoľnú postupnosť $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ máme

Príklad 5

$$|Lx|^2 \overset{(11)}{=} |x_1 + x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1| \cdot |x_2| \leq 2\left(|x_1|^2 + |x_2|^2\right) \leq 2\|x\|^2,$$

a tak $|Lx| \leq \sqrt{2}\|x\|$. Lineárny funkcionál L je teda ohraničený a platí $\|L\| \leq \sqrt{2}$. Špeciálne, pre $x = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots\right\} \in X$ máme $\|x\| = 1$ a $|Lx| = \sqrt{2}$, a tak norma $\|L\| \geq \sqrt{2}$. Môžeme preto uzavrieť, že $\|L\| = \sqrt{2}$.
Poznamenajme, že iné riešenie danej úlohy je založené na pozorovaní, že X je Hilbertov priestor. Podľa Fréchetovej–Riezsovej reprezentačnej vety má každý spojitý lineárny funkcionál $f \in X$ tvar $f(x) = \langle x, x_f \rangle$, $x \in X$, kde vektor $x_f \in X$ je pre dané f určený jednoznačne. Naviac platí $\|f\| = \|x_f\|$. V našom prípade sa pôsobenie funkcionálu L dá vyjadriť v tvare skalárneho súčinu. Konkrétne, v súlade s (11) máme reprezentáciu

$$Lx := \langle x, x_L \rangle \quad \text{pre každé } x \in X,$$

kde $x_L = \{1, 1, 0, 0, \dots\} \in X$. Funkcionál L je preto lineárny a spojitý a pre jeho normu platí $\|L\| = \|x_L\| = \sqrt{2}$.

Príklad 6 (Spojitosť diferenciálneho operátora)

Preskúmame spojitosť diferenciálneho operátora D definovaného v (2) vzhľadom na rôzne normy v podkladovom priestore $X = \mathcal{C}^1[a,b]$. Doplňme, že v cieľovom priestore $Y = \mathcal{C}[a,b]$ budeme uvažovať štandardnú maximálnu normu $\|\cdot\|_C$. Ak v priestore X pracujeme s normou $\|\cdot\|_C$, operátor D nie je spojitý. Vyplýva to z pozorovania, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ definovaná predpisom

$$f_n(t) := \frac{\sin nt}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [a,b], \tag{12}$$

spĺňa $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$, ale postupnosť obrazov

$$Df_n(t) = \cos nt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [a,b], \tag{13}$$

nemá v priestore Y limitu (vzhľadom na normu $\|\cdot\|_C$). Ak však v priestore X uvažujeme normu

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_C + \|f'\|_C, \quad f \in \mathcal{C}^1[a,b], \tag{14}$$

potom je diferenciálny operátor D spojitý. Pre každú funkciu $f \in X$ totiž platí

$$\|Df\|_C = \|f'\|_C \le \|f\|_C + \|f'\|_C = \|f\|_{C^1},$$

t.j., operátor D je ohraničený. Naviac, norma $\|D\| \le 1$. Uvážiac postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ z (12) ďalej máme

Príklad 6 (Spojitosť diferenciálneho operátora)

$$\|f_n\|_{C^1} \overset{(12),(14)}{=} \frac{1}{n} + 1, \quad \|Df_n\|_C \overset{(13)}{=} 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Následne, v súlade s Poznámkou 1, norma $\|D\|$ spĺňa

$$\|D\| \overset{(6)}{\geq} \frac{\|Df_n\|_C}{\|f_n\|_{C^1}} \overset{(15)}{=} \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Limitovaním poslednej nerovnosti pre $n \to \infty$ dostávame $\|D\| \geq 1$. Celkovo teda pre normu diferenciálneho operátora D platí $\|D\| = 1$.

Príklad 7 (Spojitosť integrálneho operátora)

Preskúmame teraz spojitosť integrálneho operátora K definovaného predpisom v (3) vzhľadom na rôzne normy v podkladovom/cieľovom priestore $X = Y = \mathcal{C}[a,b]$. V oboch priestoroch uvažujme najprv maximálnu normu $\|\cdot\|_C$. V tomto prípade je operátor K spojitý, ako dokazujú nasledujúce výpočty

$$\|Kf\|_C \overset{(3)}{=} \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b k(t,s)\, f(s)\, \mathrm{d}s \right| \leq \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\, |f(s)|\, \mathrm{d}s$$

$$\leq \max_{t\in[a,b]} \left[\int_a^b |k(t,s)|\, \mathrm{d}s \cdot \|f\|_C \right] = \|f\|_C \cdot \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\, \mathrm{d}s,$$

Príklad 7 (Spojitosť integrálneho operátora)

ktoré platia pre každú funkciu $f \in X$. Obzvlášť máme odhad

$$\|K\| \leq \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,\mathrm{d}s.$$

Využitím Luzinovej vety z teórie miery sa dá dokonca ukázať, že platí rovnosť

$$\|K\| = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,\mathrm{d}s. \tag{16}$$

Uvažujem teraz v priestore X normu

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(s)|^2\,\mathrm{d}s}, \quad f \in \mathcal{C}[a,b], \tag{17}$$

a v priestore Y normu $\|\cdot\|_C$. Norma $\|\cdot\|$ v (17) pochádza zo skalárneho súčinu zavedeného v Hilbertovom priestore $\mathcal{L}^2[a,b] \supseteq \mathcal{C}[a,b]$. Môžeme preto využiť Cauchyho–Schwarzovu–Buňakovského nerovnosť. Konkrétne, pre každú funkciu $f \in X$ postupne máme

$$\|Kf\|_C \overset{(3)}{=} \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^b k(t,s)\,f(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq \max_{t\in[a,b]} \sqrt{\int_a^b |k(t,s)|^2\,\mathrm{d}s} \cdot \sqrt{\int_a^b |f(s)|^2\,\mathrm{d}s}$$

Príklad 7 (Spojitosť integrálneho operátora)

$$= \sqrt{\int_a^b |f(s)|^2 \, \mathrm{d}s} \cdot \max_{t\in[a,b]} \sqrt{\int_a^b |k(t,s)|^2 \, \mathrm{d}s} = \|f\| \cdot \max_{t\in[a,b]} \sqrt{\int_a^b |k(t,s)|^2 \, \mathrm{d}s}.$$

Integrálny operátor K je teda i v tomto prípade spojitý.

Príklad 8

Nech X je priestor funkcií lebesgueovsky integrovateľných a ohraničených na intervale $[a,b]$ so suprémovou normou $\|\cdot\|_B$ a priestor $Y = \mathcal{C}[a,b]$ s normou $\|\cdot\|_C$. Uvažujme operátor

$$L : f(t) \mapsto \int_a^t f(s) \, \mathrm{d}s, \quad f \in X. \tag{18}$$

Zobrazenie L je lineárne a pre každú funkciu $f \in X$ platí

$$\|Lf\|_C \overset{(18)}{=} \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t f(s) \, \mathrm{d}s \right| \le \max_{t\in[a,b]} \int_a^t |f(s)| \, \mathrm{d}s = \int_a^b |f(s)| \, \mathrm{d}s \le (b-a) \, \|f\|_B.$$

Operátor L v (18) je preto spojitý a $\|L\| \le b-a$. Pre funkciu $f \equiv 1$ na $[a,b]$ naviac máme $\|f\|_B = 1$ a $\|Lf\|_C = b-a$, a tak norma $\|L\| = b-a$.

Princíp rovnomernej ohraničenosti

Veta 5 (Banachova–Steinhausova, princíp rovnomernej ohraničenosti)

Nech X a Y sú Banachove priestory a nech $A \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ je systém spojitých lineárnych operátorov s vlastnosťou

$$\text{pre každé } x \in X \text{ je súbor } \{Lx,\ L \in A\} \subseteq Y \text{ ohraničený v norme priestoru } Y. \tag{19}$$

Potom systém A je rovnomerne ohraničený, t.j., v norme priestoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Inými slovami, existuje konštanta $K > 0$ taká, že

$$\|L\| \leq K \quad \text{pre každé } L \in A. \tag{20}$$

Poznámka 3

Tvrdenie Vety 5 možno formálne zapísať v tvare

$$\text{ak pre každé } x \in X \text{ je } \sup_{L \in A} \|Lx\|_Y < \infty, \text{ potom } \sup_{L \in A} \|L\| < \infty. \tag{21}$$

V niektorej literatúre sa princíp rovnomernej ohraničenosti formuluje pre postupnosti operátorov z $\mathcal{L}(X,Y)$, t.j., systém $A = \{L_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$. Nie je ťažké si premyslieť, že takáto formulácia je ekvivalentná s tvrdením Vety 5.

Slabá konvergencia postupnosti operátorov

Definícia 4 (Slabá/bodová konvergencia v priestore operátorov)

Nech X a Y sú normované priestory. Hovoríme, že postupnosť operátorov $\{L_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ slabo (bodovo) konverguje k operátoru $L : X \to Y$, ak pre každé $x \in X$ je postupnosť $\{L_n x\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ konvergentná v norme priestoru Y s limitou $Lx \in Y$. Operátor L sa nazýva slabou (bodovou) limitou postupnosti $\{L_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ a píšeme $L_n \rightharpoonup L$ pre $n \to \infty$.

Poznámka 4

Konvergencia v norme $\|\cdot\|$ priestoru $\mathcal{L}(X,Y)$ sa v kontexte Definície 4 niekedy označuje prívlastkom silná. Platí, že každá silno konvergentná postupnosť $\{L_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ so (silnou) limitou $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ je zároveň i slabo konvergentná s rovnakou (slabou) limitou L. Táto skutočnosť je dôsledkom linearity a spojitosti operátorov v $\mathcal{L}(X,Y)$. Konkrétne, vyplýva to z nerovnosti

$$\|L_n x - Lx\|_Y \leq \|L_n - L\| \cdot \|x\|_X \quad \text{pre každý vektor } x \in X,$$

viz nerovnosť (7). Opačné tvrdenie však neplatí, t.j., slabá konvergencia vo všeobecnosti neimplikuje (silnú) konvergenciu v norme, pozri Príklad 9.

Príklad 9

Nech H je nekonečnorozmerný separabilný Hilbertov priestor a $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ nejaká jeho pevne zvolená ortonormálna báza. Definujme postupnosť operátorov $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ z H do H predpisom

$$L_n x := \sum_{k=1}^{n} c_k u_k, \quad x \in H, \quad n \in \mathbb{H}, \tag{22}$$

kde $c_k := \langle x, u_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, sú Fourierove koeficienty vektora x vzhľadom na ortnonormálnu bázu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z teórie Fourierových radov vieme, že pre každý vektor $x \in X$ platí $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ v norme priestoru H (indukovanú príslušným skalárnym súčinom). Preto pre daný index $n \in \mathbb{N}$ je L_n operátor ortogonálnej projekcie do (uzavretého) podpriestoru $\operatorname{Lin}\{u_1, \ldots, u_n\}$ (pozri Príklad 2). Každý z operátorov L_n, $n \in \mathbb{N}$, je lineárny a ohraničený, nakoľko máme

$$\|L_n x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |c_k u_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k u_k|^2} = \|x\|, \quad x \in H.$$

Keďže podľa (22) pre každý vektor $x \in H$ platí $\lim_{n\to\infty} L_n x = x$, postupnosť $\{L_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(H)$ konverguje slabo k identickému operátoru, t.j., $L_n \rightharpoonup I$ pre $n \to \infty$. Na druhej strane však postupnosť $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je konvergentná v norme priestoru $\mathcal{L}(H)$. Presnejšie, nie je ani cauchyovská v norme, nakoľko platí

Príklad 9

$$\|(L_n - L_{n+k})\, u_{n+1}\| = \|L_n u_{n+1} - L_{n+k} u_{n+1}\| \overset{(22)}{=} \|u_{n+1}\| = 1$$

$$\Downarrow (6) \Downarrow$$

$$\|L_n - L_{n+k}\| \geq 1 \quad \text{pre každé } n, k \in \mathbb{N}.$$

Veta 6

Nech X a Y sú Banachove priestory a $\{L_n\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ je daná postupnosť operátorov. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Postupnosť $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ má najviac jednu slabú limitu $L : X \to Y$.*

(ii) *Ak $L_n \rightharpoonup L$ pre $n \to \infty$, kde $L : X \to Y$, potom každá vybraná podpostupnosť $\{L_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je slabo konvergentná s rovnakou limitou L.*

(iii) *Ak $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ je slabo konvergentná s limitou $L : X \to Y$, potom je (silno) ohraničená v $\mathcal{L}(X, Y)$ a operátor $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, t.j., je ohraničený.*

Druhá časť tvrdenia (iii) vo Vete 6 hovorí, že priestor $\mathcal{L}(X, Y)$ všetkých spojitých lineárnych operátorov je uzavretý v priestore všetkých lineárnych (vo všeobecnosti i nespojitých) operátorov $L : X \to Y$ vzhľadom na topológiu generovanú pomocou slabej konvergencie operátorov.

Veta 7

Nech X a Y sú Banachove priestory. Postupnosť $\{L_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}(X,Y)$ je slabo konvergentná v $\mathcal{L}(X,Y)$ s limitou $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ práve vtedy, keď je (silno) ohraničená v $\mathcal{L}(X,Y)$ a existuje množina $A \subseteq X$ s vlastnosťami

$$\overline{\mathrm{Lin}\, A} = X \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} L_n x = Lx \quad \text{pre každý vektor } x \in A. \tag{23}$$

Veta 8

Nech X a Y sú normované lineárne priestory a $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ je daný operátor. Ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ konverguje v X slabo s limitou $x \in X$, t.j., $x_n \rightharpoonup x$ pre $n \to \infty$, potom postupnosť $\{Lx_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ konverguje v Y slabo s limitou $Lx \in Y$, t.j., $Lx_n \rightharpoonup Lx$ pre $n \to \infty$.

Dôkaz Vety 8.

Ak $f \in Y'$, potom zložené zobrazenie $f \circ L \in X'$. Následne, predpoklad, že $x_n \rightharpoonup x$, implikuje $[f \circ L](x_n) \to [f \circ L](x)$, čo znamená $f(Lx_n) \to f(Lx)$. Keďže spojitý lineárny funkcionál f bol zvolený ľubovoľne, platí $Lx_n \rightharpoonup Lx$. ∎

Obsah

Inverzný operátor

Definícia 5 (Invertovateľnosť operátora)

Nech X a Y sú lineárne priestory a $L : X \to Y$ je operátor. Hovoríme, že operátor L je invertovateľný, ak zobrazenie L je injektívne.

Poznámka 5 (Inverzný operátor)

Označme symbolom $\mathcal{R}(L)$ obor hodnôt operátora L, t.j.,

$$\mathcal{R}(L) := \{y \in Y, \text{ existuje } x \in X \text{ také, že } y = Lx\}. \tag{24}$$

Ak operátor L je invertovateľný, potom zobrazenie $L : X \to \mathcal{R}(L)$ je zrejme bijekcia. Odpovedajúce inverzné zobrazenie $\mathcal{R}(L) \to X$ nazývame inverzným operátorom (inverziou) k operátoru L a označujeme ho L^{-1}. Nie je ťažké overiť, že ak L je lineárny operátor, potom $\mathcal{R}(L)$ v (24) je lineárny podpriestor v Y.

Veta 9

Nech X a Y sú lineárne priestory a $L : X \to Y$ je invertovateľný lineárny operátor. Potom jeho inverzia $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X$ je tiež lineárny operátor.

Dôkaz Vety 9.

Zvoľme vektory $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(L)$ a označme (jediné) vektory $x_1, x_2 \in X$ s vlastnosťou $Lx_1 = y_1$ a $Lx_2 = y_2$. V súlade s Poznámkou 5 pre každú dvojicu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ platí $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathcal{R}(L)$ a vďaka linearite operátora L máme $L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. Následne podľa Definície 5 platí

$$x_1 = L^{-1} y_1, \quad x_2 = L^{-1} y_2, \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = L^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2),$$

a tak $L^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L^{-1} y_1 + \alpha_2 L^{-1} y_2$. Operátor L^{-1} je lineárny. ■

Lema 2

Nech Y je Banachov priestor a $M \subseteq Y$ je množina hustá v Y. Potom pre každý prvok $y \in Y$ existuje postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ s vlastnosťou

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \qquad \|y_n\| \leq \frac{3}{2^n}\,\|y\|, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Dôkaz Lemy 2.

Pre daný pevný vektor $y \in Y$ zostrojíme odpovedajúcu postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ induktívne. Keďže množina M je hustá v Y, existuje $y_1 \in M$ s vlastnosťou

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

$$\|y - y_1\| \leq \frac{1}{2}\,\|y\|.$$

Predpokladajme, že pre daný index $k \in \mathbb{N}$ máme zostrojených prvých k členov postupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$. Potom iste existuje vektor $y_{k+1} \in M$ spĺňajúci

$$\left\| \left(y - \sum_{n=1}^{k} y_n \right) - y_{k+1} \right\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}\,\|y\|.$$

Takto zostrojená postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ má teda vlastnosť

$$\left\| y - \sum_{n=1}^{k} y_n \right\| \leq \frac{1}{2^k}\,\|y\| \quad \text{pre každý index } k \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Z (26) ihneď vyplýva prvá rovnosť v (25). Okrem toho, pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\|y_k\| = \left\| \left(y - \sum_{n=1}^{k-1} y_n \right) - \left(y - \sum_{n=1}^{k} y_n \right) \right\| \leq \left\| y - \sum_{n=1}^{k-1} y_n \right\| + \left\| y - \sum_{n=1}^{k} y_n \right\|$$

$$\overset{(26)}{\leq} \frac{1}{2^{k-1}}\,\|y\| + \frac{1}{2^k}\,\|y\| = \frac{3}{2^k}\,\|y\|.$$

Postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ teda spĺňa i druhú vlastnosť v (25) a dôkaz je hotový. ∎

Veta 10 (Banachova veta o inverznom operátore)

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je bijektívny spojitý lineárny operátor. Potom L je invertovateľný operátor a jeho inverzia $L^{-1} : Y \to X$ je spojitý lineárny operátor.

Dôkaz Vety 10.

Skutočnosť, že operátor L je invertovateľný a jeho inverzia L^{-1} je lineárna a definovaná na celom priestore Y, vyplýva z Definície 5 a Vety 9. Ukážeme, že inverzný operátor je ohraničený. Uvažujme systém množín

$$M_k := \{y \in Y, \quad \|L^{-1}y\|_X \leq k\,\|y\|_Y\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Dokážeme, že

existuje množina M_n hustá v istom otvorenom medziguli v Y so stredom v 0.

Zrejme $Y = \cup_{k\in\mathbb{N}} M_k$. Nakoľko priestor Y je úplný, podľa Bairovej vety je aspoň jedna z množín M_k, $k \in \mathbb{N}$, hustá v nejakej otvorenej guli $B(\tilde{y}, r) \subseteq Y$. Označme index príslušnej množiny symbolom l a nech vektor $\tilde{y} \in M_{\tilde{k}}$. Nech $B(\tilde{y}, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 \leq r$, je ľubovoľné otvorené medzigulie v $B(\tilde{y}, r)$. Je zrejmé, že množina $M_l \cap B(\tilde{y}, r_1, r_2)$ je hustá v medziguli $B(\tilde{y}, r_1, r_2)$. Množina

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

$$P = M_l \cap B(\tilde{y}, r_1, r_2) - \tilde{y} := \{z \in Y, \quad z = y - \tilde{y}, \quad y \in M_l \cap B(\tilde{y}, r_1, r_2)\} \tag{28}$$

je potom hustá v medziguli $B(0, r_1, r_2)$. Zaveďme označenie

$$m := \max\{l, \tilde{k}\}, \qquad n := 1 + \left\lfloor m\left(1 + \frac{2\,\|\tilde{y}\|_Y}{r_1}\right)\right\rfloor. \tag{29}$$

Potom množina $P \subseteq M_n$. Skutočne, pre každý vektor $z \in P$ totiž platí

$$\|L^{-1}z\|_X \overset{(28)}{=} \|L^{-1}(y - \tilde{y})\|_X = \|L^{-1}y - L^{-1}\tilde{y}\|_X \leq \|L^{-1}y\|_X + \|L^{-1}\tilde{y}\|_X$$

$$\overset{(28),(27)}{=} l\,\|y\|_Y + \tilde{k}\,\|\tilde{y}\|_Y \overset{(29)}{\leq} m\,(\|y\|_Y + \|\tilde{y}\|_Y) \overset{(28)}{=} m\,(\|z + \tilde{y}\|_Y + \|\tilde{y}\|_Y)$$

$$\leq m\,(\|z\|_Y + 2\,\|\tilde{y}\|_Y) = m\,\|z\|_Y\left(1 + \frac{2\,\|\tilde{y}\|_Y}{\|z\|_Y}\right)$$

$$\overset{(28)}{<} m\,\|z\|_Y\left(1 + \frac{2\,\|\tilde{y}\|_Y}{r_1}\right) \overset{(29)}{<} n\,\|z\|_Y.$$

A tak množina M_n s indexom v (29) je hustá v medziguli $B(0, r_1, r_2)$. V ďalšom kroku dokážeme, že

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

získaná množina M_n je hustá v celom priestore Y.

Zvoľme nejaký nenulový vektor $y \in Y$. Zrejme existuje kladné reálne číslo α také, že vektor $\alpha\, y \in B(0, r_1, r_2)$. Keďže množina M_n je hustá v medziguli $B(0, r_1, r_2)$, existuje postupnosť $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M_n$ s vlastnosťou $\lim_{k\to\infty} z_k = \alpha\, y$. Následne máme $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha}\, z_k = y$. A nakoľko podľa (27) i postupnosť $\{\frac{1}{\alpha}\, z_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M_n$, vektor y sa dá s ľubovoľnou presnosťou aproximovať prvkami z M_n. To znamená, že množina M_n je hustá v $Y \setminus \{0\}$, a teda aj v celom priestore Y. Napokon ukážeme, že

operátor L^{-1} spĺňa nerovnosť $\|L^{-1}y\|_X \le 3n\, \|y\|_Y$ pre každé $y \in Y$.

Využijeme Lemu 2 s $M := M_n$. Zvoľme vektor $y \in Y$ a nech $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M_n$ je odpovedajúca postupnosť v (25). Nech $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je jej obraz v zobrazení L^{-1}, t.j., $x_k := L^{-1}y_k$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Platí

$$\|x_k\|_X = \|L^{-1}y_k\|_X \overset{(27)}{\le} n\, \|y_k\|_Y \overset{(25)}{\le} \frac{3n}{2^k}\, \|y\|_Y\,, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Z nerovností (30) vyplýva, že nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ je absolútne konvergentný v Banachovom priestore X, nakoľko

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_X \overset{(30)}{\le} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3n}{2^k}\, \|y\|_Y = 3n\, \|y\|_Y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3n\, \|y\|_Y\,. \tag{31}$$

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

Označme symbolom x súčet tohto radu, t.j., $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Využijúc (31) získame pre normu $\|x\|_X$ odhad

$$\|x\|_X \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_X \overset{(31)}{\leq} 3n \|y\|_Y . \tag{32}$$

Keďže operátor L je spojitý a lineárny, platí

$$Lx = L\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} Lx_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \overset{(25)}{=} y, \quad \text{a teda } x = L^{-1}y. \tag{33}$$

Napokon dostávame

$$\|L^{-1}y\|_X \overset{(33)}{=} \|x\|_X \overset{(32)}{\leq} 3n \|y\|_Y .$$

Lineárny operátor L^{-1} je teda ohraničený. Dôkaz je teraz kompletný. ∎

Pre Banachove priestory X, Y budeme symbolom $\tilde{\mathcal{L}}(X,Y)$ označovať množinu všetkých bijektívnych spojitých lineárnych operátorov $L : X \to Y$. Zrejme platí inklúzia $\tilde{\mathcal{L}}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$.

Veta 11

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je bijektívny spojitý lineárny operátor. Potom pre každý spojitý lineárny operátor $K : X \to Y$ spĺňajúci

$$\|K\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|} \tag{34}$$

je operátor $L + K \in \tilde{\mathcal{L}}(X, Y)$, t.j., bijektívny spojitý lineárny.

Dôkaz Vety 11.

Nech $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ je operátor spĺňajúci (34) a označme $L_0 := K + L$. Zrejme $L_0 : X \to Y$ je spojitý a lineárny operátor. Dokážeme jeho bijektívnosť. Zvoľme vektor $y \in Y$ a uvažujme zobrazenie $T_y : X \to X$ definované predpisom

$$T_y x = L^{-1}(y - Kx), \quad x \in X. \tag{35}$$

Vďaka podmienke (34) je zobrazenie T_y v (35) kontraktívne na priestore X. Skutočne, pre každú dvojicu vektorov $x_1, x_2 \in X$ platí

$$\|T_y x_1 - T_y x_2\|_X \overset{(35)}{=} \|L^{-1}(y - Kx_1) - L^{-1}(y - Kx_2)\|_X = \|L^{-1} \circ K(x_1 - x_2)\|_X$$

$$\overset{(7)}{\leq} \|L^{-1} \circ K\| \cdot \|x_1 - x_2\|_X \overset{\text{Veta 3}}{\leq} \|L^{-1}\| \, \|K\| \cdot \|x_1 - x_2\|_X,$$

Dôkaz Vety 11 (pokračovanie).

pričom v súlade s (34) je konštanta $\|L^{-1}\|\,\|K\| < 1$. A keďže priestor X je úplný, podľa Banachovej vety o pevnom bode má zobrazenie T_y práve jeden pevný bod v X. Označme ho symbolom x_y. Pre vektor x_y teda platí

$$T_y x_y = x_y \quad \Leftrightarrow \quad L^{-1}(y - Kx_y) = x_y \quad \Leftrightarrow \quad y = (K + L)x_y = L_0 x_y.$$

Uvedené ekvivalencie ukazujú, že zvolený vektor $y \in Y$ je obrazom jediného vektora $x_y \in X$ v zobrazení L_0. Operátor L_0 je teda bijektívny. ■

Poznámka 6

Významným dôsledkom Vety 11 je pozorovanie, že množina $\tilde{\mathcal{L}}(X, Y)$ bijektívnych spojitých lineárnych operátorov je otvorená v normovanom priestore $\mathcal{L}(X, Y)$ všetkých spojitých lineárnych operátorov. Pre každý prvok $L \in \tilde{\mathcal{L}}(X, Y)$ totiž

$$\text{každá otvorená guľa } B(L, r) \subseteq \mathcal{L}(X, Y) \text{ s polomerom } r \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|}$$

leží celá v množine $\tilde{\mathcal{L}}(X, Y)$. Je nutné poznamenať, že dôležitým predpokladom tohto výsledku je úplnosť normovaných priestorov X, Y.

Veta 12

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je spojitý lineárny operátor spĺňajúci $\|L\| < 1$. Potom spojitý lineárny operátor $I - L$ je bijektívny a jeho inverzný operátor $(I - L)^{-1}$ je možné vyjadriť v tvare tzv. Neumannovho radu

$$(I - L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L^n, \qquad \text{kde } L^n := \underbrace{L \circ L \circ \cdots \circ L}_{n\text{-krát}}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{36}$$

Dôkaz Vety 12.

Skutočnosť, že spojitý lineárny operátor $I - L$ je invertovateľný a bijektívny, je dôsledkom Vety 11 (s voľbou $L := I$ a $K := -L$). Dokážeme platnosť formuly (36). Podmienka $\|L\| < 1$ zaručuje, že nekonečný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} \|L\|^n$ je konvergentný. Keďže priestor X je úplný, podľa Vety 2(i) je úplný i priestor $\mathcal{L}(X)$. Preto nekonečný rad $\sum_{n=0}^{\infty} L^n$ absolútne konverguje v $\mathcal{L}(X)$, t.j., jeho súčtom je spojitý lineárny operátor na X. Pre každý index $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$(I - L) \sum_{k=0}^{n} L^k = \sum_{k=0}^{n} (I - L)\, L^k = I - L^{n+1},$$

$$\Downarrow$$

Dôkaz Vety 12 (pokračovanie).

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} L^k = (I-L)^{-1} - (I-L)^{-1}L^{n+1},$$

$$\Downarrow$$

$$(I-L)^{-1} - \sum_{k=0}^{n} L^k = (I-L)^{-1}L^{n+1},$$

$$\Downarrow$$

$$\left\| (I-L)^{-1} - \sum_{k=0}^{n} L^k \right\| = \|(I-L)^{-1}L^{n+1}\| \overset{\text{Veta 3}}{\leq} \|(I-L)^{-1}\| \, \|L\|^{n+1}. \tag{37}$$

Limitovaním poslednej nerovnosti pre $n \to \infty$ napokon dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (I-L)^{-1} - \sum_{k=0}^{n} L^k \right\| \overset{(37)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \|(I-L)^{-1}\| \, \|L\|^{n+1} = 0,$$

keďže $\|L\| < 1$. Platí teda formula v (36) a dôkaz je kompletný. ∎

Operátor ohraničený zdola

Definícia 6 (Lineárny operátor ohraničený zdola)

Nech X a Y sú normované lineárne priestory. Lineárny operátor $L : X \to Y$ sa označuje ako ohraničený zdola, ak existuje kladné reálne číslo c také, že

$$\|Lx\|_Y \geq c\,\|x\|_X \quad \text{pre každé } x \in X. \tag{38}$$

Veta 13

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je spojitý lineárny operátor. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Operátor L je ohraničený zdola.*

(ii) *Operátor L je injektívny a $\mathcal{R}(L) \subseteq Y$ je uzavretý podpriestor v Y.*

Dôkaz Vety 13.

Nech spojitý lineárny operátor L je ohraničený zdola, t.j., spĺňa nerovnosť (38). Potom zobrazenie L je nutne injektívne. Ukážeme, že podpriestor $\mathcal{R}(L)$ je uzavretý v Y. Nech $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}(L)$ je postupnosť konvergentná v priestore Y a označme $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť s vlastnosťou

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

$x_n := L^{-1}y_n$, $n \in \mathbb{N}$, kde L^{-1} je odpovedajúci (lineárny) inverzný operátor. V súlade s (38) pre každú dvojicu indexov $m, n \in \mathbb{N}$ máme

$$\|x_m - x_n\|_X \overset{(38)}{\leq} \frac{1}{c} \cdot \|L(x_m - x_n)\|_Y = \frac{1}{c} \cdot \|Lx_m - Lx_n\|_Y = \frac{1}{c} \cdot \|y_m - y_n\|_Y.$$

Posledná nerovnosť s ohľadom na to, že postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, implikuje, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, a teda tiež konvergentná, vďaka úplnosti priestoru X. Označme $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Využitím spojitosti operátora L postupne dostávame

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Lx_n = L\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = Lx,$$

t.j., vektor $y \in \mathcal{R}(L)$. Lineárny podpriestor je teda naozaj uzavretý v Y.
Naopak, predpokladajme, že operátor L spĺňa vlastnosti tvrdenia (ii), t.j., L je injektívne zobrazenie a podpriestor $\mathcal{R}(L)$ je uzavretý v Y. Z úplnosti priestoru Y potom vyplýva i úplnosť podpriestoru $\mathcal{R}(L)$. Zobrazenie $L : X \to \mathcal{R}(L) \subseteq Y$ je spojitá lineárna bijekcia. Podľa Banachovej vety o inverznom operátore (Veta 10) je potom inverzný operátor $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X$ spojitý a lineárny a podľa (7)

$$\|L^{-1}y\|_X \leq \|L^{-1}\| \cdot \|y\|_Y \quad \text{pre každé } y \in \mathcal{R}(L) \subseteq Y, \quad \|L^{-1}\| > 0. \tag{39}$$

Označiac $c := 1/\|L^{-1}\|$ pre každé $x \in X$ s $y = Lx$, t.j., $x = L^{-1}y$, v súlade s (39) potom máme $\|Lx\|_Y = \|y\|_Y \geq c \cdot \|L^{-1}y\|_X = c \cdot \|x\|_X$. Platí teda (i). ∎

Nasledujúce tvrdenie dopĺňa a zároveň i zovšeobecňuje Banachovu Vetu 10 o inverznom operátore aj pre spojité lineárne operátory $L : X \to Y$, ktoré nie sú nutne surjektívne.

Veta 14

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je spojitý lineárny operátor. Potom L je invertovateľný operátor so spojitou inverziou $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X$ práve vtedy, keď L je ohraničený zdola, t.j., spĺňa nerovnosť (38).

Dôkaz Vety 14.

Ak spojitý lineárny operátor $L : X \to Y$ má spojitú inverziu $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X$, je nutne injektívny a spĺňa nerovnosť (39) v dôkaze Vety 13. Následne, podľa záveru posledného odstavca tohto dôkazu, je potom operátor L ohraničený zdola. Naopak, ak spojitý lineárny operátor $L : X \to Y$ je ohraničený zdola, t.j., spĺňa nerovnosť (38), potom v súlade s Vetou 13 je injektívny a jeho obraz $\mathcal{R}(L) \subseteq Y$ je uzavretý podpriestor v Y. Zobrazenie $L : X \to \mathcal{R}(L) \subseteq Y$ je teda spojitá lineárna bijekcia medzi Banachovými priestormi X a $\mathcal{R}(L)$. Napokon podľa Vety 10 hľadaná inverzia $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X$ existuje a je spojitá. ∎

Dôsledok 1

Nech X je lineárny priestor a $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ dve normy na X také, že $(X, \|\cdot\|_1)$ a $(X, \|\cdot\|_2)$ sú Banachove priestory. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

- **(i)** *Existuje $M > 0$ také, že pre každý vektor $x \in X$ platí $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2$.*
- **(ii)** *Existuje $m > 0$ také, že pre každý vektor $x \in X$ platí $\|x\|_2 \leq m\|x\|_1$.*
- **(iii)** *Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ sú ekvivalentné na X.*

Dôkaz Dôsledku 1.

Keďže identický operátor medzi každými dvomi normovanými priestormi je bijektívny, v súlade s Vetou 10 platí

$$I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2) \text{ je spojitý} \quad \Longleftrightarrow \quad I : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1) \text{ je spojitý.}$$

Tvrdenie (i) je zrejme podľa (7) ekvivalentné so spojitosťou indetického operátora $I : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$. Podobne, tvrdenie (ii) znamená spojitosť indetického operátora $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$. Teda tvrdenia (i) a (ii) sú ekvivalentné. Následne, ekvivalencia tvrdenia (iii) s (i), resp. (ii) je triviálna. ■

Otvorené a uzavreté zobrazenie

Nech X je daný lineárny priestor nad telesom $\mathbb{K}$ (uvažujeme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) a nech je na X definovaná nejaká topológia $\mathcal{T}$. Ak operácie sčítania vektorov z X a násobenia vektora X skalárom z $\mathbb{K}$ sú zobrazenia spojité vzhľadom na topológiu $\mathcal{T}$, hovoríme, že X je topologický lineárny priestor. Je zrejmé, že každý normovaný lineárny priestor X je zároveň i topologickým lineárnym priestorom (s topológiou indukovanou príslušnou normou), avšak vo všeobecnosti nie každá topológia na X nutne pochádza z nejakej normy na X.

Príklad 10

Nech X a Y sú Banachove priestory. Priestor $\mathcal{L}(X, Y)$ spojitých lineárnych operátorov $L : X \to Y$ s topológiou generovanou pomocou slabej konvergencie v Definícii 4 je topologický lineárny priestor, avšak táto slabá topológia nie je indukovaná žiadnou normou na $\mathcal{L}(X, Y)$.

Významnou skupinou topologických lineárnych priestorov sú lokálne konvexné topologické lineárne priestory X, kde pre každý vektor $x \in X$ a každé jeho okolie $\mathcal{O}(x)$ (vzhľadom na danú topológiu $\mathcal{T}$) existuje konvexná množina $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ s vlastnosťou $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}(x)$. Odpovedajúce topológie $\mathcal{T}$ sú často konštruované pomocou nejakého systému pseudonoriem na X.

Príklad 11

Typickým príkladom lokálne konvexného topologicého priestoru je priestor $X = \mathcal{C}[a,b]$ s topológiou generovanou systémom pseudonoriem

$$\{p_x,\ x \in [a,b]\}, \quad p_x(f) := |f(x)|, \quad f \in X. \tag{40}$$

Táto topológia indukuje bodovú konvergenciu spojitých funkcií na intervale $[a,b]$ a nie je vytvorená žiadnou normou na X.

Definícia 7 (Otvorené zobrazenie)

Nech X a Y sú topologické lineárne priestory. Zobrazenie $L : X \to Y$ sa označuje ako otvorené, ak zobrazuje otvorené množiny na otvorené množiny, t.j.,

$$\text{ak } A \subseteq X \text{ je otvorená v priestore } X, \text{ potom aj } L(A) \subseteq Y \text{ je otvorená v priestore } Y.$$

Príklad 12

Každé bijektívne zobrazenie medzi dvomi topologickými lineárnymi priestormi, ktoré má spojitú inverziu, je otvorené zobrazenie. Špeciálne, každý homeomorfizmus medzi dvomi topologickými lineárnymi priestormi je otvorené zobrazenie.

Príklad 12

Na druhej strane, každá konštantná funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojité zobrazenie, ktoré ale nie je otvorené. Príkladom otvoreného zobrazenie, ktoré nie je spojité, je dolná celá časť reálneho čísla $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde v cieľovom priestore $\mathbb{R}$ uvažujeme diskrétnu topológiu, t.j., každú podmnožinu v $\mathbb{R}$ považujeme za otvorenú.

Definícia 8 (Uzavreté zobrazenie)

Nech X a Y sú topologické lineárne priestory s topológiami $\mathcal{T}_X$ a $\mathcal{T}_Y$ a nech $L : X \to Y$ je dané zobrazenie. Množina

$$G_L := \{[x, L(x)],\ x \in X\} \subseteq X \times Y \tag{41}$$

sa nazýva graf zobrazenia L. Hovoríme, že zobrazenie L je uzavreté, ak jeho graf je množina uzavretá priestore $X \times Y$ vzhľadom na topológiu $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

Poznámka 7

Poznamenajme, že v prípade ak X a Y sú naviac normované lineárne priestory a topológie $\mathcal{T}_X$ a $\mathcal{T}_Y$ sú indukované odpovedajúcimi normami $\|\cdot\|_X$ a $\|\cdot\|_Y$, budeme na priestore $X \times Y$ uvažovať normu

$$\|[x, y]\| := \|x\|_X + \|y\|_Y, \quad [x, y] \in X \times Y. \tag{42}$$

Poznámka 7

Nie je ťažké si premyslieť, že súčinová topológia $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$ na priestore $X \times Y$ je generovaná práve normou $\|\cdot\|$ definovanou v (42).

Lema 3

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ je surjektívny spojitý lineárny operátor. Potom pre každé $\varepsilon >$ existuje $\delta > 0$ tak, že $B_Y[0, \delta] \subseteq L\left(B_X[0, \varepsilon]\right)$.

Veta 15 (O otvorenom zobrazení)

Nech X a Y sú Banachove priestory. Každý surjektívny spojitý lineárny operátor $L : X \to Y$ je otvorené zobrazenie.

Dôkaz Vety 15.

Ukážeme, že operátor L zobrazuje otvorené množiny z X na otvorené množiny v Y. Nech $A \subseteq X$ je daná otvorená množina a nech $y \in L(M)$ je pevný vektor. Potom existuje $x \in A$ s vlastnosťou $y = Lx$. Keďže A je otvorená množina, iste existuje malé $\varepsilon > 0$ také, že uzavretá guľa $B_X[x, \varepsilon] \subseteq A$. Zrejme platí rovnosť

Dôkaz Vety 15 (pokračovanie).

$B_X[x,\varepsilon] = x + B_X[0,\varepsilon]$. Podľa Lemy 3 existuje kladné číslo $\delta > 0$ s vlastnosťou $B_Y[0,\delta] \subseteq L(B_X[0,\varepsilon])$. Vďaka linearite zobrazenia L postupne máme

$$B_Y[y,\delta] = y + B_Y[0,\delta] \subseteq y + L(B_X[0,\varepsilon]) = Lx + L(B_X[0,\varepsilon])$$

$$= L(x + B_X[0,\varepsilon]) = L(B_X[x,\varepsilon]) \subseteq L(A).$$

Získaná inklúzia ukazuje, že y je vnútorný bod množiny $L(A)$. A nakoľko vektor $y \in L(A)$ bol zvolený ľubovoľne, množina $L(A)$ je otvorená. Podľa Definície 7 je teda operátor L otvorené zobrazenie. Dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 8

Stojí za zmienku, že Veta 15 umožňuje zostaviť pomerne jednoduchý alternatívny dôkaz Banachovej Vety 10 o inverznom operátore. Ak operátor $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ je bijektívny, potom existuje jeho (lineárna) inverzia L^{-1} definovaná na celom priestore Y. V kontexte tvrdenia Vety 15 operátor L zobrazuje otvorené množiny v X na otvorené množiny v Y. Inými slovami, úplne vzory otvorených množín v zobrazení L^{-1} sú otvorené množiny. Preto je inverzia L^{-1} spojité zobrazenie.

Veta 16

Nech X a Y sú normované lineárne priestory a $L : X \to Y$ je spojitý operátor. Potom L je uzavreté zobrazenie.

Dôkaz Vety 16.

V súlade s Definíciou 8 ukážeme, že operátor L má uzavretý graf v priestore $X \times Y$. Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť s limitou $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Vďaka spojitosti zobrazenia L máme $\lim_{n\to\infty} Lx_n = Lx \in Y$. Následne

$$\|[x_n, Lx_n] - [x, Lx]\| = \|[x_n - x, Lx_n - Lx]\| \overset{(42)}{=} \|x_n - x\|_X + \|Lx_n - Lx\|_Y$$

pre každý index $n \in \mathbb{N}$. Preto $\lim_{n\to\infty} \|[x_n, Lx_n] - [x, Lx]\| = 0$, t.j., $\lim_{n\to\infty}[x_n, Lx_n] = [x, Lx]$. Podľa (41) má L uzavretý graf v $X \times Y$. ■

Veta 17 (O uzavretom grafe)

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je lineárny operátor. Ak L je uzavreté zobrazenie, potom $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, t.j., L je spojitý lineárny operátor.

Dôkaz Vety 17.

Podľa predpokladov vety je súčinový priestor $X \times Y$ úplný vzhľadom na normu v (42). Okrem toho, graf G_L operátora L je v súlade s Definíciou 8 uzavretý v $X \times Y$ a vďaka linearite L je to lineárny podpriestor v $X \times Y$. Teda $G_L \subseteq X \times Y$ je Banachov priestor. Definujme operátor $P : G_L \to X$ predpisom

$$P[x, Lx] := x, \quad [x, Lx] \in G_L. \tag{43}$$

Operátor P je zrejme lineárna bijekcia. Naviac je i ohraničený, keďže máme

$$\|P[x, Lx]\|_X \overset{(43)}{=} \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Lx\|_Y \overset{(42)}{=} \|[x, Lx]\| \quad \text{pre každé } x \in X.$$

Podľa Vety 10 má operátor P spojitú a lineárnu inverziu $P^{-1} : X \to G_L$, t.j., zobrazenie $x \mapsto [x, Lx]$, $x \in X$, je lineárne a spojité. Podľa (42) potom nutne i operátor L musí byť spojitý. Dôkaz je hotový. ■

Dôsledok 2

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je lineárny operátor. Potom L je uzavretý práve vtedy, keď je spojitý.

Dôkaz Dôsledku 2.

Tvrdenie priamo vyplýva z Viet 16 a 17. ∎

Príklad 13

Predpoklad úplnosti priestorov X a Y v tvrdení Dôsledku 2 je dôležitý. V Príklade 6 sme dokázali, že diferenciálny operátor $D : \mathcal{C}^1[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ definovaný v (2) nie je spojitý, ak v priestore $X = \mathcal{C}^1[a,b]$ uvažujeme maximálnu normu $\|\cdot\|_C$. Napriek tomu je v tomto prípade operátor D uzavretý. Skutočne, ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť funkcií s vlastnosťami

$$f_n \to f \text{ v norme } \|\cdot\|_C \quad\Longrightarrow\quad f_n \to f \text{ rovnomerne na } [a,b],$$

$$Df_n = f_n' \to g \text{ v norme } \|\cdot\|_C \quad\Longrightarrow\quad Df_n = f_n' \to g \text{ rovnomerne na } [a,b],$$

potom zo základného kurzu matematickej analýzy vieme, že funkcia f má spojitú deriváciu a $g = f'$ na intervale $[a,b]$. Preto postupnosť obrazov $\{Df_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v norme priestoru $Y = \mathcal{C}[a,b]$ k funkcii $Df \in Y$. To ukazuje, že operátor D má uzavretý graf $G_D \subseteq X \times Y$ vzhľadom na súčinovú normu $\|\cdot\| = \|\cdot\|_C + \|\cdot\|_C$ v $X \times Y$. Príčinou zlyhania tvrdenia Dôsledku 2 je skutočnosť, že priestor $X = \mathcal{C}^1[a,b]$ nie je vzhľadom na maximálnu normu úplný.

Veta 18

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je lineárny operátor. Ak L je uzavretý a má inverziu L^{-1}, potom operátor L^{-1} je tiež uzavretý.

Dôkaz Vety 18.

Dokážeme, že graf $G_{L^{-1}}$ inverzného operátora L^{-1} je uzavretá množina v súčinovom priestore $Y \times X$. Podľa Definície 8 máme

$$G_{L^{-1}} = \{[y, L^{-1}y],\ y \in \mathcal{R}(L)\} \subseteq Y \times X. \tag{44}$$

Uvažujme postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}(L)$ s vlastnosťou

$$y_n \to y \text{ v norme } \|\cdot\|_Y \text{ a } L^{-1}y_n \to x \text{ v norme } \|\cdot\|_X. \tag{45}$$

Označme $x_n := L^{-1}y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Keďže lineárny operátor L je uzavretý, podľa Vety 17 je spojitý, a tak platí

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Lx_n = Lx,$$

teda vektor $y \in \mathcal{R}(L)$. Obzvlášť máme $x = L^{-1}y$. To znamená, že postupnosť

$$[y_n, L^{-1}y_n] = [y_n, x_n] \to [y, x] = [y, L^{-1}y] \in G_{L^{-1}} \text{ v norme } \|\cdot\|_Y + \|\cdot\|_X.$$

Množina $G_{L^{-1}}$ je teda uzavretá, a preto inverzný operátor L^{-1} je uzavretý. ∎

Príklad 14

Nech $p, q \in \mathcal{C}[a,b]$ sú dané spojité funkcie a položme

$$X = \{x \in \mathcal{C}^2[a,b],\ x(a) = 0 = x'(a)\}, \quad \|x\|_X = \|x\|_C + \|x'\|_C + \|x''\|_C, \quad x \in X,$$

$$Y = \mathcal{C}[a,b], \quad \|y\|_Y = \|y\|_C, \quad y \in Y.$$

Uvažujme diferenciálny operátor $L : X \to Y$ tvaru

$$L \,:\, x(t) \mapsto x''(t) + p(t)\,x'(t) + q(t)\,x(t), \quad x \in X, \quad t \in [a,b].$$

Obidva priestory X a Y sú úplné vzhľadom na svoje normy. Skúmaný operátor L je lineárny a uzavretý, čo podľa Vety 17 zaručuje jeho spojitosť. Na druhej strane, z teórie diferenciálnych rovníc vyplýva, že L je bijektívny operátor. Z Vety 10 potom vyplýva, že inverzný operátor L^{-1} je spojitý na priestore Y. Posledné pozorovanie možno interpetovať nasledovne. Pre danú spojitú funkciu $f \in \mathcal{C}[a,b]$ uvažujme začiatočnú úlohu

$$x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = f(t), \quad x(a) = 0 = x'(a), \quad t \in [a,b]. \tag{46}$$

Spojitosť operátora L^{-1} znamená, že pri "malých" zmenách pravej strany f rovnice v (46) možno očakávať "malé" zmeny riešení začiatočnej úlohy (46).

Obsah

Pojem adjungovaného operátora

Nech X a Y sú dané normované lineárne priestory, $A \subseteq X$ algebraický podpriestor hustý v X a $L : A \to Y$ je lineárny operátor. Označme symbolmi X' a Y' priestory duálne (adjungované) k priestorom X a Y, t.j., priestory všetkých spojitých lineárnych funkcionálov na X a Y. Zrejme pre každý funkcionál $g \in Y'$ je zložené zobrazenie $g \circ L$ lineárny funkcionál na priestore X. Označme

$$B := \{g \in Y',\ g \circ L \in X',\ \text{t.j., } g \circ L \text{ je spojitý na } X\}. \tag{47}$$

Lineárny operátor L teda indukuje istý operátor $L' : B \to X'$ definovaný

$$L'g := g \circ L, \quad g \in B \subseteq Y'. \tag{48}$$

Definícia 9 (Adjungovaný operátor)

Operátor $L' : B \to X'$ definovaný predpisom v (48) sa nazýva (duálny) adjungovaný operátor k operátoru L.

Poznámka 9

Vďaka tomu, že množina A je hustá v priestore X, operátor L' v (48) je definovaný korektne. Ak naviac L je i spojitý operátor, potom množina $B = Y'$.

Poznámka 10

Z historických dôvodov sa hodnota $f(x)$ funkcionálu $f \in X'$ v bode $x \in X$ často vyjadruje v tvare $\langle f, x \rangle$, pričom symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nemusí nutne znamenať skalárny súčin. V tomto označení adjungovaný operátor L' v (48) formálne spĺňa

$$\langle L'g, x \rangle = \langle g, Lx \rangle \quad \text{pre každé } g \in B \text{ a } x \in X. \tag{49}$$

Zavedené označenie sa ukazuje ako veľmi efektívne a v mnohých konkrétnych situáciach uľahčuje formálne výpočty.

Veta 19

Nech X a Y sú normované lineárne priestory a $L : X \to Y$ je lineárny operátor. Nech $B \subseteq Y'$ je množina v (47). Adjungovaný operátor $L' : B \to X'$ je lineárny. Ak naviac L je spojitý, potom aj L' je spojitý a platí rovnosť $\|L'\| = \|L\|$.

Dôkaz Vety 19.

Linearita operátora L' vyplýva z nasledujúcich výpočtov, v ktorých využijeme symboliku zavedenú v Poznámke 10. Konkrétne, pre každú dvojicu funkcionálov $f, g \in B$, každú dvojicu skalárov $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a každý vektor $x \in X$ máme

Dôkaz Vety 19 (pokračovanie).

$$\langle L'(\alpha f+\beta g),x\rangle \overset{(49)}{=} \langle \alpha f+\beta g, Lx\rangle = \alpha\,\langle f,Lx\rangle + \beta\,\langle g,Lx\rangle$$

$$\overset{(49)}{=} \alpha\,\langle L'f,x\rangle + \beta\,\langle L'g,x\rangle = \langle \alpha\,L'f+\beta\,L'g,x\rangle,$$

t.j., platí $L'(\alpha f+\beta g) = \alpha\,L'f+\beta\,L'g$. Nech naviac L je spojitý operátor. Ukážeme, že L' je ohraničený. Zrejme teraz $B = Y'$ a pre $g\in Y'$ a $x\in X$ platí

$$\big|[L'g](x)\big| \overset{(48)}{=} |g(Lx)| \le \|g\|\cdot\|Lx\|_Y \overset{(7)}{\le} \|g\|\cdot\|L\|\cdot\|x\|_X$$

$$\Downarrow$$

$$\|L'g\| \le \|L\|\cdot\|g\| \tag{50}$$

Lineárny operátor L' je teda ohraničený, a tak i spojitý. Naviac, podľa (50) a Poznámky 1 platí nerovnosť $\|L'\| \le \|L\|$. Dokážeme opačnu nerovnosť. Ak $L\equiv 0$, potom zrejme i adjungovaný operátor $L'\equiv 0$ a platí $\|L'\| = 0 = \|L\|$. Predpokladajme preto, že operátor L nie je identicky nulový a nech $x\in X$ je ľubovoľný vektor taký, že $y := Lx \ne 0$. Podľa jedného z dôsledkov Hahnovej-Banachovej vety potom existuje funkcionál $g\in Y'$ s vlastnosťou

$$\|g\| = 1, \qquad g(y) = \|y\|_Y = \|Lx\|_Y. \tag{51}$$

Postupne máme

Dôkaz Vety 19 (pokračovanie).

$$\|Lx\|_Y = g(y) = |g(Lx)| \overset{(48)}{=} \left|[L'g](x)\right| \leq \|L'g\| \cdot \|x\|_X$$

$$\overset{(7)}{\leq} \|L'\| \cdot \|g\| \cdot \|x\|_X \overset{(51)}{=} \|L'\| \cdot \|x\|_X \tag{52}$$

Nerovnosť (52) zrejme platí aj pre každý vektor $x \in X$, pre ktorý $Lx = 0$. Preto

$$\|Lx\|_Y \leq \|L'\| \cdot \|x\|_X \quad \text{pre každý vektor } x \in X.$$

Posledná nerovnosť v kontexte s (6) znamená, že $\|L\| \leq \|L'\|$. ■

Veta 20

Nech X, Y a Z sú dané normované lineárne priestory. Množina všetkých operátorov, ktoré sú adjungované k lineárnym operátorom z $\mathcal{L}(X,Y)$, je lineárny podpriestor v $\mathcal{L}(Y',X')$. Naviac, ak $L : X \to Y$ a $K : Y \to Z$, potom

$$(K \circ L)' = L' \circ K'. \tag{53}$$

Dôkaz Vety 20.

Pre každú dvojicu spojitých lineárnych operátorov $L, \tilde{L} \in \mathcal{L}(X,Y)$ platí

Dôkaz Vety 20 (pokračovanie).

$$\langle(\alpha L+\beta\tilde{L})'g,x\rangle \overset{(49)}{=} \langle g,(\alpha L+\beta\tilde{L})x\rangle = \langle g,\alpha Lx+\beta\tilde{L}x\rangle = \langle \alpha g, Lx\rangle + \langle \beta g,\tilde{L}x\rangle$$

$$\overset{(49)}{=} \langle L'(\alpha g),x\rangle + \langle \tilde{L}'(\beta g),x\rangle = \langle(\alpha L'+\beta\tilde{L}')\,g,x\rangle,$$

kde $g\in Y'$ a $x\in X$ sú ľubovoľné. Preto

$$(\alpha L+\beta\tilde{L})' = \alpha L'+\beta\tilde{L}',\quad L,\tilde{L}\in\mathcal{L}(X,Y),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}. \tag{54}$$

Ďalej, ak $L\in\mathcal{L}(X,Y)$ a $K\in\mathcal{L}(Y,Z)$, potom pre každý funkcionál $g\in Z'$ a každý bod $x\in X$ postupne máme

$$\langle(K\circ L)'g,x\rangle \overset{(49)}{=} \langle g,(K\circ L)x\rangle = \langle g,K(Lx)\rangle \overset{(49)}{=} \langle K'g,Lx\rangle \overset{(49)}{=} \langle(L'\circ K')\,g,x\rangle.$$

Platí teda formula (53) a dôkaz je kompletný. ■

Príklad 15

Pre dané $n,m\in\mathbb{N}$ uvažujme $X=\mathbb{C}^n$ a $Y=\mathbb{C}^m$ ako lineárne priestory stĺpcových vektorov. Je známe, že každý lineárny operátor z X do Y je spojitý (vzhľadom na každú dvojicu noriem v X a Y) a je možné ho reprezentovať ne-

Príklad 15

jakou maticou z $\mathbb{C}^{m\times n}$. Nech teda $L : X \to Y$ je (spojitý) lineárny operátor realizovaný pomocou komplexnej matice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, t.j., platí

$$Lx = Ax, \quad x \in X.$$

Ukážeme, že k nemu prislúchajúci adjungovaný operátor $L' : Y' \to X'$ v (48) je možné reprezentovať maticou $\overline{A^T} \in \mathbb{C}^{n\times m}$, t.j., hermiteovsky združenou s maticou A. Spojité lineárne funkcionály na X, resp. Y, splývajú s priestorom všetkých lineárnych foriem na X, resp. na Y. Ich pôsobenie možno vyjadriť v tvare "konečnorozmerného" skalárneho súčinu, t.j., pre každé $f \in X'$ a $g \in Y'$ existujú jediné vektory $x_f \in X$ a $y_g \in Y$ také, že

$$f(x) = x^T\overline{x_f}, \quad x \in X, \qquad g(y) = y^T\overline{y_g}, \quad y \in Y.$$

Ak pre ľubovoľne zvolené $g \in Y'$ označíme $f := g \circ L$, potom platí

$$f(x) = [L'g](x) = g(Lx) \quad \longrightarrow \quad x^T\overline{x_f} = (Ax)^T\overline{y_g} \quad \longrightarrow \quad x^T\overline{x_f} = x^T\left(\overline{\overline{A^T}y_g}\right)$$

pre každé $x \in X$. To znamená, že vektor $x_f = \overline{A^T}y_g$. Pôsobenie adjungovaného operátora L' je teda realizované prostredníctvom matice $\overline{A^T}$.

Anihilátory v normovaných priestoroch

Definícia 10 (Anihilátor a spätný anihilátor množiny)

Nech X je normovaný priestor a X' jeho duálny priestor. Pre danú množinu $A \subseteq X$ definujeme jej anihilátor v duálnom priestore X' ako množinu

$$A^{\perp} := \{f \in X', \quad f(x) = 0 \text{ pre každé } x \in A\}. \tag{55}$$

Podobne, pre danú množinu $B \subseteq X'$ definujeme jej spätný anihilátor v priestore X ako množinu

$$^{\perp}B := \{x \in X, \quad f(x) = 0 \text{ pre každé } f \in B\}. \tag{56}$$

Veta 21

Nech X je normovaný priestor a X' jeho duálny priestor. Pre každé dané množiny $A \subseteq X$ a $B \subseteq X'$ sú ich anihilátory $A^{\perp}$ a $^{\perp}B$ uzavreté podpriestory v X' a X. Naviac, platia rovnosti $X^{\perp} = \{0\} \subseteq X'$ a $^{\perp}X' = \{0\} \subseteq X$.

Dôkaze Vety 21.

Nie je náročné ukázať, že množiny $A^{\perp}$ a $^{\perp}B$ sú lineárne podpriestory v X' a X. Dokážeme uzavretosť množín $A^{\perp}$ a $^{\perp}B$ v ich odpovedajúcich priestoroch. Nech

Dôkaze Vety 21 (pokračovanie).

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A^{\perp}$ je konvergentná postupnosť spojitých lineárnych funkcionálov s limitou $f \in X'$. Pre každé $x \in A$ podľa (55) platí $f_n(x) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, a tak

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x) - f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{X'} \|x\|_X = 0,$$

t.j., funkcionál $f \in A^{\perp}$. Podobne, ak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq {}^{\perp}B$ je konvergentná postupnosť s limitou $x \in X$, potom pre každé $f \in B$ máme $f(x_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Preto vďaka spojitosti $0 = f(x_n) \to f(x)$ pre $n \to \infty$, teda $f(x) = 0$ pre každé $f \in B$. Preto vektor $x \in {}^{\perp}B$. Napokon, ak funkcionál $f \in X^{\perp}$, potom $f(x) = 0$ pre každé $x \in X$, teda $f \equiv 0$. Preto platí $X^{\perp} = \{0\}$. Podobne, ak $x \in {}^{\perp}X'$, potom $f(x) = 0$ pre každé $f \in X'$. Podľa jedného z dôsledkov Hahnovej–Banachovej vety existuje spojitý lineárny funkcionál g s vlastnosťou $g(x) = \|x\|_X$ a $\|g\| = 1$. Preto nutne vektor $x = 0$ a platí ${}^{\perp}X' = \{0\}$. Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 11

Nie je ťažké dokázať, že pre každé $A \subseteq X$ a každé $B \subseteq X'$ platia inklúzie

$$A \subseteq {}^{\perp}\left(A^{\perp}\right), \quad B \subseteq \left({}^{\perp}B\right)^{\perp}. \tag{57}$$

Dodajme, že využitím (57) a Vety 21 máme rovnosti $\{0\}^{\perp} = X'$ a ${}^{\perp}\{0\} = X$.

Veta 22

Nech X a Y sú dané normované priestory, $L : X \to Y$ je spojitý lineárny operátor a $L' : Y' \to X'$ jeho adjungovaný operátor. Potom platia rovnosti

$$\operatorname{Ker} L' = [\mathcal{R}(L)]^{\perp}, \quad \operatorname{Ker} L = {}^{\perp}[\mathcal{R}(L')]. \tag{58}$$

Dôkaze Vety 22 (pokračovanie).

Dokážeme prvú rovnosť v (58). Pre funkcionál $g \in \operatorname{Ker} L'$ platí $L'g \equiv 0 \in X'$, t.j., $[L'g](x) = 0$ pre každé $x \in X$. V súlade s (48) platí $g(Lx) = 0$ pre každé $x \in X$. Funkcionál g sa teda nuluje na podpriestore $\mathcal{R}(L)$, preto podľa (55) máme $g \in [\mathcal{R}(L)]^{\perp}$. Naopak, pre každý funkcionál $g \in [\mathcal{R}(L)]^{\perp}$ je $g(Lx) = 0$ pre každé $x \in X$, a následne opäť podľa (48) platí $[L'g](x) = 0$ pre každé $x \in X$. Preto $L'g \equiv 0$ a funkcionál $g \in \operatorname{Ker} L'$. Pri dôkaze druhej rovnosti v (58) postupujeme podobne. Ak $x \in \operatorname{Ker} L$, potom $Lx = 0$, a preto $g(Lx) = 0$ pre každé $g \in Y'$. Podľa (48) teda $[L'g](x) = g(Lx) = 0$ pre každé $g \in Y'$. Na vektore x sa teda nulujú všetky funkcionály z množiny $\mathcal{R}(L')$, t.j. v zhode s (56) platí $x \in {}^{\perp}[\mathcal{R}(L')]$. Naopak, ak $x \in {}^{\perp}[\mathcal{R}(L')]$, t.j., $[L'g](x) = 0$ pre každé $g \in Y'$, potom podľa (48) máme $g(Lx) = 0$ pre každý funkcionál $g \in Y'$. Pomocou rovnakého argumentu využívajúceho Hahnovu–Banachovu vetu ako vyššie, dostaneme, že $Lx = 0$, a teda vektor $x \in \operatorname{Ker} L$. Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 12

Doplňme, že okrem rovností v (58) platia aj relácie

$$\overline{\mathcal{R}(L)} = {}^{\perp}[\operatorname{Ker} L'], \quad \overline{\mathcal{R}(L')} \subseteq [\operatorname{Ker} L]^{\perp}. \tag{59}$$

Posledná inklúzia sa však nemusí realizovať ako rovnosť, viz Príklad 16.

Príklad 16

Nech priestory $X = l^1$ a $Y = c_0$ a uvažujme operátor $L : X \to Y$ tvaru

$$L\{x_n\} := \left\{\frac{x_n}{n}\right\}, \quad \{x_n\} \in l^1. \tag{60}$$

Jedná sa zrejme o lineárny a ohraničený, a teda i spojitý operátor. Nájdeme k nemu odpovedajúci adjungovaný operátor $L' : Y' \to X'$. Vieme, že duálne priestory $X' = (l^1)' \simeq l^\infty$ a $Y' = (c_0)' \simeq l^1$. Presnejšie, že každý spojitý lineárny funkcionál $f \in X'$ je možné reprezentovať v tvare

$$f\left(\{x_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \quad \{x_n\} \in l^1, \qquad \text{pre jediné } \{c_n\} \in l^\infty. \tag{61}$$

Podobne, každý spojitý lineárny funkcionál $g \in Y'$ má tvar

Príklad 16

$$g\left(\{y_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n y_n, \quad \{y_n\} \in c_0, \quad \text{pre jediné } \{d_n\} \in l^1. \tag{62}$$

V súlade s definíciou operátora L' v (48) platia pre každé $g \in Y'$ rovnosti

$$[L'g]\{x_n\} \overset{(48)}{=} g\left(L\{x_n\}\right) \overset{(60)}{=} g\left(\left\{\frac{x_n}{n}\right\}\right) \overset{(62)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n} x_n, \quad \{x_n\} \in X. \tag{63}$$

Operátor L' je teda možné formálne reprezentovať priradením

$$L' : \{d_n\} \in l^1 \mapsto \left\{\frac{d_n}{n}\right\} \in l^\infty. \tag{64}$$

Dá sa ukázať, že v zhode s (64) platí $\overline{\mathcal{R}(L')} \simeq c_0$. Na druhej strane, z predpisu (60) vidieť, že podpriestor $\operatorname{Ker} L = \{0\} \in X$, a tak podľa Poznámky 11 platí $[\operatorname{Ker} L]^\perp = X' \simeq l^\infty$. Preto máme

$$\overline{\mathcal{R}(L')} \simeq c_0 \subsetneq l^\infty \simeq [\operatorname{Ker} L]^\perp,$$

t.j., v tomto prípade platí v (59) ostrá inklúzia. Na záver poznamenajme, že rovnosť v (59) skutočne platí. Keďže podľa (64) operátory L a L' pôsobia formálne rovnako (avšak na rôznych priestoroch a do rôznych priestorov), platí $\overline{\mathcal{R}(L)} = c_0$ a $^\perp[\operatorname{Ker} L'] = {}^\perp\{0\} = Y = c_0$, kde sme využili Poznámku 11.

Hermiteovsky adjungovaný operátor I

Nech H je daný Hilbertov priestor so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ a uvažujme lineárny operátor $L : H \to H$. Nech ďalej $L' : H' \to H'$ je v súlade s Definíciou 9 operátor adjungovaný k L. Podľa Fréchetovej–Rieszovej vety o duálnom priestore H' vieme, že existuje izometrický izomorfizmus $\tau : H \to H'$ daný predpisom

$$\tau(y) = f_y = \langle\cdot, y\rangle_H, \quad y \in H, \tag{65}$$

$$\|\tau(y)\|_{H'} = \|y\|_H, \quad \|\tau^{-1}(f)\|_H = \|f\|_{H'}, \quad y \in H, \quad f \in H'. \tag{66}$$

Definícia 11 (Hermiteovsky adjungovaný operátor)

Nech H je (komplexný) Hilbertov priestor, $L : H \to H$ je lineárny operátor a $L' : H' \to H'$ je odpovedajúci adjungovaný operátor. Zobrazenie

$$L^* : H \to H \quad \text{definované} \quad L^* := \tau^{-1} \circ L' \circ \tau, \tag{67}$$

s τ v (65), sa nazýva operátor hermiteovsky adjungovaný k operátoru L.

Poznámka 13

Operátor L^* v (67) zrejme skutočne zobrazuje z H do H a je lineárny. Priamo z (67) v Definícii 11 vyplýva, že platí

Hermiteovsky adjungovaný operátor II

Poznámka 13

$$\langle Lx, y\rangle_H = \langle x, L^* y\rangle_H \quad \text{pre každé } x \in H \text{ a každé } y \in H \text{ s } L'(\tau(y)) \in H'. \tag{68}$$

Rovnosť (68) sa často používa ako definícia hermiteovsky adjungovaného operátora v Hilbertovom priestore. Dá sa totiž ukázať, že ak

$$B_L := \{y \in H,\ L'(\tau(y)) \in H',\ \text{t.j., } L'(\tau(y)) \text{ je spojitý na } H\}, \tag{69}$$

potom existuje práve jeden operátor $T : H \to H$, ktorý spĺňa identitu

$$\langle Lx, y\rangle_H = \langle x, Ty\rangle_H$$

pre každé $x \in H$ a každé $y \in B_L$. Platí, že operátor T je lineárny a množina B_L v (69) je jeho definičným oborom. Ak naviac L je spojitý, potom $B_L = H$ a k nemu hermiteovsky adjungovaný operátor L^* je tiež spojitý, nakoľko

$$\|L^* y\|_H \stackrel{(67)}{=} \|\tau^{-1}\{L'[\tau(y)]\}\|_H \stackrel{(66)}{=} \|L'[\tau(y)]\|_{H'} \stackrel{(7)}{\leq} \|L'\| \cdot \|\tau(y)\|_{H'} \stackrel{(66)}{=} \|L'\| \cdot \|y\|_H .$$

pre každé $y \in H$. Obzvlášť platí $\|L^*\| \leq \|L'\|$. Na druhej strane, využitím rovnosti $\tau \circ L^* \circ \tau^{-1} = L'$ pre každý funkcionál $f \in H'$ dostaneme

$$\|L' f\|_{H'} = \|\tau\{L^*[\tau^{-1}(f)]\}\|_{H'} \stackrel{(66)}{=} \|L^*[\tau^{-1}(f)]\|_H$$

Hermiteovsky adjungovaný operátor III

Poznámka 13

$$\overset{(7)}{\leq} \|L^*\| \cdot \|\tau^{-1}(f)\|_H \overset{(66)}{=} \|L^*\| \cdot \|f\|_{H'},$$

a tak $\|L'\| \leq \|L^*\|$. Podľa Vety 19 preto platia rovnosti $\|L^*\| = \|L'\| = \|L\|$.

Veta 23

Nech H je (komplexný) Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(H)$ je spojitý lineárny operátor. Hermiteovsky adjungovaný operátor L^* má nasledujúce vlastnosti.

(i) *Platí rovnosť* $(L^*)^* = L$.

(ii) $\overline{\mathcal{R}(L)} = (\operatorname{Ker} L^*)^{\perp}$ *a* $\overline{\mathcal{R}(L^*)} = (\operatorname{Ker} L)^{\perp}$.

(iii) $(\mathcal{R}(L))^{\perp} = \operatorname{Ker} L^*$ *a* $(\mathcal{R}(L^*))^{\perp} = \operatorname{Ker} L$.

Dôkaz Vety 23.

Platnosť (i) vyplýva z rovnosti (68), ktorá teraz platí pre každé $x, y \in H$. Máme

$$\langle L^* x, y\rangle_H = \overline{\langle y, L^* x\rangle_H} \overset{(68)}{=} \overline{\langle Ly, x\rangle_H} = \langle x, Ly\rangle_H .$$

Dôkaz Vety 23 (pokračovanie).

Z tejto rovnosti vďaka spojitosti L, a teda i operátora L^* (podľa Poznámky 13) dostávame, že L je hermiteovsky adjungovaný operátor k L^*, t.j., $(L^*)^* = L$. Pristúpime k dôkazu tvrdenia (ii). Pomerne jednoducho sa dokáže inklúzia

$$\mathcal{R}(L) \subseteq (\operatorname{Ker} L^*)^\perp. \tag{70}$$

Skutočne, ak vektor $y \in \mathcal{R}(L)$, potom $y = Lx$ pre vhodné $x \in H$. Následne pre každý vektor $z \in \operatorname{Ker} L^*$ platí

$$\langle y, z\rangle_H = \langle Lx, z\rangle_H \overset{(68)}{=} \langle x, L^* z\rangle_H = 0,$$

teda $y \in (\operatorname{Ker} L^*)^\perp$. Vďaka spojitosti operátora L^* sú podpriestory $\operatorname{Ker} L^*$ a $(\operatorname{Ker} L^*)^\perp$ uzavreté v H. Preto podľa (70) platí aj inklúzia $\overline{\mathcal{R}(L)} \subseteq (\operatorname{Ker} L^*)^\perp$. Ďalej si všimnime, že pre každý pevný vektor $z \in \left[\overline{\mathcal{R}(L)}\right]^\perp$ máme

$$0 = \langle Lx, z\rangle_H \overset{(68)}{=} \langle x, L^* z\rangle_H \quad \text{pre každé } x \in H.$$

Takže $L^* z = 0$ a tak platí inklúzia $\left[\overline{\mathcal{R}(L)}\right]^\perp \subseteq \operatorname{Ker} L^*$. To potom znamená, že ak vektor $y \in (\operatorname{Ker} L^*)^\perp$, potom $\langle y, z\rangle_H = 0$ pre každé $z \in \left[\overline{\mathcal{R}(L)}\right]^\perp$. Preto nutne $y \in \overline{\mathcal{R}(L)}$, t.j., platí inklúzia $(\operatorname{Ker} L^*)^\perp \subseteq \overline{\mathcal{R}(L)}$. Druhá rovnosť v (ii) vyplýva z prvej pomocou zámeny $L \to L^*$ prihliadnutím na (i). Napokon doká-

Dôkaz Vety 23 (pokračovanie).

žeme formuly v (iii). Ak vektor $y \in (\mathcal{R}(L))^\perp$ potom

$$0 = \langle Lx, y\rangle_H \overset{(68)}{=} \langle x, L^* y\rangle_H \quad \text{pre každé } x \in H,$$

teda $L^* y = 0$, čo znamená, že $y \in \operatorname{Ker} L^*$. Naopak, ak vektor $y \in \operatorname{Ker} L^*$, potom platí $L^* y = 0$ a

$$0 = \langle x, 0\rangle_H = \langle x, L^* y\rangle_H \overset{(68)}{=} \langle Lx, y\rangle_H \quad \text{pre každé } x \in H.$$

Teda $y \in (\mathcal{R}(L))^\perp$. Druhá rovnosť v (iii) opäť vyplýva z prvej zámenou $L \to L^*$ a využitím tvrdenia (i). Dôkaz je teraz kompletný. ■

Poznámka 14

Poznamenajme, že lineárny podpriestory $\mathcal{R}(L)$ a $\mathcal{R}(L^*)$ nemusia byť uzavreté v priestore H. Na druhej strane, z tvrdení (ii) a (iii) Vety 23 vyplýva, že ich ortogonálne doplnky $(\mathcal{R}(L))^\perp$ a $(\mathcal{R}(L^*))^\perp$ sú vždy uzavreté v H a platia identity

$$(\mathcal{R}(L))^\perp = \left[\overline{\mathcal{R}(L)}\right]^\perp, \quad (\mathcal{R}(L^*))^\perp = \left[\overline{\mathcal{R}(L^*)}\right]^\perp. \tag{71}$$

Napokon dodajme, že prvú rovnosť v (ii) možno interpretovať tak, že pre daný vektor $y \in H$ má rovnica $Lx = y$ riešenie $x \in H$ práve vtedy, keď $\langle y, z\rangle_H = 0$ pre každé riešenie $z \in H$ homogénnej adjungovanej rovnice $L^* z = 0$.

Veta 24

Nech H je Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(H)$ je bijektívny operátor. Potom aj jeho hermiteovsky adjungovaný operátor L^* je bijektívny a platí $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$.

Dôkaz Vety 24.

Operátor L je bijektívny na H, t.j., $L \circ L^{-1} = I = L^{-1} \circ L$. Z Vety 10 vieme, že inverzný operátor L^{-1} je spojitá lineárna bijekcia na H. Pre každú dvojicu vektorov $x, y \in H$ preto platí

$$\langle x, y\rangle_H = \langle (L^{-1} \circ L)x, y\rangle_H \overset{(68)}{=} \langle Lx, (L^{-1})^* y\rangle_H \overset{(68)}{=} \langle x, [L^* \circ (L^{-1})^*]y\rangle_H$$

Teda $[L^* \circ (L^{-1})^*]y = y$ pre každé $y \in H$, t.j., $L^* \circ (L^{-1})^* = I$. Analogicky

$$\langle x, y\rangle_H = \langle (L \circ L^{-1})x, y\rangle_H \overset{(68)}{=} \langle (L^{-1})x, L^* y\rangle_H \overset{(68)}{=} \langle x, [(L^{-1})^* \circ L^*]y\rangle_H$$

pre každé $x, y \in H$. Takže máme $[(L^{-1})^* \circ L^*]y = y$ pre každé $y \in H$, t.j., $(L^{-1})^* \circ L^* = I$. To znamená, že hermiteovsky adjungovaný operátor L^* je bijektívny na priestore H a jeho inverzia $(L^*)^{-1}$ spĺňa rovnosť

$$(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*.$$

Dôkaz tvrdenia je kompletný. ■

Definícia 12 (Hermiteovsky samoadjungovaný operátor)

Nech H je (komplexný) Hilbertov priestor. Spojitý lineárny operátor $L : H \to H$ sa označuje ako (hermiteovsky) samoadjungovaný, ak spĺňa rovnosť $L = L^*$, kde L^* je operátor hermiteovsky adjungovaný k operátoru L.

Príklad 17

V kontexte Príkladu 15 sú v Hilbertovom priestore $H = \mathbb{C}^n$ (so štandardným skalárnym súčinom) hermiteovsky adjungované operátory reprezentované hermiteovsky združenými maticami. Konkrétne, ak lineárny operátor $L : H \to H$ je reprezentovaný komplexnou maticou $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, potom jeho hermiteovsky adjungovaný operátor L^* je reprezentovaný maticou $\overline{A^T}$. Skutočne, rovnosti

$$\langle Ax, y\rangle_H = x^T A^T \bar{y} = x^T \overline{\left(\overline{A^T} y\right)} = \langle x, \overline{A^T} y\rangle_H$$

sú platné pre každú dvojicu vektorov $x, y \in H$. Matica $\overline{A^T}$ teda spĺňa identitu (68), a tak podľa komentára v Poznámke 13 reprezentuje operátor hermiteovsky adjungovaný k L, t.j., operátor L^*. Špeciálne, samoadjungované operátory v H sú v tomto prípade reprezentované hermiteovskými maticami v $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Invariantný podpriestor

Definícia 13 (Invariantný podpriestor)

Nech H je (komplexný) Hilbertov priestor, $A \subseteq H$ jeho podpriestor a $L : H \to H$ daný operátor. Podpriestor A sa nazýva invariatný vzhľadom na operátor L, ak množina $L(A) \subseteq A$, t.j., operátor L zobrazuje podpriestor A do seba.

Veta 25

Nech H je (komplexný) Hilbertov priestor a $L : H \to H$ spojitý lineárny operátor. Nech $A \subseteq H$ je uzavretý podpriestor invariantný vzhľadom na operátor L. Potom ortogonálny doplnok $A^\perp$ je podpriestor invariatný vzhľadom na hermiteovsky adjungovaný operátor L^*. Špeciálne, ak L je hermiteovsky samoadjungovaný operátor, potom i podpriestor $A^\perp$ je invariatný vzhľadom na L.

Dôkaz Vety 25.

Dôkaz prvej časti tvrdenia je založený na rozklade $H = A \oplus A^\perp$ a identite (68). Ak $y \in A^\perp$, potom $\langle x, L^* y\rangle_H = \langle Lx, y\rangle_H = 0$ pre každý vektor $x \in A$, a tak i vektor $L^* y \in A^\perp$. Druhá časť tvrdenia je následne zrejmá. ■

Obsah

Pojem kompaktného operátora

Definícia 14 (Kompaktný operátor)

Nech X a Y sú Banachove priestory. Hovoríme, že operátor $L : X \to Y$ je kompaktný (totálne spojitý), ak každú ohraničenú množinu v priestore X zobrazuje na prekompaktnú (relatívne kompaktnú) množinu v priestore Y.

Poznámka 15

Každý lineárny kompaktný operátor $L : X \to Y$ je spojitý na priestore X, nakoľko každá prekompaktná množina v Y je ohraničená. Všeobecne však (nelineárny) kompaktný operátor nemusí byť spojitý. Podobne, spojitý lineárny operátor $L : X \to Y$ nemusí byť kompaktný. Typickým príkladom je identický operátor $I : X \to X$ na priestore X s nekonečnou dimenziou, viz Príklad 18. Ak však obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ je konečnorozmerný podpriestor v Y, potom operátor L je kompaktný, keďže každá ohraničená podmnožina v konečnorozmernom priestore je prekompaktná. Obzvlášť, ak priestor X má konečnú dimenziu, potom každý lineárny operátor $L : X \to Y$ je kompaktný.

Príklad 18 (Kompaktnosť identického operátora)

Nech X je Banachov priestor. Potom identický operátor $I : X \to X$ je kompaktný práve vtedy, keď $\dim X < \infty$. Vyplýva to z poznatku, že jednotková sféra $S(0,1) \subseteq X$ je kompaktná práve vtedy, keď priestor X má konečnú dimenziu.

Príklad 19 (Kompaktnosť ortogonálnej projekcie)

Nech H je Hilbertov priestor a $A \subseteq H$ uzavretý podpriestor. Potom ortogonálny projektor $P_A : H \to A$ definovaný v Príklade 2 je kompaktný práve vtedy, keď podpriestor A má konečnú dimenziu. Zrejme P_A sa na podpriestore A správa ako identický operátor. Preto ak P_A je kompaktný operátor, nutne podľa Príkadu 18 musí byť $\dim A < \infty$. Opačná implikácia vyplýva z linearity projekcie P_A a z komentárov v Poznámke 15.

Príklad 20 (Kompaktnosť integrálneho operátora)

V tomto príklade ukážeme, že integrálny operátor definovaný predpisom (3) v Príklade 3 je pre funkciu $k \in \mathcal{C}([a,b] \times [a,b])$ vždy kompaktný. Doplňme, že v literatúre sa často označuje ako integrálny Fredholmov operátor. Nech $A \subseteq \mathcal{C}[a,b]$ je daná ohraničená množina, t.j., existuje $M > 0$ také, že $\|f\|_C \leq M$ pre

Príklad 20 (Kompaktnosť integrálneho operátora)

každé $f \in A$. Z Príkladu 7 ďalej vieme, že pre každé $\in A$ platí

$$\|Kf\|_C \leq \|f\|_C \cdot \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,\mathrm{d}s \leq M \cdot \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |k(t,s)|\,\mathrm{d}s,$$

t.j., množina $K(A)$ je ohraničená v priestore $\mathcal{C}[a,b]$. Dokážeme, že funkcie v $K(A)$ sú navyše aj rovnako spojité. Keďže $[a,b] \times [a,b]$ je kompaktný interval v $\mathbb{R}^2$, funkcia k je rovnomerne spojitá na $[a,b] \times [a,b]$. Inými slovami, pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že ak pre body $[t_1, s_1], [t_2, s_2] \in [a,b] \times [a,b]$ platí

$$|t_2 - t_1| + |s_2 - s_1| < \delta, \quad \text{potom} \quad |k(t_2, s_2) - k(t_1, s_1)| < \varepsilon.$$

Špeciálne v našom prípade pre každé zvolené $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že ak pre každú dvojicu $t_1, t_2 \in [a,b]$ platí

$$|t_2 - t_1| < \delta, \quad \text{potom} \quad |k(t_2, s) - k(t_1, s)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \text{ pre každé } s \in [a,b]. \qquad (72)$$

Následne, pre každú funkciu $f \in A$ máme

$$\begin{aligned} |[Kf](t_2) - [Kf](t_1)| &\overset{(3)}{=} \left| \int_a^b [k(t_2, s) - k(t_1, s)]\, f(s)\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leq \int_a^b |k(t_2, s) - k(t_1, s)|\,|f(s)|\,\mathrm{d}s \overset{(72)}{<} \int_a^b \frac{\varepsilon M}{M(b-a)}\,\mathrm{d}s = \varepsilon, \end{aligned}$$

Príklad 20 (Kompaktnosť integrálneho operátora)

čo ukazuje, že $K(A)$ je systém rovnako spojitých funkcií na intervale $[a, b]$. Podľa Arzelàovej–Ascoliho vety potom platí, že množina $L(A)$ je prekompaktná v priestore $\mathcal{C}[a, b]$. Integrálny operátor K je teda kompaktný.

Príklad 21 (Kompaktnosť integrálneho Volterrovho operátora)

Ďalším významným príkladom integrálneho operátora je integrálny Volterrov operátor $L : \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$ definovaný predpisom

$$[Lf](t) := \int_a^t k(t, s)\, f(s)\, \mathrm{d}s, \quad f \in \mathcal{C}[a, b], \quad t \in [a, b], \tag{73}$$

pre danú funkciu k spojitú na $[a, b] \times [a, b]$. Operátor L v (73) je lineárny a analogickým spôsobom ako v Príklade 20 sa dá ukázať, že je kompaktný.

Poznámka 16

Poznamenajme, že všeobecný lineárny kompaktný operátor $L : X \to Y$, kde X a Y sú Banachove priestory, nemusí uzavretú jednotkovú guľu $B_X[0, 1]$ v X zobrazovať nutne na kompaktnú množinu v Y, t.j., jej obraz nemusí byť uzavretý v priestore Y. Dá sa však dokázať, že ak X je duálny priestor pre nejaký normo-

Poznámka 16

vaný priestor, potom množina $L(B_X[0,1])$ je uzavretá, a tak kompaktná v priestore Y. Obzvlášť táto vlastnosť platí napríklad pre reflexívne priestory X.

Veta 26

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je lineárny kompaktný operátor. Ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ je slabo konvergentná v X s limitou x, potom postupnosť $\{Lx_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ konverguje v norme priestoru Y s limitou Lx.

Dôkaz Vety 26.

Z predpokladov vyplýva, že operátor L je spojitý a lineárny. Preto ak $x_n \rightharpoonup x$ pre $n \to \infty$ v priestore X, podľa Vety 8 i postupnosť $Lx_n \rightharpoonup Lx$ pre $n \to \infty$ v priestore Y. Na druhej strane, v súlade s princípom rovnomernej ohraničenosti pre normovaný priestor X je postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená v norme v X. Sporom predpokladajme, že $Lx_n \not\to Lx$ pre $n \to \infty$ v norme priestoru Y. To znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ a vybraná podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že

$$\|Lx_{n_k} - Lx\|_Y \geq \varepsilon \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{74}$$

Keďže $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť, vďaka kompaktnosti operátora L sa z nej dá vybrať podpostupnosť $\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, pre ktorú

Dôkaz Vety 26 (pokračovanie).

$$\{Lz_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ konverguje v norme } Y, \text{ t.j., } Lz_i \to y \text{ pre } i \to \infty \text{ pre nejaké } y \in Y.$$

Zrejme potom aj $Lz_i \rightharpoonup y$ pre $i \to \infty$, a tak nutne $y = Lx$. Teda

$$\|Lz_i - Lx\|_Y < \varepsilon \quad \text{pre každý dostatočne veľký index } i \in \mathbb{N}.$$

Posledná nerovnosť je však v rozpore s (74). Dôkaze je preto hotový. ∎

Poznámka 17

Tvrdenie Vety 26 ukazuje, že lineárne kompaktné operátory $L : X \to Y$ prevádzajú slabo konvergentné postupnosti v X na silne konvergentné postupnosti v Y. Operátorom s takouto vlastnosťou sa hovorí úplne spojité operátory. Každý lineárny kompaktný operátor je teda úplne spojitý, avšak úplne spojitý operátor nemusí byť nutne kompaktný. Napríklad identický operátor $I : l^1 \to l^1$ je úplne spojitý na l^1. Je to dôsledok Schurovej vety, ktorá hovorí, že na priestore l^1 slabá a silná konvergencia splývajú. Zároveň podľa Príkladu 18 tento operátor nie je kompaktný, nakoľko priestor l^1 nemá konečnú dimenziu. Na druhej strane, na reflexívnych priestoroch X lineárne kompaktné a úplne spojité operátory splývajú, t.j., každý úplne spojitý a lineárny operátor je zároveň aj kompaktný.

Veta 27

Nech X, Y a Z sú Banachove priestory. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Ak $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, $K \in \mathcal{L}(Y,Z)$ a operátor K je naviac kompaktný, potom i operátor $K \circ L$ je kompaktný.*

(ii) *Ak $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, $K \in \mathcal{L}(Z,X)$ a operátor K je naviac kompaktný, potom i operátor $L \circ K$ je kompaktný.*

Dôkaz Vety 27.

Tvrdenie (i) vyplýva z nasledujúceho reťazca implikácií.

$$A \subseteq X \text{ je ohraničená} \quad \Rightarrow \quad L(A) \subseteq Y \text{ je ohraničená}$$
$$\Downarrow$$
$$[K \circ L](A) = K(L(A)) \subseteq Z \text{ je prekompaktná v } Z,$$

t.j., operátor $K \circ L : X \to Z$ je podľa Definície 14 kompaktný. Podobne pre (ii)

$$A \subseteq Z \text{ je ohraničená} \quad \Rightarrow \quad K(A) \subseteq X \text{ je prekompaktná}$$
$$\Downarrow$$
$$[L \circ K](A) = L(K(A)) \subseteq Y \text{ je prekompaktná v } Y,$$

t.j., operátor $L \circ K : Z \to Y$ je podľa Definície 14 kompaktný. ∎

Veta 28

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je lineárny kompaktný operátor. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Ak priestor X má nekonečnú dimenziu, potom platí*

ak operátor L je injektívny, potom podpriestor $\mathcal{R}(L)$ nie je uzavretý v Y.

(ii) *Ak priestor Y má nekonečnú dimenziu, potom operátor L nie je surjektívny.*

Dôkaz Vety 28.

Zrejme L je spojitý operátor, viz Poznámka 15. Ak v tvrdení (i) predpokladáme, že operátor L je injektívny a zároveň má uzavretý obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$, potom s súlade Vetami 13 a 14 je L zdola ohraničený a má spojitú inverziu $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X$. Následne z Vety 27(ii) vyplýva, že identický operátor $I = L^{-1} \circ L : X \to X$ je kompaktný. To je však v rozpore s diskusiou v Príklade 18, keďže $\dim X = \infty$. Preto podpriestor $\mathcal{R}(L)$ nemôže byť uzavretý v Y. V dôkaze tvrdenia (ii) môžeme argumentovať tak, že predpoklad surjektívnosti operátora L podľa Lemy 3 zaručí, že množina $L(B_X[0,1])$ obsahuje nejakú uzavretú guľu $B_Y[0,\delta]$ v Y. Keďže $\dim Y = \infty$, guľa $B_Y[0,\delta]$, a teda i množina $L(B_X[0,1])$ nie je prekompaktná v priestore Y. To je však v rozpore s kompaktnosťou operátora L. ■

Dôsledok 3

Nech X a Y sú Banachove priestory a X má nekonečnú dimenziu. Potom lineárny kompaktný operátor $L : X \to Y$ nikdy nemá spojitú inverziu L^{-1}.

Dôkaz Dôsledku 3.

Ak by inverzný operátor L^{-1} bol spojitý, potom by podľa Vety 13 bol L zdola ohraničený, t.j., v súlade s Vetou 14 bol injektívny a zároveň mal uzavretý obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ v priestore Y. To však vylučuje Veta 28(i), keďže $\dim X = \infty$. ■

Veta 29

Nech X a Y sú Banachove priestory a $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť kompaktných operátorov z X do Y s limitou L. Potom operátor L je kompaktný.

Dôkaz Vety 29.

Nech $A \subseteq X$ je ohraničená množina, t.j., existuje $r > 0$ také, že $\|x\|_X \leq r$ pre každé $x \in A$. Dokážeme, že jej obraz $L(A) \subseteq Y$ je množina prekompaktná v priestore Y. Konkrétne, ukážeme, že množina $L(A)$ je totálne ohraničená v Y, t.j., pre každé $\varepsilon > 0$ existuje pre $L(A)$ konečná ε-sieť v Y. Zvoľme teda $\varepsilon > 0$.

Dôkaz Vety 29 (pokračovanie).

Kedže $\lim_{n\to\infty} L_n = L$ v norme priestoru $\mathcal{L}(X,Y)$, operátor L je zrejme spojitý a lineárny. Obzvlášť existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou

$$\|L - L_n\| < \frac{\varepsilon}{2r} \quad \text{pre každý index } n \geq n_\varepsilon. \tag{75}$$

Množina $L_{n_\varepsilon}(A)$ je $\frac{\varepsilon}{2}$-sieť pre množinu $L(A)$ v priestore Y. Skutočne, nech vektor $y \in L(A)$ je ľubovoľne zvolený a $x \in A$ je taký, že $y = Lx$, potom vektor $y_{n_\varepsilon} := L_{n_\varepsilon} x \in L_{n_\varepsilon}(A)$ spĺňa

$$\|y - y_{n_\varepsilon}\|_Y = \|Lx - L_{n_\varepsilon} x\|_Y \leq \|L - L_{n_\varepsilon}\| \, \|x\|_X \overset{(75)}{<} \frac{\varepsilon}{2r} r = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{76}$$

Z kompaktnosti operátora L_{n_ε} vyplýva, že množina $L_{n_\varepsilon}(A)$ je prekompaktná v Y, teda existuje pre ňu konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-sieť $B_\varepsilon \subseteq Y$. Ukážeme, že množina B_ε je konečná ε-sieť pre množinu $L(A)$. Pre vyššie definovaný vektor $y_{n_\varepsilon} \in L_{n_\varepsilon}(A)$ existuje $\tilde{y} \in B_\varepsilon$ taký, že $\|y_{n_\varepsilon} - \tilde{y}\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Potom platí

$$\|y - \tilde{y}\|_Y = \|(y - y_{n_\varepsilon}) + (y_{n_\varepsilon} - \tilde{y})\|_Y \leq \|y - y_{n_\varepsilon}\|_Y + \|y_{n_\varepsilon} - \tilde{y}\|_Y \overset{(76)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nakoľko číslo $\varepsilon > 0$ bolo zvolené ľubovoľne, množina $L(A)$ je totálne ohraničená, a teda prekompaktná v priestore Y. V súlade s Definíciou 14 je preto operátor L kompaktný a dôkaz je hotový. ■

Poznámka 18

Je očividné, že konečné lineárne kombinácie lineárnych kompaktných operátorov sú opäť lineárne kompaktné operátory. Tvrdenie Vety 29 potom znamená, že podpriestor $\mathcal{L}_C(X,Y)$ lineárnych kompaktných operátorov je uzavretý v priestore $\mathcal{L}(X,Y)$ všetkých spojitých lineárnych operátorov (vzhľadom na normu).

Veta 30

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ je kompaktný operátor. Potom jeho obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ je podpriestor separabilný v Y.

Dôkaz Vety 30.

Nie je ťažké si uvedomiť, že množinu $\mathcal{R}(L)$ je možné vyjadriť v tvare

$$\mathcal{R}(L) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(B_n), \quad B_n := \{x \in X, \ \|x\|_X \le n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Každá z množín $L(B_n)$, $n \in \mathbb{N}$, je prekompaktná, a teda totálne ohraničená v Y. Pre dané $m, n \in \mathbb{N}$ označme symbolom $Y_{m,n} \subseteq L(B_n)$ konečnú $\frac{1}{m}$-sieť pre množinu $L(B_n)$. Potom množina $M := \bigcup_{m,n=1}^{\infty} Y_{m,n} \subseteq \mathcal{R}(L)$ je spočítateľná a hustá v $\mathcal{R}(L)$. Podpriestor $\mathcal{R}(L)$ je teda separabilný a dôkaz je hotový. ∎

Pri dôkaze nasledujúcej vety využijeme všeobecnejšiu verziu Arzelàovej–Ascoliho vety o prekompaktnosti množín spojitých a ohraničených zobrazení. Nech U je kompaktný metrický priestor s metrikou ρ_U a V je Banachov priestor s normou $\|\cdot\|_V$. Nech $\mathcal{C}(U,V)$ je množina všetkých spojitých a ohraničených zobrazení $f: U \to V$. Jedná sa o lineárny priestor, na ktorom je možné uvažovať normu

$$\|f\| := \sup_{u \in U} \|f(u)\|_V, \quad f \in \mathcal{C}(U,V). \tag{77}$$

Nech $F \subseteq \mathcal{C}(U,V)$ je nejaký systém zobrazení. Zobrazenia z F sú rovnomerne rovnako spojité na U, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou, že

ak $\rho_U(u,\tilde{u}) < \delta$, potom $\|f(u) - f(\tilde{u})\|_V < \varepsilon$ pre každé $u, \tilde{u} \in U$ a každé $f \in F$. (78)

Zaveďme označenie

$$F(U) := \{f(u),\ u \in U,\ f \in F\} \subseteq V. \tag{79}$$

Veta 31 (Arzelàova–Ascoliho)

Systém zobrazení $F \subseteq \mathcal{C}(U,V)$ je prekompaktná množina v priestore $\mathcal{C}(U,V)$ práve vtedy, keď zobrazenia z F sú rovnomerne rovnako spojité na priestore U a množina $F(U)$ je prekompaktná v priestore V.

Veta 32 (Schauderova)

Nech X a Y sú Banachove priestory a $L : X \to Y$ lineárny operátor. Potom L je kompaktný práve vtedy, keď adjungovaný operátor $L' : Y' \to X'$ je kompaktný.

Dôkaz Vety 32.

Predpokladajme, že operátor L je kompaktný. To znamená, že obraz uzavretej jednotkovej gule $B_X[0,1]$ v zobrazení L, t.j., množina $L(B_X[0,1]) \subseteq Y$, je prekompaktný v priestore Y. Označme

$$K := \overline{L(B_X[0,1])}. \tag{80}$$

Množina $K \subseteq Y$ v (80) je zrejme kompaktná v priestore Y. Nech $L' : Y' \to X'$ je operátor adjungovaný k operátoru L, viz Definícia 9. Nech $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spojitých lineárnych funkcionálov z jednotkovej uzavretej gule $B_{Y'}[0,1]$ duálneho priestoru Y'. Dokážeme, že odpovedajúca postupnosť funkcionálov $\{L'g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X'$ je prekompaktná v duálnom priestore X'. Uvažujme zúženie zobrazení g_n, $n \in \mathbb{N}$, na množinu K, t.j., funkcie

$$\varphi_n := g_n|_K\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{81}$$

Keďže $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B_{Y'}[0,1]$, postupnosť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}(K,\mathbb{C})$. Symbolom $\|\cdot\|_C$ označme normu v priestore $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$. V súlade s (77) sa jedná o zúženie normy $\|\cdot\|_{Y'}$ na jednotkovú guľu $B_{Y'}[0,1]$. Ukážeme, že postupnosť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je pre-

Dôkaz Vety 32 (pokračovanie).

kompaktná v priestore $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$. Postupne máme

$$\|\varphi_n\|_C \overset{(77)}{=} \sup_{y\in K} |\varphi_n(y)| = \sup_{y\in L(B_X[0,1])} |\varphi_n(y)| \leq \sup_{y\in L(B_X[0,1])} \underbrace{\|g_n\|_{Y'}}_{\leq 1} \|y\|_Y$$

$$\leq \sup_{y\in L(B_X[0,1])} \|y\|_Y = \sup_{x\in B_X[0,1]} \|Lx\|_Y = \|L\|,$$

$$|\varphi_n(y) - \varphi_n(\tilde{y})| = |\varphi_n(y-\tilde{y})| \leq \|g_n\|_{Y'} \|y-\tilde{y}\|_Y \leq \|y-\tilde{y}\|_Y$$

pre každý index $n \in \mathbb{N}$ a každú dvojicu vektorov $y, \tilde{y} \in K$. Postupnosť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je teda ohraničená na množine K, a teda množina

$$\{\varphi_n(y),\ y \in K,\ n \in \mathbb{N}\} \text{ je prekompaktná v } \mathbb{C}.$$

Ďalej funkcie φ_n, $n \in \mathbb{N}$, sú rovomerne rovnako spojité na množine K. Podľa Arzelàovej–Ascoliho vety 31 je teda postupnosť $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ prekompaktná v $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$. To znamená, že obsahuje podpostupnosť $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, ktorá je konvergentná v norme $\|\cdot\|_C$ na K. Uvažujme odpovedajúcu podpostupnosť funkcionálov $\{L' g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ v duálnom priestore X'. Ukážeme, že je cauchyovská. Pre ľubovoľnú dvojicu indexov $k, l \in \mathbb{N}$ platí

Dôkaz Vety 32 (pokračovanie).

$$\left\|L'g_{n_k} - L'g_{n_l}\right\|_{X'} = \sup_{x\in B_X[0,1]} \left|[L'g_{n_k}](x) - [L'g_{n_l}](x)\right|$$

$$\overset{(48)}{=} \sup_{x\in B_X[0,1]} |g_{n_k}(Lx) - g_{n_l}(Lx)|$$

$$= \sup_{y\in K} |g_{n_k}(y) - g_{n_l}(y)| = \|g_{n_k} - g_{n_l}\|_C .$$

Postupnosť $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná, a teda i cauchyovská v norme $\|\cdot\|_C$. Podľa poslednej rovnosti to implikuje cauchyovskosť postupnosti $\{L'g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ v X'. A keďže duálny priestor X' je úplný, dostávame, že postupnosť $\{L'g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ i konverguje v X'. To znamená, že celá postupnosť $\{L'g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X'$ je prekompaktná. Preto adjungovaný operátor L' je v súlade s Definíciou 14 kompaktný.
Predpokladajme teraz, že adjungovaný operátor $L' : Y' \to X'$ je kompaktný. Využitím skutočnosti, že každý normovaný priestor X sa dá izometricky vnoriť do svojho druhého duáleho priestoru X'', ukážeme, že i operátor L je kompaktný. Z toho, čo sme zatiaľ dokázali, vieme, že operátor $L'' := (L')' : X'' \to Y''$ adjungovaný k L' je kompaktný. Nech $\pi : X \to X''$ je prirodzené vnorenie priestoru X do druhého duálneho priestoru X'', t.j.,

$$\pi(x) = F_x, \quad F_x \in X'', \quad \text{kde } F_x(f) = f(x), \quad x \in X, \quad f \in X'. \tag{82}$$

Dôkaz Vety 32 (pokračovanie).

Pripomeňme, že $\|\pi(x)\|_{X''} = \|x\|_X$. Ďalej vieme, že norma každého vektor $y \in Y$ sa dá vyjadriť "duálne" v tvare

$$\|y\|_Y = \max\left\{|g(y)|,\ g \in Y' \text{ s } \|g\|_{Y'} \leq 1\right\}. \tag{83}$$

Uvažujme nejakú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$. Potom v súlade s (82) postupnosť $\{\pi(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X''$ a pre každý index $n \in \mathbb{N}$ a funkcionál $g \in Y'$ platí

$$[L''\pi(x_n)](g) \overset{(48)}{=} [\pi(x_n)](L'g) \overset{(82)}{=} [L'g](x_n) \overset{(48)}{=} g(Lx_n) \tag{84}$$

Následne, pre ľubovoľné dva indexy $k, l \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}
\|Lx_k - Lx_l\|_Y &\overset{(83)}{=} \max\left\{|g(Lx_k - Lx_l)|,\ \|g\|_{Y'} \leq 1\right\} \\
&\overset{(84)}{=} \max\left\{\left|[L''(\pi(x_k) - \pi(x_l))](g)\right|,\ \|g\|_{Y'} \leq 1\right\} \\
&\overset{(6)}{=} \left\|L''\pi(x_k) - L''\pi(x_l)\right\|_{Y''}. \qquad (85)
\end{aligned}$$

Predpokladajme, že postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ je ohraničená v norme. Potom aj postupnosť $\{\pi(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X''$ je ohraničená. Keďže operátor L'' je kompaktný, postupnosť $\{L''\pi(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y''$ je prekompaktná, t.j., existuje podpostupnosť $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ taká, že $\{L''\pi(x_{n_i})\}_{i=1}^{\infty}$ je konvergentná, a teda i cauchyovská postup-

Dôkaz Vety 32 (pokračovanie).

nosť v Y''. Vďaka rovnosti (85) je cauchyovská i postupnosť $\{Lx_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subseteq Y$. A nakoľko priestor Y je úplný, postupnosť $\{Lx_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ je konvergentná v Y. Celkovo je teda postupnosť $\{Lx_n\}_{n=1}^{\infty}$ prekompaktná v Y. To znamená, že v zhode s Definíciou 14 je operátor L kompaktný. Dôkaz je teraz kompletný. ■

Túto sekciu zakončíme trojicou tzv. Fredholmových viet týkajúcich sa lineárnych kompaktných operátorov. Ako uvidíme neskôr, tieto výsledky budú mať dôležité uplatnenie v spektrálnej teórii týchto operátorov.

Veta 33 (Fredholmove vety)

Nech X je Banachov priestor, $L : X \to X$ je lineárny kompaktný operátor a $L' : X' \to X'$ jeho adjungovaný operátor. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Operátor $I - L$ je injektívny práve vtedy, keď je surjektívny.*

(ii) *Podpriestory $\mathcal{R}(I - L)$ a $\mathcal{R}(I' - L')$ sú uzavreté v X a v X' a platí*

$$\mathcal{R}(I - L) = {}^{\perp}[\mathrm{Ker}\,(I' - L')], \quad \mathcal{R}(I' - L') = [\mathrm{Ker}\,(I - L)]^{\perp}. \tag{86}$$

(iii) *Podpriestory $\mathrm{Ker}\,(I - L)$ a $\mathrm{Ker}\,(I' - L')$ majú rovnakú konečnú dimenziou.*

Dôkaz Vety 33 vykonáme postupne v niekoľkých krokoch. Budeme predpokladať, že X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je lineárny a kompaktný operátor.

Veta 34

Podpriestor $\mathrm{Ker}\,(I-L)$ *má konečnú dimenziu a podpriestor* $\mathcal{R}(I-L)$ *je uzavretý.*

Dôkaz Vety 34.

Označme $X_L := \mathrm{Ker}\,(I-L)$. Vďaka linearite L je operátor $I-L$ spojitý, a tak $X_L \subseteq X$ je uzavretý v X. Obvzlášť, X_L je Banachov priestor a platí

$$(I-L)x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad Lx = x \quad \text{pre každé } x \in X_L.$$

Operátor L sa na úplnom podpriestore X_L teda správa ako identický operátor. A keďže podľa predpokladu L je kompaktný operátor, podľa Príkladu 18 je nutne $\dim X_L < \infty$. Nech $A \subseteq X$ je topologický doplnok podpriestoru X_L v X, t.j.,

$$X = X_L \oplus_t A. \tag{87}$$

Množina A je uzavretý, a teda úplný podpriestor v X. Keďže podľa (87) sú zrejme obory hodnôt operátorov $I-L$ a $I-L|_A$ rovnaké, stačí sa obmedziť na pôsobenie $I-L$ na podpriestore A. Ukážeme, že operátor $I-L$ je zdola ohraničený na A. Sporom predpokladajme, že to nie je pravda. Potom existuje

Dôkaz Vety 34 (pokračovanie).

$$\text{postupnosť } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S_A[0,1] \text{ taká, že } \lim_{n\to\infty}(I-L)x_n = 0. \tag{88}$$

Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a operátor $L : A \to X$ je kompaktný. Preto existuje vybraná podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\{Lx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje v X. Označme $x := \lim_{k\to\infty} Lx_{n_k}$. Platí $x_{n_k} = Lx_{n_k} + (I-L)x_{n_k}$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, a tak máme

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \overset{(88)}{=} \lim_{k\to\infty}\left(Lx_{n_k} + (I-L)x_{n_k}\right) = x. \tag{89}$$

Keďže podpriestor A je uzavretý, vektor $x \in A$. Naviac z (89) vyplýva, že $\|x\|_A = \lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}\|_A = 1$. Na druhej strane, vďaka spojitosti operátora $I - L$ výsledok v (89) implikuje, že $\lim_{k\to\infty}(I-L)x_{n_k} = (I-L)x$, čo v kombinácii s (88) dáva rovnosť $(I-L)x = 0$. Teda vektor $x \in X_L \cap A$, čo v súlade s (87) znamená, že $x = \{0\}$. To je však s rozpore s tým, že norma $\|x\|_A = 1$. Preto operátor $I - L$ je skutočne zdola ohraničený na A. Následne, podľa Vety 13(ii) je jeho obor hodnôt $\mathcal{R}(I-L)$ uzavretý v priestore X. ■

Veta 35

Uvažujme postupnosť podpriestorov $X_n := \mathcal{R}\left[(I-L)^n\right]$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Potom*

(i) *podpriestor* X_n *je uzavretý a* $X_{n+1} \subseteq X_n$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}_0$*;*

(ii) *existuje index* $m \in \mathbb{N}_0$ *taký, že* $X_n = X_m$ *pre každé* $n \geq m$*.*

Dôkaz Vety 35.

Pomocou matematickej indukcie nie je ťažké dokázať platnosť rovnosti

$$X_{n+1} = (I-L)(X_n) \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}_0. \tag{90}$$

Triviálne platí, že podpriestor $X_0 = X$ je uzavretý. Ďalej podľa Vety 34 je podpriestor $X_1 = \mathcal{R}(I-L)$ uzavretý v X. V súlade s (90) možno podpriestor X_2 interpetovať ako obor hodnôt operátora $I-L : X_1 \to X$. Podpriestor X_1 je úplný, takže opäť podľa Vety 34 je podpriestor X_2 uzavretý. Takýmto spôsobom sa induktívne dokáže uzavretosť každého podpriestoru X_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Podobne opakovaným použitím rovností v (90) dokážeme inklúziu v tvrdení (i). Zrejme $X_1 = \mathcal{R}(I-L) \subseteq X = X_0$. Pre zvolené $n \in \mathbb{N}$ postupne platí

$$X_{n+1} \overset{(90)}{=} (I-L)(X_n) \overset{(90)}{=} (I-L)^2(X_{n-1}) \overset{(90)}{=} \cdots \overset{(90)}{=} (I-L)^n(X_1) \subseteq X_n.$$

Pristúpime teraz k dôkazu tvrdenia (ii) Sporom predpokladajme, že uvedený index m, od ktorého je postupnosť $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ stacionárna, neexistuje. To zname-

Dôkaz Vety 35 (pokračovanie).

ná, že existuje rastúca postupnosť indexov $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ s vlastnosťou

$$X_{n_k+1} \subsetneq X_{n_k} \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{91}$$

Podľa Rieszovej lemy potom pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje vektor $x_k \in X$ taký, že

$$x_k \in X_{n_k}, \quad \|x_k\|_{X_{n_k}} = 1, \quad d\left(x_k, X_{n_k+1}\right) \geq \frac{1}{2}. \tag{92}$$

Ukážeme, že postupnosť $\{Lx_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ nie je cauchyovská v priestore X. Nech $k, l \in \mathbb{N}$ sú ľubovoľné indexy s $k < l$. Potom $n_k < n_l$, $n_k + 1 \leq n_l$ a v súlade s (91) a s tvrdením (i) máme

$$X_{n_l+1} \overset{(91)}{\subsetneq} X_{n_l} \subseteq X_{n_k+1}. \tag{93}$$

Ďalej vektor $Lx_k - Lx_l = x_k - [(I-L)x_k + (I-L)x_l - x_l]$, pričom označme $y := (I-L)x_k + (I-L)x_l - x_l$. Platia inklúzie

$$(I-L)x_k \overset{(92)}{\subseteq} (I-L)(X_{n_k}) \overset{(90)}{=} X_{n_k+1},$$

$$(I-L)x_l \overset{(92)}{\subseteq} (I-L)(X_{n_l}) \overset{(90)}{=} X_{n_l+1} \overset{(93)}{\subsetneq} X_{n_k+1},$$

$$x_l \overset{(92)}{\in} X_{n_l} \overset{(93)}{\subseteq} X_{n_k+1}.$$

Dôkaz Vety 35 (pokračovanie).

To znamená, že vyššie definovaný vektor $y \in X_{n_k+1}$. Následne máme

$$\|Lx_k - Lx_l\|_X = \|Lx_k - Lx_l\|_{X_{n_k}} = \|x_k - y\|_{X_{n_k}} \overset{(92)}{\geq} \frac{1}{2}. \tag{94}$$

Doplňme, že prvá rovnosť v (94) vyplýva z toho, že podpriestor $X_{n_k} \subseteq X$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Vidíme teda, že postupnosť $\{Lx_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ skutočne nie je cauchyovská, a teda ani konvergentná v priestore X. To je však spor s tým, že operátor L je kompaktný a postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená (podľa (92)). Konkrétne, z postupnosti $\{Lx_k\}_{k=1}^{\infty}$ sa musí dať vybrať podpostupnosť, ktorá konverguje v priestore X. Preto tvrdenie (ii) platí a dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 19

Poznamenajme, že podobné výsledky ako vo Vete 35 je možné odvodiť i pre jadrá operátorov $(I - L)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Konkrétne, platí

- **(i)** $\mathrm{Ker}\,[(I-L)^n] \subseteq \mathrm{Ker}\left[(I-L)^{n+1}\right]$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$;
- **(ii)** existuje $\tilde{m} \in \mathbb{N}_0$ tak, že $\mathrm{Ker}\,[(I-L)^n] = \mathrm{Ker}\left[(I-L)^{\tilde{m}}\right]$ pre $n \geq \tilde{m}$.

V zhode s Vetou 34 majú všetky podpriestory $\mathrm{Ker}\,[(I-L)^n]$, $n \in \mathbb{N}_0$, konečné dimenzie, čo výrazne zjednodušuje dôkazy uvedených tvrdení.

Pristúpime teraz k dôkazu Fredholmových viet vo Vete 33.

Dôkaz Vety 33.

Dôkaz I. Fredholmovej vety – Veta 33(i)

Nech operátor $I - L$ je injektívny. Potom zobrazenie $I - L : X_n \to X_{n+1}$, kde X_n sú podpriestory z Vety 35, je bijektívne pre každé $n \in \mathbb{N}_0$. Obzvlášť, z rovnosti (90) vyplýva, že platí

$$X_n = (I - L)^{-1}(X_{n+1}) \tag{95}$$

Nech $m \in \mathbb{N}_0$ je index vo Vete 35(ii). Pomocou rovnosti (95) máme

$$X_{m+1} = X_m \quad \longrightarrow \quad (I - L)^{-1}(X_{m+1}) = (I - L)^{-1}(X_m) \quad \xrightarrow{(95)} \quad X_m = X_{m-1}.$$

Využitím princípu matematickej indukcie tak dostávame

$$X_m = X_{m-1} = X_{m-2} = \cdots = X_2 = X_1 = X_0 = X.$$

Platí teda $\mathcal{R}(I - L) = X_1 = X_0 = X$, t.j., operátor $I - L$ je surjektívny. Naopak, predpokladajme, že $I - L$ je surjektívny operátor. Využitím rovností v (58) vo Vete 22 a faktu, že adjungovaný operátor $(I - L)' = I' - L'$, máme

$$\operatorname{Ker}(I' - L') = [\mathcal{R}(I - L)]^{\perp}, \quad \operatorname{Ker}(I - L) = {}^{\perp}[\mathcal{R}(I' - L')]. \tag{96}$$

Keďže $\mathcal{R}(I - L) = X$, podľa Vety 21 platí $[\mathcal{R}(I - L)]^{\perp} = X^{\perp} = \{0\} \subseteq X'$. Z

Dôkaz Vety 33 (pokračovanie).

prvej rovnosti v (96) ihneď dostaneme $\operatorname{Ker}(I' - L') = \{0\}$, t.j., operátor $I' - L'$ je injektívny. A keďže podľa Schauderovej Vety 32 je adjungovaný operátor L' kompaktný, v súlade s už dokázanou časťou tvrdenia dostávame, že operátor $I' - L'$ je nutne i surjektívny. To znamená, že $\mathcal{R}(I' - L') = X'$. Potom ${}^{\perp}[\mathcal{R}(I' - L')] = {}^{\perp}X' = \{0\} \subseteq X$, opäť podľa Vety 21. Následnou aplikáciou druhej formuly v (96) získame $\operatorname{Ker}(I - L) = \{0\}$, čo znamená, že operátor L je injektívny. Dôkaz Vety 33(i) je kompletný.

Dôkaz II. Fredholmovej vety – Veta 33(ii)

Ako sme už spomenuli v dôkaze Vety 33(i), adjungovaný operátor L' je tiež kompaktný, takže uzavretosť podpriestorov $\mathcal{R}(I - L)$ a $\mathcal{R}(I' - L')$ vyplýva z Vety 34. Prvá rovnosť v (86) je dôsledkom prvej rovnosti v (59) v Poznámke 12 (pre $L := I - L$). Zároveň druhá relácia v (59) implikuje v našom prípade inklúziu $\mathcal{R}(I' - L') \subseteq [\operatorname{Ker}(I - L)]^{\perp}$. Zostáva teda dokázať inklúziu

$$[\operatorname{Ker}(I - L)]^{\perp} \subseteq \mathcal{R}(I' - L'). \tag{97}$$

Využijeme označenie a poznatky z dôkazu Vety 34. Tam sme dokázali, že operátor $I - L$ je zdola ohraničený na podpriestore A, kde A je topologický doplnok podpriestoru $\operatorname{Ker}(I - L)$ v X. Podľa Vety 14 je potom $(I - L)^{-1} : \mathcal{R}(I - L) \to A$ spojitý lineárny operátor. Nech $g \in [\operatorname{Ker}(I - L)]^{\perp}$ je daný funkcionál. V súlade

Dôkaz Vety 33 (pokračovanie).

s (55) v Definícii 10 máme

$$g(x) = 0 \quad \text{pre každé } x \in \operatorname{Ker}(I-L), \text{ t.j., pre každé } x \in X \text{ s } Lx = x. \tag{98}$$

Potrebujeme nájsť vhodný funkcionál $f \in X'$ tak, aby platilo $g = (I' - L')f$. Definujme funkcionál $\varphi : \mathcal{R}(I-L) \to \mathbb{C}$ predpisom

$$\varphi(y) := \left[g \circ (I-L)^{-1}\right](y), \qquad y \in \mathcal{R}(I-L). \tag{99}$$

Vzhľadom k vyššie uvedenému je φ spojitý a lineárny funkcionál na uzavretom podpriestore $\mathcal{R}(I-L)$. Podľa Hahnovej–Banachovej vety sa φ dá rozšíriť na celý priestor X, t.j., existuje funkcionál $f \in X'$ s vlastnosťami

$$\|f\| = \|\varphi\| \quad \text{a} \quad f \equiv \varphi \text{ na podpriestore } \mathcal{R}(I-L). \tag{100}$$

Pre každý vektor $x \in \operatorname{Ker}(I-L)$ platí

$$[(I'-L')f](x) = f\left((I-L)x\right) = f(0) = 0 \stackrel{(98)}{=} g(x). \tag{101}$$

Podobne pre každý vektor $x \in A$ máme (vo výpočte položíme $y := (I-L)x$)

$$[(I'-L')f](x) = f\left((I-L)x\right) = f(y) \stackrel{(100)}{=} \varphi(y) \stackrel{(99)}{=} g\left((I-L)^{-1}y\right) = g(x). \tag{102}$$

Spojité lineárne funkcionály $(I'-L')f$ a g sa teda rovnajú na oboch podpriestoroch $\operatorname{Ker}(I-L)$ a A. Keďže v súlade s (87) platí $X = \operatorname{Ker}(I-L) \oplus_t A$,

Dôkaz Vety 33 (pokračovanie).

dostávame rovnosť $(I' - L')f = g$ na celom priestore X. Preto $g \in \mathcal{R}(I' - L')$ a inklúzia (97) platí. Druhá rovnosť v (86) je teda dokázaná.

Dôkaz III. Fredholmovej vety – Veta 33(iii)

Keďže adjungovaný operátor L' je kompaktný, z Vety 34 vieme, že obidva podpriestory $\operatorname{Ker}(I - L)$ a $\operatorname{Ker}(I' - L')$ majú konečné dimenzie. Označme

$$n := \dim \operatorname{Ker}(I - L), \quad m := \dim \operatorname{Ker}(I' - L'). \tag{103}$$

Ukážeme, že predpoklady nerovností $n < m$ a $n > m$ povedú k sporom. Nech $\{x_1, \ldots, x_n\}$ je algebraická báza podpriestoru $\operatorname{Ker}(I - L) \subseteq X$ a $\{f_1, \ldots, f_m\}$ je algebraická báza podpriestoru $\operatorname{Ker}(I' - L') \subseteq X'$. Nech $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq X'$ a $\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq X$ sú systémy funkcionálov a vektorov s vlastnosťami

$$\varphi_k(x_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, n, \quad \text{a} \quad f_k(y_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, m, \tag{104}$$

kde δ_{kl} je Kroneckerov delta-symbol. Predpokladajme, že platí nerovnosť $n < m$. Definujme operátor $U : X \to X$ predpisom

$$Ux := Lx + \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(x)\, y_l, \quad x \in X \tag{105}$$

Operátor U v (105) je zrejme súčet lineárneho kompaktného operátora a koneč-

Dôkaz Vety 33 (pokračovanie).

norozmerného lineárneho operátora, jedná sa teda o lineárny kompaktný operátor. Ukážeme, že operátor $I-U$ je injektívny. Nech vektor $x \in \operatorname{Ker}(I-U)$, t.j., platí $Ux = x$. Podľa (105) máme

$$x = Lx + \sum_{k=1}^{n} \varphi_l(x)\, y_l \quad \longrightarrow \quad (I-L)x - \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(x)\, y_l = 0. \tag{106}$$

Následne, pre každý funkcionál f_k, $k = 1, \dots, n$ (platí $n < m$) dostaneme

$$f_k\left((I-L)x - \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(x)\, y_l\right) \overset{(106)}{=} f_k(0) = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$f_k\left((I-L)x\right) - \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(x)\, f_k(y_l) = 0,$$

$$\Downarrow \quad (104) \quad \Downarrow$$

$$\underbrace{\left[(I'-L')f_k\right]}_{0}(x) - \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(x)\, \delta_{kl} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dôkaz Vety 33 (pokračovanie).

V súlade s (106) teda platí $(I - L)x =$, t.j., vektor $x \in \operatorname{Ker}(I - L)$. To znamená, že vektor x sa dá vyjadriť v tvare $x = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l x_l$ pre vhodnú n-ticu skalárov $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Avšak máme

$$0 = \varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \, \varphi_k(x_l) \overset{(104)}{=} \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \, \delta_{kl} = \lambda_k \quad \text{pre každé } k = 1, \ldots, n.$$

Preto vektor $x = 0$ a operátor $I - U$ je skutočne injektívny. Podľa už dokázanej Vety 33(i) je zároveň aj surjektívny. Vektor y_{n+1} je preto prvkom podpriestoru $\mathcal{R}(I - U)$, t.j., existuje $\tilde{x} \in X$ také, že platí $y_{n+1} = (I - U)\tilde{x}$ (platí $n < m$, takže $n + 1 \leq m$). Podľa (104) je $f_{n+1}(y_{n+1}) = 1$. Na druhej strane máme

$$f_{n+1}(y_{n+1}) = f_{n+1}\left((I - U)\tilde{x}\right) \overset{(105)}{=} f_{n+1}\left((I - L)\tilde{x} - \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(\tilde{x})\, y_l\right)$$

$$= f_{n+1}\left((I - L)\tilde{x}\right) - \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(\tilde{x})\, f_{n+1}(y_l)$$

$$\overset{(104)}{=} \underbrace{\left[(I' - L')f_{n+1}\right]}_{0}(\tilde{x}) - \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(\tilde{x}) \underbrace{\delta_{(n+1)l}}_{0} = 0.$$

Dospeli sme teda k sporu. Predpokladajme teraz, že platí nerovnosť $n > m$. Bu-

Dôkaz Vety 33 (pokračovanie).

deme teraz pracovať s operátorom $V : X' \to X'$, ktorý je definovaný predpisom

$$Vg := L'g + \sum_{l=1}^{m} g(y_l)\,\varphi_l, \quad g \in X' \tag{107}$$

Operátor V v (107) je opäť o lineárny kompaktný operátor. Ukážeme, že operátor $I' - V$ je injektívny. Nech funkcionál $g \in \operatorname{Ker}(I' - V)$, t.j., $Vg = g$. Potom

$$g = L'g + \sum_{l=1}^{m} g(y_l)\,\varphi_l \quad \longrightarrow \quad (I - L')g - \sum_{l=1}^{m} g(y_l)\,\varphi_l = 0 \tag{108}$$

v zhode s (107). Následne, pre každé x_k, $k = 1, \ldots, m$ (platí $n > m$) máme

$$\left[(I - L')g\right](x_k) - \sum_{l=1}^{n} g(y_l)\,\varphi_l(x_k) \overset{(108)}{=} 0,$$

$$\Downarrow \quad (104) \quad \Downarrow$$

$$\underbrace{g\left((I - L)x_k\right)}_{0} - \sum_{l=1}^{n} g(y_l)\,\delta_{lk} = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(y_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

V súlade s (108) teda platí $(I' - L')x =$, t.j., funkcionál $g \in \operatorname{Ker}(I' - L')$. To

Dôkaz Vety 33 (pokračovanie).

znamená, že funkcionál g sa dá vyjadriť v tvare $g = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l f_l$ pre vhodnú m-ticu skalárov $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Platí

$$0 = g(y_k) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \, f_l(y_k) \overset{(104)}{=} \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \, \delta_{lk} = \lambda_k \quad \text{pre každé } k = 1, \dots, m.$$

Preto funkcionál $g = 0$ a operátor $I' - V$ je skutočne injektívny. Podľa Vety 33(i) je teda aj surjektívny, a tak funkcionál $\varphi_{m+1} = (I' - V)\tilde{g}$ pre vhodné $g \in X'$ (platí $n > m$, takže $n \geq m + 1$). Podľa (104) je $\varphi_{m+1}(x_{m+1}) = 1$. Avšak

$$\varphi_{m+1}(x_{m+1}) = [(I' - V)g](x_{m+1}) \overset{(107)}{=} [(I - L')g](x_{m+1}) - \sum_{l=1}^{m} g(y_l) \, \varphi_l(x_{m+1})$$

$$\overset{(104)}{=} \underbrace{g((I - L)x_{m+1})}_{0} - \sum_{l=1}^{m} g(y_l) \, \delta_{l(m+1)} = 0.$$

Dospeli sme teda opäť k sporu. Preto musí platiť rovnosť $n = m$, t.j., dimenzie

$$\dim \operatorname{Ker}(I - L), \quad \dim \operatorname{Ker}(I' - L')$$

sú rovnaké, v súlade s (103). Tvrdenie tretej Fredholmovej vety je teda dokázané. Napokon je tým i završený kompletný dôkaz Vety 33. ∎

Poznámka 20

Poznamenajme, že prvá Fredholmova Veta 33(i) sa v literatúre často označuje ako Fredholmova alternatíva (obzvlášť v kontexte spektrálnej teórie kompaktných operátorov). Tvrdenie Vety 33(i) sa totiž dá ekvivalentne formulovať vo forme alternatívy, konkrétne v tvare

rovnica $(I - L)x = y$ má pre každé $y \in X$ riešenie

alebo

rovnica $(I - L)x = 0$ má netriviálne riešenie,

pričom vždy platí práve jeden z uvedených výrokov. Podobne i druhá Fredholmova Veta 33(ii) má svoju "algebraickú" interpretáciu. Napríklad prvá rovnosť v (86) znamená, že

rovnica $(I - L)x = y$ má pre dané $y \in X$ riešenie

práve vtedy, keď

y je "kolmé" na každé riešenie homogénnej adjungovanej rovnice $(I' - L')f = 0$.

Analogicky sa dá interpretovať i druhá rovnosť v (86). Napokon, tretia Fredholmova Veta 33(iii) hovorí, že obidve homogénne rovnice $(I - L)x = 0$ a $(I' - L')f = 0$ majú rovnaký počet lineárne nezávislých riešení.

Obsah

Motivácia – vlastné hodnoty matíc

V základnom kurze lineárnej algebry sa rieši klasický problém nájdenia vlastných čísiel štvorcovej matice. Konkrétne, ak $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je daná matica, potom komplexné číslo λ sa označuje ako vlastná hodnota matice A, ak platí

$$Ax = \lambda x \quad \text{pre nejaký nenulový vektor } x \in \mathbb{C}^n. \tag{109}$$

Inými slovami, matica $A - \lambda I_n$ je singulárna, t.j., $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Táto podmienka zároveň ukazuje aj spôsob, ako určiť všetky vlastné hodnoty matice A. Je to práve množina všetkých riešení polynomiálnej charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Na druhej strane, podmienka (109) hovorí, že lineárne zobrazenie $\varphi_\lambda : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, ktoré je vo vhodnej báze reprezentované maticou $A - \lambda I_n$, nie je injektívne. Priestor $\mathbb{C}^n$ má konečnú dimenziu n, a tak platí

$$\dim \operatorname{Im} \varphi_\lambda + \dim \operatorname{Ker} \varphi_\lambda = n.$$

Preto podmienka (109) je ekvivalentná i s vlastnosťou, že zobrazenie φ_λ nie je surjektívne. Množinu $\mathbb{C}$ môžeme teda zapísať ako disjunktné zjednotenie

$$\mathbb{C} = \{\text{vlastné čísla matice } A\} \cup \{\lambda, \text{ pre ktoré je matica } A - \lambda I_n \text{ invertibilná}\}.$$

Pojem invertibilného operátora

Definícia 15 (Invertibilný operátor)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ lineárny operátor s definičným oborom $\mathcal{D}(L)$ hustým v X. Hovoríme, že L je invertibilný, ak obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ je hustý v X a existuje spojitý lineárny operátor $K \in \mathcal{L}(X)$ s vlastnosťou

$$K \circ L = I_{\mathcal{D}(L)} \quad \text{a} \quad L \circ K = I_{\mathcal{R}(L)}. \tag{110}$$

Veta 36

Každý lineárny invertibilný operátor $L : X \to X$ na Banachovom priestore X je injektívny a jeho inverzia $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X$ je spojitý lineárny operátor.

Dôkaz Vety 36.

Nech L je invertibilný operátor a $K \in \mathcal{L}(X)$ je k nemu odpovedajúci operátor v (110) v Definícii 15. Ak vektor $x \in \mathcal{D}(L)$ spĺňa $Lx = 0$, potom podľa prvej rovnosti v (110) máme $x = K(Lx) = K0 = 0$, vďaka linearite operátora K. To dokazuje injektívnosť (lineárneho) zobrazenia L. Inverzia $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X$ teda existuje a zrejme $L^{-1} = K|_{\mathcal{R}(L)}$ podľa (110). Z Definície 15 platí, že K je spo-

Dôkaz Vety 36 (pokračovanie).

jitý lineárny operátor. To dokazuje i spojitosť inverzného operátora L^{-1}. ■

Poznámka 21

Z Definície 15 a Vety 36 vyplýva, že invertibilný operátor L spĺňa podmienky

(i) existuje inverzný operátor L^{-1},

(ii) operátor $L^{-1} : \mathcal{R}(L) \to X$ je spojitý,

(iii) obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ je hustý v priestore X.

V nasledujúcom tvrdení ukážeme, že tieto tri podmienky zároveň i charakterizujú lineárne invertibilné operátory na Banachových priestoroch. Doplňme, že podľa (38) podmienky (i) a (ii) znamenajú, že operátor L je ohraničený zdola na $\mathcal{D}(L)$.

Veta 37

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je lineárny operátor. Potom L je invertibilný operátor práve vtedy, keď spĺňa podmienky (i)–(iii) v Poznámke 21.

Dôkaz Vety 37.

Dokážeme, že ak lineárny operátor L splňa podmienky (i)–(iii) v Poznámke 21, potom je invertibilný. Položme $K := L^{-1}$. Lineárny operátor $K : \mathcal{R}(L) \to X$ zrejme spĺňa rovnosti v (110). Naviac, podľa podmienky (ii) v Poznámke 21 je spojitý na podpriestore $\mathcal{R}(L)$. Keďže obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ je hustý v X, v súlade s Vetou 4 je možné operátor K jednoznačne spojito rozšíriť na celý priestor X. Podľa Definície 15 je teda operátor L invertibilný. ∎

Poznámka 22 (Invertibilita spojitého operátora)

Situácia sa podstatne zjednodušuje v prípade, keď lineárny operátor $L : X \to X$ je spojitý (uzavretý) na priestore X. Podľa druhej časti Poznámky 21 invertibilný operátor L je ohraničený zdola. Ak je naviac i spojitý (uzavretý), potom v súlade s Vetou 13 je operátor L injektívny a podpriestor $\mathcal{R}(L)$ uzavretý v X. Podľa Vety 37 a prvej časti Poznámky 21 sa preto vyšetrovanie invertibility spojitých (uzavretých) lineárnych operátorov redukuje sa zisťovanie ich bijektívnosti.

Veta 38 (Invertibilita spojitého operátora)

Nech X je Banachov priestor. Spojitý (uzavretý) lineárny operátor $L : X \to X$ je invertibilný práve vtedy, keď je bijektívny.

Veta 39 (Hustota oboru hodnôt spojitého operátora)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je spojitý (uzavretý) lineárny operátor. Potom obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ je hustý v priestore X práve vtedy, keď odpovedajúci adjungovaný operátor $L' : X' \to X'$ je injektívny.

Dôkaz Vety 39.

Ak $\overline{\mathcal{R}(L)} = X$, potom podľa (59) s využitím Vety 21 a Poznámkou 11 platí

$$\left({}^{\perp}[\operatorname{Ker} L']\right)^{\perp} \overset{(59)}{=} \overline{\mathcal{R}(L)}^{\perp} = X^{\perp} = \{0\} \quad \text{a} \quad \operatorname{Ker} L' \overset{(57)}{\subseteq} \left({}^{\perp}[\operatorname{Ker} L']\right)^{\perp}. \tag{111}$$

Z relácií v (111) potom máme $\operatorname{Ker} L' = \{0\}$, čo znamená, že adjungovaný operátor L' je injektívny. Naopak, nech L' je injekívny operátor, t.j., platí rovnosť $\operatorname{Ker} L' = \{0\}$. Z formuly (59) máme $\overline{\mathcal{R}(L)} = {}^{\perp}[\operatorname{Ker} L'] = {}^{\perp}\{0\} = X$ v súlade s Poznámkou 11. Obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ operátora L je teda hustý v priestore X. ■

Príklad 22

Uvažujme priestor $X = l^2$ a operátor $L : X \to X$ s predpisom

$$L\{x_n\} := \{0, x_1, x_2, \dots\}, \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X. \tag{112}$$

Príklad 22

Operátor L v (112) je lineárny a injektívny s ohraničenou inverziou L^{-1}, nakoľko

$$L^{-1}\{y_n\} := \{y_2, y_3, y_4, \dots\}, \quad \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}(L). \tag{113}$$

Napriek tomu sa nejedná o invertibilný operátor, pretože $d(e_1, \mathcal{R}(L)) \geq 1$, kde postupnosť $e_1 = \{1, 0, 0 \dots\}$. Obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ teda nie je hustý v X.

Príklad 23

Uvažujme opäť $X = l^2$ a operátor $L : X \to X$ definovaný predpisom

$$L\{x_n\} := \left\{\frac{x_n}{n}\right\}, \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X. \tag{114}$$

Operátor L v (114) je lineárny a injektívny. Podobne, nie je ťažké ukázať, že $\mathcal{R}(L) = \left\{\{y_n\} \in l^2, \ \sum |ny_n|^2 < \infty\right\}$ je podpriestor hustý v X. Operátor L však nie je invertibilný, pretože inverzia L^{-1} je neohraničená. Podľa (114) máme

$$L^{-1}\{y_n\} := \{ny_n\}, \quad \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{R}(L). \tag{115}$$

Pre postupnosti $e_k = \{\delta_{kn}\}_{n=1}^{\infty} \in X$, $k \in \mathbb{N}$, máme $\|e_k\|_X = 1$ a $e_k \in \mathcal{R}(L)$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Podľa (115) potom $\|L^{-1}e_k\|_X = k$, $k \in \mathbb{N}$. To dokazuje neohraničenosť operátora L^{-1}, a teda i jeho nespojitosť na podpriestore $\mathcal{R}(L)$.

Spektrum lineárneho operátora

Definícia 16 (Rezolventná množina operátora)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je lineárny operátor s definičným oborom $\mathcal{D}(L)$ hustým v X. Komplexné číslo λ sa označuje ako regulárna hodnota operátora L, ak operátor $L - \lambda I$ je invertibilný. Množina všetkých regulárnych hodnôt operátora L sa nazýva rezolventná množina operátora L a budeme ju označovať symbolom $\rho(L)$. Pre každé $\lambda \in \rho(L)$ sa operátor

$$R_\lambda := (L - \lambda I)^{-1} \tag{116}$$

nazýva rezolventa operátora L odpovedajúca regulárnej hodnote λ.

Definícia 17 (Spektrum operátora)

V súlade s označením v Definícii 16 sa množina

$$\sigma(L) := \mathbb{C} \setminus \rho(L) \tag{117}$$

nazýva spektrum operátora L.

Z definície spektra lineárneho operátora $L : X \to X$ teda vyplýva, že sa jedná práve o tie komplexné čísla λ, pre ktoré operátor $L - \lambda I$ nie je invertibilný.

Definícia 18 (Klasifikácia bodov spektra operátora)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je lineárny operátor s definičným oborom $\mathcal{D}(L)$ hustým v X. Štandardne sa body spektra $\sigma(L)$ operátora L klasifikujú do troch disjunktných množín.

Bodové spektrum – vlastné hodnoty operátora – komplexné čísla λ, pre ktoré operátor $L - \lambda I$ nie je injektívny. Vektory $x \in \mathcal{D}(L) \setminus \{0\}$, pre ktoré platí $(L - \lambda I)x = 0$, t.j., $Lx = \lambda x$, sa označujú ako **vlastné vektory** operátora L odpovedajúce vlastnej hodnote λ.

Spojité spektrum – komplexné čísla λ, pre ktoré operátor $L - \lambda I$ je injektívny a obor hodnôt $\mathcal{R}(L - \lambda I)$ je hustý v X, ale inverzia $(L - \lambda I)^{-1}$ nie je spojitá.

Reziduálne spektrum – komplexné čísla λ, pre ktoré operátor $L - \lambda I$ je injektívny, ale obor hodnôt $\mathcal{R}(L - \lambda I)$ nie je hustý v X.

Príklad 24

Priamo z Definície 18 vyplýva, že pre Banachove priestory X s konečnou dimenziou spektrum každého lineárneho operátora $L : X \to X$ pozostáva iba z vlastných hodnôt operátora L, t.j., L má iba bodové spektrum.

Príklad 25

Nájdime rezolventnú množinu $\rho(L)$ a spektrum $\sigma(L)$ lineárneho operátora L z Príkladu 22. Nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je dané komplexné číslo. Pre operátor $L - \lambda I$ platí

$$(L - \lambda I)\{x_n\} = \{y_n\}, \quad \text{kde } y_n \overset{(112)}{=} \begin{cases} -\lambda x_n, & n = 1, \\ x_{n-1} - \lambda x_n, & n > 1. \end{cases} \tag{118}$$

Lineárny operátor $L - \lambda I$ je zrejme definovaný na celom priestore X. Keďže platí $\|L\{x_n\}\|_X = \|\{x_n\}\|_X$ pre každé $\{x_n\} \in X$, operátor $L - \lambda I$ je spojitý. Naviac je vždý injektívny. Skutočne, ak $(L - \lambda I)\{x_n\} = 0$, potom podľa (118)

$$\lambda x_1 = 0, \quad x_{n-1} = \lambda x_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{119}$$

Nie je ťažké overiť, že z relácií v (119) pre každú hodnotu $\lambda \in \mathbb{C}$ vyplýva $x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ďalej máme nerovnosť

$$\begin{aligned} \|(L - \lambda I)\{x_n\}\|_X &= \|L\{x_n\} - \lambda\{x_n\}\|_X \geq \Big| \|L\{x_n\}\|_X - |\lambda| \|\{x_n\}\|_X \Big| \\ &= \Big| \|\{x_n\}\|_X - |\lambda| \|\{x_n\}\|_X \Big| = |1 - |\lambda|| \cdot \|\{x_n\}\|_X, \end{aligned} \tag{120}$$

ktorá platí pre každé $\{x_n\} \in X$ a každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Obzvlášť, ak $|\lambda| \neq 1$, operátor $L - \lambda I$ je v súlade s (38) ohraničený zdola, t.j., jeho inverzia $(L - \lambda I)^{-1}$ je spojitá na podpriestore $\mathcal{R}(L - \lambda I)$. V súlade s Definíciou 18 potrebujeme preve-

Príklad 25

veriť hustotu oboru hodnôt $\mathcal{R}(L-\lambda I)$. Využijeme Vetu 39. Pomerne ľahko sa dá odvodiť, že nakoľko X je Hilbertov priestor, odpovedajúci adjungovaný operátor L' sa dá formálne reprezentovať v tvare

$$L'\{y_n\} := \{y_2, y_3, y_4, \dots\}, \quad \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in X. \tag{121}$$

V súlade s Vetou 39 hľadáme hodnoty $\lambda \in \mathbb{C}$, pre ktoré je adjungovaný operátor $(L-\lambda I)' = L' - \lambda I'$ injektívny. Ak $(L' - \lambda I')\{y_n\} = 0$, potom podľa (121) platí $y_{n+1} = \lambda y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Postupnosť $\{y_n\}$ je teda geometrická s kvocientom λ. A keďže $\{y_n\} \in X = l^2$, nutne $|\lambda| < 1$. Celkovo teda operátor $(L-\lambda I)'$ je injektívny práve vtedy, keď $|\lambda| \geq 1$. Podľa Vety 39 potom platí

$$\text{obor hodnôt } \mathcal{R}(L-\lambda I) \text{ je hustý v priestore } X \text{ práve vtedy, keď } |\lambda| \geq 1. \tag{122}$$

Môžeme pristúpiť k stanovenia rezolventnej množiny a spektra operátora L.

- $|\lambda| > 1$ – operátor $L-\lambda I$ je zdola ohraničený a podľa (122) je množina $\mathcal{R}(L-\lambda I)$ hustá v priestore X. To znamená, že $\lambda \in \rho(L)$, t.j., λ je regulárna hodnota operátora L.
- $\underline{|\lambda| < 1}$ – operátor $L-\lambda I$ je zdola ohraničený, ale podľa (122) platí $\overline{\mathcal{R}(L-\lambda I)} \subsetneq X$. V súlade s Definíciou 18 je preto hodnota λ prvkom reziduálneho spektra operátora L.

Príklad 25

- $|\lambda| = 1$ – v súlade s (122) je množina $\mathcal{R}(L - \lambda I)$ hustá v priestore X, ale operátor $L - \lambda I$ nie je surjektívny. Napríklad $-e_1 \notin \mathcal{R}(L - \lambda I)$, ako sa možno ľahko presvedčiť pomocou (118). Skutočne, pre postupnosť $\{x_n\}$ spĺňajúcu $-e_1 = (L - \lambda I)\{x_n\}$ by muselo platiť
$$x_1 = \bar{\lambda}, \quad x_{n+1} = \bar{\lambda} x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Jednalo by sa teda o geometrickú posupnosť s kvocientom λ. Avšak teraz $|\bar{\lambda}| = |\lambda| = 1$, a tak $\{x_n\} \notin X$. Podľa Vety 38 preto operátor $L - \lambda I$ nie je invertibilný, čo v súlade s Definíciou 17 znamená, že λ je spektrálna hodnota operátora L. Presnejšie, podľa klasifikácie v Definícii 18 sa jedná o prvok spojitého spektra. Všimnime si, že využitím spojitosti operátora $L - \lambda I$ a Vety 38 sme nepriamo dokázali, že inverzia $(L - \lambda I)^{-1}$ je v tomto prípade nespojitá na podpriestore $\mathcal{R}(L - \lambda I)$.

Poznamenajme, že z uvedenej analýzy vyplýva, že operátor L nemá vlastné hodnoty, t.j., jeho bodové spektrum je prázdna množina. Zistili sme teda, že

$$\text{rezolventná množina operátora } L \text{ má tvar } \rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > 1\},$$

$$\text{spektrum operátora } L \text{ má tvar } \sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \le 1\},$$

kde $\{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < 1\}$ je reziduálne spektrum a $\{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1\}$ je spojité spektrum.

Poznámka 23

Z Definícií 16 (s $L := L - \lambda I$) a 15 vyplýva, že ak $\lambda \in \mathbb{C}$ je regulárna hodnota operátora L, potom odpovedajúca rezolventa R_λ definovaná v (116) je zúženie spojitého lineárneho operátora K v (110) na podpriestor $\mathcal{R}(L - \lambda I)$. A keďže množina $\mathcal{R}(L - \lambda I)$ je hustá v priestore X, v kontexte Vety 4 môžeme bez ujmy na všeobecnosti R_λ vnímať ako spojitý lineárny operátor na celom priestore X. S takouto predstavou rezolventy R_λ pre $\lambda \in \rho(L)$ budeme ďalej pracovať.

Veta 40 (Rezolventná identita)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je lineárny operátor s definičným oborom $\mathcal{D}(L)$ hustým v priestore X. Potom pre každé dve regulárne hodnoty $\mu, \nu \in \rho(L)$ operátora L platí tzv. rezolventná identita

$$R_\mu - R_\nu = (\mu - \nu) R_\mu R_\nu. \tag{123}$$

Naviac, operátory R_μ a R_ν komutujú, t.j., platí $R_\mu R_\nu = R_\nu R_\mu$.

Dôkaz Vety 40.

So zreteľom na komentár v Poznámke 23 platia v súlade s prvou rovnosťou v (110) pre každé hodnoty $\mu, \nu \in \rho(L)$ relácie

Dôkaz Vety 40 (pokračovanie).

$$(L-\nu I)\circ R_\nu \overset{(110)}{=} I_{\mathcal{R}(L-\nu I)}, \quad \text{a teda} \quad R_\mu \circ (L-\nu I)\circ R_\nu = R_\mu \circ I_{\mathcal{R}(L-\nu I)}. \tag{124}$$

Keďže všetky zobrazenia v (124) sú lineárne, platí

$$\begin{aligned} R_\mu \circ (L-\nu I)\circ R_\nu &= R_\mu \circ [(L-\mu I) + (\mu-\nu)I]\circ R_\nu \\ &= [R_\mu \circ (L-\mu I) + (\mu-\nu)R_\mu]\circ R_\nu \\ &\overset{(110)}{=} [I_{\mathcal{D}(L)} + (\mu-\nu)R_\mu]\circ R_\nu \\ &= R_\nu + (\mu-\nu)R_\mu \circ R_\nu \end{aligned} \tag{125}$$

Kombináciou (125) a (124) teda dostávame rovnosť

$$R_\nu + (\mu-\nu)R_\mu \circ R_\nu \overset{(125),(124)}{=} R_\mu \circ I_{\mathcal{R}(L-\nu I)},$$

$$\Downarrow$$

$$R_\mu \circ I_{\mathcal{R}(L-\nu I)} - R_\nu = (\mu-\nu)R_\mu \circ R_\nu. \tag{126}$$

Pre každý vektor $x \in \mathcal{R}(L-\nu I)$ potom máme

Dôkaz Vety 40 (pokračovanie).

$$\left[R_\mu \circ I_{\mathcal{R}(L-\nu I)} - R_\nu\right] x = (\mu-\nu)[R_\mu \circ R_\nu]x,$$

$$\Downarrow$$

$$[R_\mu - R_\nu]\, x = (\mu-\nu)[R_\mu \circ R_\nu]x. \tag{127}$$

Pre vektor $x \in X \setminus \mathcal{R}(L-\nu I)$ existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}(L-\nu I)$ s vlastnosťou $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Vďaka spojitosti operátorov R_μ a R_ν platí

$$[R_\mu - R_\nu]\, x = \lim_{n\to\infty} [R_\mu - R_\nu]\, x_n \overset{(127)}{=} \lim_{n\to\infty} (\mu-\nu)[R_\mu \circ R_\nu]x_n$$

$$= (\mu-\nu)[R_\mu \circ R_\nu]x$$

To dokazuje platnosť identity (123). Skutočnosť, že operátory R_μ a R_ν komutujú, vyplýva priamo z dokázanej rezolventnej identity, pretože

$$(\mu-\nu)R_\mu R_\nu \overset{(123)}{=} R_\mu - R_\nu = -(R_\nu - R_\mu) \overset{(123)}{=} (\mu-\nu)R_\nu R_\mu,$$

takže pre $\mu \neq \nu$ platí $R_\mu R_\nu = R_\nu R_\mu$. Dôkaz je hotový. ∎

Veta 41

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je lineárny operátor s definičným oborom $\mathcal{D}(L)$ hustým v priestore X. Nech $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ je regulárna hodnota operátora L a R_{λ_0} je odpovedajúca rezolventa. Potom každé $\lambda \in \mathbb{C}$ spĺňajúce

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} \tag{128}$$

je regulárna hodnota operátora L. To znamená, že rezolventná množina $\rho(L)$ lineárneho operátora L je otvorená podmnožina v $\mathbb{C}$, kým spektrum $\sigma(L)$ lineárneho operátora L je uzavretá podmnožina v $\mathbb{C}$.

Dôkaz Vety 41.

Zvoľme nejaké $\lambda \in \mathbb{C}$, ktoré spĺňa nerovnosť (128). Keďže $\lambda_0 \in \rho(L)$, v zhode s Poznámkou 23 je $Q := (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}$ spojitý lineárny operátor na celom X a

$$\|Q\| = \left\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}\right\| = |\lambda - \lambda_0| \left\|R_{\lambda_0}\right\| \overset{(128)}{<} 1. \tag{129}$$

Podľa Vety 12 je potom spojitý lineárny operátor $I - Q$ bijektívny na priestore X. Ukážeme, že platí rovnosť $\mathcal{R}(L - \lambda I) = \mathcal{R}(L - \lambda_0 I)$. Pre $x \in \mathcal{D}(L)$ máme

$$(L - \lambda I)x = (L - \lambda_0 I)x - (\lambda - \lambda_0)x = \left[(L - \lambda_0 I) \circ I_{\mathcal{D}(L)} - (\lambda - \lambda_0)I_{\mathcal{D}(L)}\right] x$$

Dôkaz Vety 41 (pokračovanie).

$$\stackrel{(110)}{=} \left[(L-\lambda_0 I)\circ I_{\mathcal{D}(L)} - (\lambda-\lambda_0)(L-\lambda_0 I)\circ R_{\lambda_0}\right] x$$

$$= \left[(L-\lambda_0 I)\circ \left(I_{\mathcal{D}(L)} - (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\right)\right] x = [(L-\lambda_0 I)\circ(I-Q)]x. \qquad (130)$$

Z odvodenej rovnosti (130) ihneď vyplýva inklúzia $\mathcal{R}(L-\lambda I)\subseteq\mathcal{R}(L-\lambda_0 I)$. Všimnime si, že vektor $(I-Q)x\in\mathcal{D}(L)$. To znamená, že operátor $I-Q$, rovnako ako aj jeho inverzia $(I-Q)^{-1}$, zobrazuje definičný obor $\mathcal{D}(L)$ operátora L do seba. Tieto pozorovania odôvodňujú správnosť výpočtu

$$(L-\lambda_0 I)x = [(L-\lambda_0 I)\circ(I-Q)]\underbrace{(I-Q)^{-1}x}_{\tilde{x}\in\mathcal{D}(L)} \stackrel{(130)}{=} (L-\lambda I)\tilde{x},$$

a jeho platnosť pre každý vektor $x\in\mathcal{D}(L)$. Zároveň máme dokázanú inklúziu $\mathcal{R}(L-\lambda_0 I)\subseteq\mathcal{R}(L-\lambda I)$. V súlade s predpokladmi vety je teda podpriestor $\mathcal{R}(L-\lambda I)$ hustý v X. Napokon dokážeme, že operátor $L-\lambda I$ je invertibilný. Položme $K := (I-Q)^{-1}\circ R_{\lambda_0}$. Jedná o spojitý lineárny operátor na X. Platí

$$[K\circ(L-\lambda I)]x \stackrel{(130)}{=} \left[(I-Q)^{-1}\circ R_{\lambda_0}\circ(L-\lambda_0 I)\circ(I-Q)\right] x$$

$$\stackrel{(110)}{=} \left[(I-Q)^{-1}\circ I_{\mathcal{D}(L)}\circ(I-Q)\right] x = \left[(I-Q)^{-1}\circ(I-Q)\right] x = x$$

Dôkaz Vety 41 (pokračovanie).

pre každé $x \in \mathcal{D}(L)$. To implikuje rovnosť $K \circ (L - \lambda I) = I_{\mathcal{D}_L}$. Podobne pre každý vektor $x \in \mathcal{R}(L - \lambda I) = \mathcal{R}(L - \lambda_0 I)$ máme

$$[(L - \lambda I) \circ K]x = [(L - \lambda I) \underbrace{(Kx)}_{\in \mathcal{D}(L)} \overset{(130)}{=} [(L - \lambda_0 I) \circ (I - Q)]\,(Kx)$$

$$= \left[(L - \lambda_0 I) \circ R_{\lambda_0}\right] x = x$$

To znamená, že platí rovnosť $(L - \lambda I) \circ K = I_{\mathcal{R}(L - \lambda I)}$. Podľa Definície 15 je teda operátor $L - \lambda I$ invertibilný, a tak v súlade s Definíciou 16 je číslo λ regulárna hodnota operátora L, t.j., $\lambda \in \rho(L)$. Nerovnosť (128) ukazuje, že do rezolventnej množiny patrí spolu s bodom λ_0 i jeho otvorenej okolie s polomerom $\varepsilon := \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|} > 0$. Preto je množina $\rho(L)$ otvorená v $\mathbb{C}$. Spektrum $\sigma(L)$, ako doplnok $\rho(L)$ v množine $\mathbb{C}$, je teda uzavretá množina. Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 24

Spojitý lineárny operátor $K = (I - Q)^{-1} \circ R_{\lambda_0}$ z dôkazu Vety 41 je zrejme v súlade s Poznámkou 23 rezolventa R_λ operátora L, ktorá odpovedá danej regulárnej hodnote λ. Využitím fomuly (36) pre operátor Q dostávame

Poznámka 24

$$R_\lambda = (I-Q)^{-1} \circ R_{\lambda_0} \overset{(36)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Q^n \circ R_{\lambda_0}.$$

Keďže $Q = (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}$, podľa poslednej rovnosti v súlade s (128) platí

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1} \quad \text{pre každé } \lambda \in \mathbb{C} \text{ s } |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_{\lambda_0}\|}. \tag{131}$$

Formulu (131) možno v kontexte Vety 41 "voľne" interpretovať tak, že rezolventa R_λ operátora L je ako zobrazenie z $\mathbb{C}$ do $\mathcal{L}(X)$ analytické na rezolventnej množine $\rho(L)$. Tento náhľad potvrdzuje i skutočnosť, že ak lineárny operátor L je naviac i ohraničený, potom podľa Vety 38 je operátor $L - \lambda I$ bijektívny pre každú regulárnu hodnotu $\lambda \in \rho(L)$ a využitím rezolventnej identity (123) platí

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \left(R_\lambda - R_{\lambda_0}\right) \overset{(123)}{=} \lim_{\lambda \to \lambda_0} R_\lambda R_{\lambda_0} = R_{\lambda_0}^2. \tag{132}$$

Relácie v (132) znamenajú, že rezolventa $R_\lambda : \mathbb{C} \to \tilde{\mathcal{L}}(X)$ má silnú (Fréchetovu) deriváciu na rezolventnej množine $\rho(L)$, pričom

$$R'_{\lambda_0} = R_{\lambda_0}^2. \tag{133}$$

Zobrazenie R_λ je teda holomorfné na (otvorenej) množine $\rho(L)$.

Veta 42

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je spojitý lineárny operátor s definičným oborom $\mathcal{D}(L)$ hustým v priestore X. Potom každé komplexné číslo λ spĺňajúce nerovnosť $|\lambda| > \|L\|$ je regulárna hodnota operátora L.

Dôkaz Vety 42.

Nech $\lambda \in \mathbb{C}$ spĺňa nerovnosť $|\lambda| > \|L\|$. Lineárny operátor $L - \lambda I$ je spojitý a pre operátor $\frac{1}{\lambda} L$ platí nerovnosť

$$\left\| \frac{1}{\lambda} L \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \|L\| < 1. \tag{134}$$

Podľa Vety 12 je operátor $L - \lambda I = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} L\right)$ bijektívny a má spojitú inverziu $(L - \lambda I)^{-1}$. Dokážeme, že operátor $L - \lambda I$ je invertibilný. V súlade s Poznámkou 21 a Vetou 37 stačí overiť, že jeho obor hodnôt $\mathcal{R}(L - \lambda I)$ je hustý v priestore X. Využijeme skutočnosti, že podľa formuly (36) má inverzný operátor $(L - \lambda I)^{-1}$ tvar

$$(L - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{1}{\lambda} L\right)^{-1} \overset{(36)}{=} -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} L^n. \tag{135}$$

Dôkaz Vety 42 (pokračovanie).

Pre každý vektor $x \in \mathcal{D}(L)$ je nekonečný rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} L^n x$ absolútne konvergentný v X, pretože X je úplný priestor a číselný rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{\lambda^n} L^n x \right\|_X \quad \text{je (absolútne) konvergentný.} \tag{136}$$

Konvergencia radu (136) vyplýva z nerovností

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^n} \|L^n x\|_X \overset{(7)}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^n} \|L^n\| \cdot \|x\|_X \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|} \|L\| \right)^n \|x\|_X \overset{(134)}{<} \infty.$$

To znamená, že definičný obor inverzného operátora $(L - \lambda I)^{-1}$ obsahuje každý vektor $x \in \mathcal{D}(L)$. Inými slovami, platí inklúzia $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{R}(L - \lambda I)$. Napokon vďaka predpokladu, že množina $\mathcal{D}(L)$ je hustá v priestore X, dostávame

$$X = \overline{\mathcal{D}(L)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(L - \lambda I)} \subseteq X, \text{ t.j., } \overline{\mathcal{R}(L - \lambda I)} = X.$$

Operátor $L - \lambda I$ je teda invertibilný a λ je regulárna hodnota operátora L. ■

Poznámka 25

Z dôkazu Vety 42 vyplýva pre R_λ, ktoré odpovedá hodnotám $|\lambda| > \|L\|$, formula

Poznámka 25

$$R_\lambda \overset{(116),(135)}{=} -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} L^n. \tag{137}$$

V kontexte Poznámky 24 sa jedná o Laurentov rozvoj rezolventy R_λ na okolí ∞. Z (137) možno odvodiť asymptotické vlastnosti operátora R_λ. Konkrétne,

$$\|R_\lambda\| \overset{(137)}{=} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} L^n \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|L\|}{|\lambda|} \right)^n \overset{(134)}{=} \frac{1}{|\lambda| - \|L\|} \tag{138}$$

pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$ s $|\lambda| > \|L\|$. Následne, z nerovnosti (138) máme

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|R_\lambda\| \overset{(138)}{\leq} \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{|\lambda| - \|L\|} = 0, \quad \text{teda} \quad \lim_{\lambda\to\infty} \|R_\lambda\| = 0. \tag{139}$$

Poznamenajme, že rozvoj (137) je určený jednoznačne a platí na každom otvorenom medzikruží $0 \leq r < |\lambda|$, na ktorom je rezolventa R_λ holomorfná.

Dôsledok 4

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je spojitý lineárny operátor s definičným oborom $\mathcal{D}(L)$ hustým v X. Pre spektrum $\sigma(L)$ operátora L platí

$$\sigma(L) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \leq \|L\|\}. \tag{140}$$

Veta 43 (Gelfandova)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ spojitý lineárny operátor s definičným oborom hustým v X. Spektrum $\sigma(L)$ je neprázdna kompaktná množina v $\mathbb{C}$.

Dôkaz Vety 43.

V súlade s Vetou 41 a Dôsledkom 4 je spektrum $\sigma(L)$ operátora L uzavretá a ohraničená množina v $\mathbb{C}$. Jedná sa teda o kompaktnú množinu v $\mathbb{C}$. Ukážeme, že množina $\sigma(L)$ je neprázdna. Sporom predpokladajme, že každé komplexné číslo je regulárna hodnota operátora L, t.j., $\rho(L) = \mathbb{C}$. Podľa Definície 16 to znamená, že operátor $L - \lambda I$ je invertibilný pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Podľa Vety 38 a Poznámky 25 je odpovedajúca rezolventa R_λ v (116) bijektívny operátor a zobrazenie holomorfné na celom $\mathbb{C}$. Naviac, norma $\|R_\lambda\|$ je ohraničená na $\mathbb{C}$. Skutočne, pre komplexné hodnoty λ s $|\lambda| > 2\|L\|$ podľa nerovnosti (138) platí

$$\|R_\lambda\| \overset{(138)}{\leq} \frac{1}{|\lambda| - \|L\|} < \frac{1}{\|L\|}. \tag{141}$$

Na druhej strane, na kompaktnej množine $|\lambda| \leq 2\|L\|$ je rezolventa R_λ ako spojité zobrazenie premennej λ iste ohraničená. Podľa modifikovanej Liouvilleovej vety je teda rezolventa R_λ nutne konštantné zobrazenie. S ohľadom na vlastnosť (139) to však potom znamená, že $\|R_\lambda\| = 0$, a tak $R_\lambda = 0$ pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$. To je zrejme očividný spor. Preto spektrum $\sigma(L)$ je neprázdna množina. ∎

Definícia 19 (Spektrálny polomer operátora)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ spojitý lineárny operátor s definičným oborom hustým v X. Nezáporné reálne číslo

$$r_\sigma(L) := \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(L)\} \tag{142}$$

sa nazýva spektrálny polomer operátora L.

Z inklúzie (140) v Dôsledku 4 ihneď vyplýva nerovnosť $r_\sigma(L) \le \|L\|$. Tento odhad však nemusí byť vždy optimálny. Nasledujúce tvrdenie poskytuje presnú formulu pre spektrálny polomer $r_\sigma(L)$ spojitého lineárneho operátora L.

Veta 44 (Gelfandov–Beurlingov vzorec)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ spojitý lineárny operátor s definičným oborom hustým v X. Pre spektrálny polomer $r_\sigma(L)$ operátora L platí rovnosť

$$r_\sigma(L) = \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}\ . \tag{143}$$

Dôkaz Vety 44.

Ukážeme najprv, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosť

Dôkaz Vety 44 (pokračovanie).

$$r_\sigma(L) \leq \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \,. \tag{144}$$

Sporom predpokladajme, že existuje $m \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou $r_\sigma(L) > \|L^m\|^{\frac{1}{m}}$, t.j., $[r_\sigma(L)]^m > \|L^m\|$. Z Definície 19 spektrálneho polomeru $r_\sigma(L)$ máme

$$[r_\sigma(L)]^m \overset{(142)}{=} \left[\sup_{\lambda\in\sigma(L)} |\lambda|\right]^m = \sup_{\lambda\in\sigma(L)} |\lambda^m|. \tag{145}$$

V súlade s (145) teda platí nerovnosť $\sup_{\lambda\in\sigma(L)} |\lambda^m| > \|L^m\|$. To znamená, že existuje spektrálna hodnota $\lambda \in \sigma(L)$ taká, že $|\lambda^m| > \|L^m\|$. Podľa Vety 42 je potom číslo λ^m regulárna hodnota operátora L^m, t.j., v súlade s Definíciou 16 je operátor $L^m - \lambda^m I$ invertibilný. Keďže operátor L je spojitý a lineárny, posledná vlastnosť podľa Vety 38 znamená, že $L^m - \lambda^m I$ je bijekcia. Z rozkladov

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-1} L^{n-k}\right) \circ (L - \lambda I) = L^m - \lambda^m I = (L - \lambda I) \circ \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda^{k-1} L^{n-k}\right) \tag{146}$$

následne vyplýva, že operátor $L - \lambda I$ je (podľa prvej formuly v (146)) injektívny a zároveň i (podľa druhej formuly v (146)) surjektívny, t.j., $L - \lambda I$ je bijekcia. Podľa Vety 38 je teda operátor $L - \lambda I$ invertibilný, čo je však v rozpore s tým, že hodnota $\lambda \in \sigma(L)$. Takže nerovnosť (144) skutočne platí pre každé $n \in \mathbb{N}$. Obzvlášť, z relácie (144) vyplýva pre spektrálny polomer $r_\sigma(L)$ odhad tvaru

Dôkaz Vety 44 (pokračovanie).

$$r_\sigma(L) \le \liminf_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} . \tag{147}$$

Na druhej strane je z Definície 19 zrejmé, že každé komplexné číslo λ spĺňajúce $|\lambda| > r_\sigma(L)$ je regulárna hodnota operátora L. Podľa Poznámky 24 je preto rezolventa R_λ operátora L na medzikruží $|\lambda| > r_\sigma(L)$ holomorfná a v súlade s poslednou časťou Poznámky 25 spĺňa na tejto množine formulu (137), t.j.,

$$R_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} L^n = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} L^n, \quad |\lambda| > r_\sigma(L). \tag{148}$$

Z konvergencie nekonečného radu v (148) vyplýva, že pre každé komplexné číslo λ s $|\lambda| > r_\sigma(L)$ nutne platí $\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{\lambda^n} L^n \right\| = 0$. Obzvlášť máme, že

ak $|\lambda| > r_\sigma(L)$, potom existuje index n_λ tak, že $\left\| \dfrac{1}{\lambda^n} L^n \right\| < 1$ pre každé $n \ge n_\lambda$

$$\Downarrow$$

$$|\lambda| > \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \text{ pre každé } n \ge n_\lambda .$$

Posledná nerovnosť potom implikuje vlastnosť

$$|\lambda| \ge \limsup_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \text{ pre každé } \lambda \text{ spĺňajúce } |\lambda| > r_\sigma(L). \tag{149}$$

Dôkaz Vety 44 (pokračovanie).

Zrejme číslo $r_\sigma(L)$ je infimum hodnôt $|\lambda|$ pre komplexné čísla λ v uvažovanom medzikruží $|\lambda| > r_\sigma(L)$. Z nerovnosti (149) preto dostávame odhad

$$r_\sigma(L) \geq \limsup_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} . \tag{150}$$

Následnou kombináciou podmienok (147) a (150) máme

$$\limsup_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \overset{(150)}{\leq} r_\sigma(L) \overset{(147)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} .$$

Z týchto nerovností môžeme napokon usúdiť, že existuje $\lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}$ a jej hodnota je $r_\sigma(L)$. Teda platí vzorec (143) a dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 26

V komentári pred Vetou 44 sme uviedli, že pre spektrálny polomer $r_\sigma(L)$ spojitého lineárneho operátora L platí nerovnosť $r_\sigma(L) \leq \|L\|$. Tento odhad však nemusí byť vo všeobecnosti optimálny, nakoľko v súlade s Gelfandovým–Beurlingovým vzorcom (143) sa neostrá nerovnosť

$$\lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|L\|$$

nemusí vždy realizovať ako rovnosť. Ilustrujeme to na nasledujúcom príklade.

Príklad 26

Uvažujme Banachov priestor $X = \mathcal{C}[0,1]$ s maximálnou normou $\|\cdot\|_C$ a operátor $L : X \to X$ definovaný predpisom

$$[Lx](t) := t \int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1], \quad x \in \mathcal{C}[0,1]. \tag{151}$$

Nie je ťažké overiť, že operátor L je lineárny a ohraničený s $\|L\| = 1$. Nájdeme jeho spektrálny polomer a stanovíme jeho spektrum. Pomocou matematickej indukcie zistíme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$[L^n x](t) := \frac{t}{2^{n-1}} \int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1], \quad x \in \mathcal{C}[0,1], \quad \text{teda} \quad L^n = \frac{1}{2^{n-1}}\,L.$$

Následne, podľa vzorca (143) pre spektrálny polomer $r_\sigma(L)$ dostaneme

$$r_\sigma(L) \overset{(143)}{=} \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{2^{n-1}}\,L \right\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

Vidíme, že v tomto prípade je $r_\sigma(L) < 1 = \|L\|$. Podľa vzorca (143) je spektrum operátora L istá uzavretá podmnožina kruhu $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$. Nájdeme vlastné čísla operátora L. Hľadáme teda hodnoty $\lambda \in \mathbb{C}$, pre ktoré má rovnica $Lx = \lambda x$ identicky nenulové riešenie, t.j., podľa (151) máme

Príklad 26

$$t\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s = \lambda x(t), \quad t\in[0,1]. \tag{152}$$

Vidíme, že pre $\lambda \neq 0$ hľadané vlastné funkcie x musia byť nutne lineárne tvaru $x(t) = at$, $t\in[0,1]$, s $a\neq 0$. Dosadením do (152) a po úpravách dostaneme

$$t\int_0^1 as\,\mathrm{d}s = \lambda at \quad\longrightarrow\quad \frac{at}{2} = \lambda at, \quad t\in[0,1] \quad\longrightarrow\quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Pre hodnotu $\lambda = 0$ má rovnica (152) napríklad riešenie $x(t) = 1-2t$, $t\in[0,1]$. Operátor L má teda dve vlastné čísla $\frac{1}{2}$ (s odpovedajúcimi vlastnými funkciami tvaru $x(t) = at$, $t\in[0,1]$, s $a\neq 0$) a 0. Keďže operátor $L-\lambda I$ je pre každú komplexnú hodnotu $\lambda\in\mathbb{C}$ spojitý a lineárny, v súlade s Vetou 38 preveríme teraz obor hodnôt $\mathcal{R}(L-\lambda I)$. Konkrétne, z množiny $\{\lambda\in\mathbb{C},\ |\lambda|\leq\frac{1}{2}\}\setminus\{0,\frac{1}{2}\}$ vylúčime tie hodnoty λ, pre ktoré má rovnica $(L-\lambda I)x = y$ riešenie pre každé $y\in X$, t.j., pre ktoré je operátor $L-\lambda I$ surjektívny. V súlade s (151) máme

$$t\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s - \lambda x(t) = y(t), \quad t\in[0,1], \quad y\in\mathcal{C}[0,1]. \tag{153}$$

Integrovaním oboch strán rovnice (153) získame

$$\int_0^1 t\left(\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t - \lambda\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}s$$

Príklad 26

Poslednú rovnosť upravíme a dostaneme

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s - \lambda\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \tag{154}$$

$$\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s = \frac{2}{1-2\lambda}\int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}s. \tag{155}$$

Dosadením vyjadrenia (155) do pôvodnej rovnice (153) potom máme

$$\frac{2t}{1-2\lambda}\int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}s - \lambda x(t) = y(t), \quad \text{pre každé } t \in [0,1]. \tag{156}$$

Z (156) následne dostaneme

$$x(t) = \frac{2t}{\lambda(1-2\lambda)}\int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}s - \frac{y(t)}{\lambda}, \quad t \in [0,1], \quad y \in \mathcal{C}[0,1]. \tag{157}$$

Inými slovami, rovnica (153) má pre každú spojitú funkciu y riešenie $x \in \mathcal{C}[0,1]$ práve vtedy, keď hodnota $\lambda \notin \{0, \frac{1}{2}\}$, pričom toto riešenie je jediné a určené formulou (157). To znamená, že celé spektrum operátora L v zadaní príkladu má tvar $\sigma(L) = \{0, \frac{1}{2}\}$, pričom sa jedná o bodové spektrum.

Príklad 27

Nájdime spektrum lineárneho operátora L z Príkladu 23. Podľa (114) máme

$$L^k\{x_n\} = \left\{\frac{x_n}{n^k}\right\}, \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X, \quad \text{a tak } \|L^k\| = 1 \text{ pre každé } k \in \mathbb{N}.$$

Preto podľa vzorca (143) je spektrálny polomer $r_\sigma(L) = \lim_{k\to\infty} \|L^k\|^{1/k} = 1$, a tak spektrum $\sigma(L) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \leq 1\}$. Pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$\{y_n\} := (L - \lambda I)\{x_n\} \overset{(114)}{=} \left\{\left(\frac{1}{n} - \lambda\right) x_n\right\}, \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X. \tag{158}$$

Je ľahko vidieť, že postupnosť $\{y_n\}$ v (158) je nulová práve vtedy, keď postupnosť $\{x_n\} = e_k$ a $\lambda = \frac{1}{k}$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Bodové spektrum operátora L má teda tvar $\{\frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}\}$, t.j., $\lambda_k := \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, sú jediné vlastné hodnoty operátora L. Ďalej je zrejmé, že rovnica v (158) má riešenie $\{x_n\}$ pre každdú $\{y_n\}$ z X práve vtedy, keď hodnota $\lambda \neq \frac{1}{k}$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. V tomto prípade platí

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n}{1 - n\lambda}\, y_n\right\} \quad \text{pre každé } \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in X. \tag{159}$$

Ak naviac je $\lambda \neq 0$, získané riešenie $\{x_n\}$ je prvkom priestoru X. Skutočne, pre $\lambda \neq 0$ má postupnosť $\left\{\frac{n}{1-n\lambda}\right\}$ limitu $-\frac{1}{\lambda}$, a teda je ohraničená, t.j., $\left|\frac{n}{1-n\lambda}\right| \leq \alpha$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $\alpha > 0$ je vhodná konštanta. Následne máme

Príklad 27

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \overset{(159)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{n}{1-n\lambda}\right|^2 |y_n|^2 \le \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty.$$

Napokon hodnota $\lambda = 0$ je prvkom spojitého spektra, pretože podľa Príkladu 23 je $\overline{\mathcal{R}(L)} = X$ a inverzia L^{-1} je nespojitá. Celkové spektrum operátora L má teda tvar $\sigma(L) = \left\{\frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

V nasledujúcich troch príkladoch sa zameriame na vyšetrovanie spektra nespojitých (neohraničených) lineárnych operátorov.

Príklad 28

Nájdime spektrum lineárneho diferenciálneho operátora definovaného v (2) z Príkladu 6. Uvažujme Banachov priestor $X = \mathcal{C}[0,1]$. Operátor D v (2) je prirodzene definovaný na podpriestore $\mathcal{D}(D) = \mathcal{C}^1[0,1]$, ktorý je hustý v X, t.j., platí $\overline{\mathcal{D}(D)}$. Táto skutočnosť vyplýva napríklad z Weierstrassovej vety o globálnej aproximácii spojitých funkcií na kompaktnom intervale pomocou polynómov. Platí, že pre žiadnu hodnotu $\lambda \in \mathbb{C}$ nie je operátor $D - \lambda I$ injektívny. Skutočne, rovnica $(D - \lambda I)x = 0$ má na $\mathcal{D}(D)$ práve jedno lineárne nezávislé riešenie

$$x' - \lambda x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t \in [0,1], \quad \text{pre každé } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Príklad 28

Podľa Poznámky 21 a Definícií 17 a 18 teda spektrum operátora D je $\sigma(D) = \mathbb{C}$, pričom sa jedná o bodové spektrum, t.j., operátor D má iba vlastné hodnoty.

Príklad 29

Nech priestor $X = \{x \in \mathcal{C}[0,1],\ x(0) = 0\}$. Nie je ťažké si premyslieť, že X je uzavretý podpriestor v $\mathcal{C}[0,1]$, t.j., X je Banachov priestor. Uvažujme lineárny diferenciálny operátor $L : \mathcal{D}(L) \subseteq X \to X$ s predpisom

$$Lx = x', \quad x \in \mathcal{D}(L) := \{x \in \mathcal{C}^1[0,1],\ x(0) = 0\}. \tag{160}$$

Podľa analogickej úvahy ako v Príklade 28 platí $\overline{\mathcal{D}(L)} = X$. Operátor L v (160) je uzavretý, ale nie je spojitý (v súlade s Príkladom 13). Ďalej operátor $L - \lambda I$ je pre každú hodnotu $\lambda \in \mathbb{C}$ bijektívny, pretože začiatočná úloha $x' - \lambda x = 0$, $x(0) = 0$, má pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$ iba triviálne riešenie $x \equiv 0$. Podobne, úloha $x' - \lambda x = y$, $x(0) = 0$, má pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$ a každé $y \in X$ jediné riešenie

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} y(s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in [0,1]. \tag{161}$$

Naviac, inverzia $(L - \lambda I)^{-1} : X \to \mathcal{D}(L - \lambda I)$ je pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$ spojitý lineárny operátor. Skutočne, v súlade s (161) pre každé $y \in X$ platí

Príklad 29

$$\left\|(L-\lambda I)^{-1}y\right\|_X \overset{(161)}{=} \max_{t\in[0,1]}\left|\mathrm{e}^{\lambda t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}y(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \|y\|_X\int_0^1 \mathrm{e}^{-s\,\mathsf{Re}\lambda}\mathrm{d}s\ \max_{t\in[0,1]}\mathrm{e}^{t\,\mathsf{Re}\lambda},$$

kde sme využili spojitosť funkcie $\mathrm{e}^{\lambda t}$ na intervale $[0,1]$ a fakt, že $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathsf{Re}z}$ pre každé $z\in\mathbb{C}$. V súlade s Poznámkou 21 je teda každé komplexné číslo rezolventná hodnota operátora L, a tak jeho spektrum je prázdna množina.

Príklad 30

Uvažujme Hilbertov priestor $H = L^2[0,2\pi]$ a jeho podpriestor

$$\tilde{H} := \{x\in H,\ x\in\mathcal{AC}[0,2\pi],\ x'\in H \text{ a } x(0)=0\}, \tag{162}$$

kde $\mathcal{AC}[0,2\pi]$ je priestor absolútne spojitých funkcií na intervale $[0,2\pi]$. Dá sa ukázať, že podpriestor $\tilde{H}$ v (162) je hustý v H. Dokážeme, že lineárny diferenciálny operátor $L:\tilde{H}\to H$ tvaru $Lx := \mathrm{i}x'$, $x\in\tilde{H}$, má prázdne spektrum. Nech pre dané $\lambda\in\mathbb{C}$ je $K_\lambda : H\to H$ operátor definovaný predpisom

$$[K_\lambda y](t) := -\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)}y(s)\,\mathrm{d}s,\quad y\in X. \tag{163}$$

Operátor K_λ je lineárny a definovaný korektne na celom H, nakoľko podľa Cau-

Príklad 30

chyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti pre každé $y \in X$ máme

$$\left|\int_0^t e^{-i\lambda(t-s)} y(s)\, ds\right|^2 \leq \int_0^t |e^{-i\lambda(t-s)}|^2\, ds \int_0^t |y(s)|^2\, ds = \|y\|_X^2 \int_0^t e^{2(t-s)\mathrm{Im}\lambda}\, ds.$$

Táto nerovnosť zároveň dokazuje ohraničenosť operátora K_λ, pretože platí

$$\|K_\lambda y\|_X^2 = \int_0^{2\pi} \left|-i \int_0^t e^{-i\lambda(t-s)} y(s)\, ds\right|^2 dt \leq \|y\|_X^2 \int_0^{2\pi}\int_0^t e^{2(t-s)\mathrm{Im}\lambda} ds dt$$

pre každé $y \in X$. Operátor K_λ zobrazuje do podpriestoru $\tilde{H}$. Skutočne, platí

$$[K_\lambda y]'(t) = -iy(t) - \lambda \int_0^t e^{-i\lambda(t-s)} y(s)\, ds, \quad t \in [0, 2\pi], \quad y \in X. \tag{164}$$

Následne $K_\lambda y \in H$, $[K_\lambda y]' \in H \subseteq L[0, 2\pi]$, čo v súlade s (164) znamená, že funkcia $K_\lambda y \in \mathcal{AC}[0, 2\pi]$, a $[K_\lambda y](0) = 0$ podľa (163) pre každé $y \in X$. Napokon overíme platnosť identít $K_\lambda \circ (L - \lambda I) = I_{\tilde{H}}$ a $(L - \lambda I) \circ K_\lambda = I_H$ pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Postupne pre každé $x \in \tilde{H}$ a každé $y \in H$ dostávame

$$[K_\lambda \circ (L - \lambda I)]x(t) = -i \int_0^t e^{-i\lambda(t-s)} [ix'(s) - \lambda x(s)]\, ds$$

Príklad 30

$$= \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)} x'(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)})'_s\, x(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^t \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)} x(s)\right)'_s \mathrm{d}s = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)} x(s)\right]_0^t = x(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$[(L - \lambda I) \circ K_\lambda] y(t) = \mathrm{i} \left(-\mathrm{i} \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s\right)'_t + \lambda \mathrm{i} \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= y(t) + \int_0^t (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)})'_t\, y(s)\,\mathrm{d}s + \lambda \mathrm{i} \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= y(t) - \lambda \mathrm{i} \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s + \lambda \mathrm{i} \int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t-s)} y(s)\,\mathrm{d}s = y(t)$$

pre každé $t \in [0, 2\pi]$. Vďaka inklúzii $H \subseteq L[0, 2\pi]$ je obor hodnôt operátora $L - \lambda I$ pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$ celý priestor H, pretože začiatočná úloha $\mathrm{i}x' - \lambda x = y$, $x(0) = 0$, má pre každé $y \in H$ práve jedno riešenie, konkrétne, je ním funkcia v (163). V súlade s Definíciou 15 je teda operátor $L - \lambda I$ invertibilný pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Jeho spektrum $\sigma(L)$ je preto prázdna množina.

Spektrum kompaktných operátorov

Preskúmame teraz spektrum lineárnych kompaktných operátorov. Zistíme, že v tomto prípade má spektrum obzvlášť jednoduchú štruktúru.

Poznámka 27

Prvé jednoduché pozorovanie je skutočnosť, že ak Banachov priestor X má nekonečnú dimenziu, potom číslo 0 je spektrálna hodnota každého lineárneho kompaktného operátora $L : X \to X$. Je to dôsledok Vety 28(i), ktorý v súlade s Vetou 13 hovorí , že ak $\dim X = \infty$, potom lineárny kompaktný operátor $L : X \to X$ nie je zdola ohraničený. Podľa Poznámky 21 teda L nie je invertibilný operátor, a tak 0 nie je jeho rezolventná hodnota. Takže nutne $0 \in \sigma(L)$.

Veta 45 (Spektrum kompaktného operátora)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je lineárny kompaktný operátor s definičným oborom hustým v X. Potom spektrum operátora L obsahuje iba vlastné čísla operátora L, prípadne hodnotu 0, ak X má nekonečnú dimenziu.

Dôkaz Vety 45.

Tvrdenie je priamym dôledkom Fredholmovej alternatívy, t.j., prvej Fredholmovej

Dôkaz Vety 45 (pokračovanie).

Vety 33(i) v súlade s Poznámkou 20. Nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je nenulové komplexné číslo. Zrejme operátor $\frac{1}{\lambda} L$ je lineárny a kompaktný, a teda i spojitý. Podľa Vety 33(i) je operátor $I - \frac{1}{\lambda} L$ injektívny práve vtedy, keď je surjektívny. Rovnakú vlastnosť má zrejme i operátor $-\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} L \right) = L - \lambda I$. Pre $\lambda \neq 0$ teda platí

operátor $L - \lambda I$ je injektívny práve vtedy, keď je surjektívny.

Z Vety 38 potom vyplýva, že pre $\lambda \neq 0$ je operátor $L - \lambda I$ invertibilný práve vtedy, keď je injektívny. Následne, podľa Definícií 17 a 18 je $\lambda \neq 0$ spektrálna hodnota operátora L práve vtedy, keď je prvkom bodového spektra, t.j., keď je to vlastné číslo operátora L. Tvrdenie o hodnote $\lambda = 0$ vyplýva z Poznámky 27. ■

Poznámka 28 (Spektrum kompaktného operátora)

Doplňme, že podľa tretej Fredholmovej Vety 33(iii) každej vlastnej hodnote $\lambda \neq 0$ lineárneho kompaktného operátora L odpovedá iba konečne veľa lineárne nezávislých vlastných vektorov. Vyplýva to zo skutočnosti, že v kontexte dôkazu Vety 45 má podpriestor $\mathrm{Ker}\,(L - \lambda I) \subseteq X$ podľa Vety 34 konečnú dimenziu.

Výsledky vo Vete 45 a Poznámke 28 upresníme a doplníme v nasledujúcej vete.

Veta 46

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je lineárny kompaktný operátor s definičným oborom hustým v X. Nech $\delta > 0$ je dané. Potom pre množinu všetkých vlastných čísiel operátora L spĺňajúcich $|\lambda| > \delta$ existuje iba konečne veľa lineárne nezávislých vlastných vektorov operátora L.

Dôkaz Vety 46.

Tvrdenie budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že existuje postupnosť $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$ vlastných čísiel operátora L spĺňajúca $|\lambda_n| > \delta$ pre každe $n \in \mathbb{N}$ taká, že odpovedajúca postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ všetkých lineárne nezávislých vlastných vektorov je nekonečná. Upresnime, že x_n je vlastný vektor, ktorý odpovedá vlastnej hodnote λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Doplňme, že pripúšťame situáciu, že $\lambda_k = \lambda_l$ pre nejaké dva rôzne indexy $k, l \in \mathbb{N}$. Priestor X má teda nutne nekonečnú dimenziu. Definujme podpriestory $X_n \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$, predpisom

$$X_n := \mathrm{Lin}\,\{x_1, \ldots, x_n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{165}$$

Zrejme každý z podpriestorov X_n, $n \in \mathbb{N}$, v (165) má konečnú dimenziu n a je teda uzavretý v X. Naviac, platí $X_n \subsetneq X_{n+1}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, nakoľko postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je lineárne nezávislá a nekonečná. V súlade s Rieszovou lemou potom existuje nekonečná postupnosť $\{y_n\}_{n=2}^{\infty} \subseteq X$ vektorov s vlastnosťou

Dôkaz Vety 46 (pokračovanie).

$$y_n \in X_n, \quad \|y_n\|_X = 1, \quad d\,(y_n,\, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{166}$$

Uvažujme postupnosť $\{z_n\}_{n=2}^{\infty} := \left\{\frac{1}{\lambda_n}\, y_n\right\}_{n=2}^{\infty}$. Postupnosť $\{z_n\}_{n=2}^{\infty}$ je zrejme ohraničená, nakoľko platí

$$\|z_n\|_X = \left\|\frac{1}{\lambda_n}\, y_n\right\|_X \overset{(166)}{=} \frac{1}{|\lambda_n|} < \frac{1}{\delta}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Ukážeme, že postupnosť $\{Lz_n\}_{n=2}^{\infty}$ nie je cauchyovská. Keďže podľa (166) vektor $y_n \in X_n$ pre každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, v súlade s (165) máme reprezentáciu $y_n = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ pre vhodné konštanty $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. Potom platí

$$\begin{aligned}
Lz_n &= L\left(\frac{1}{\lambda_n}\, y_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\lambda_n}\, Lx_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\lambda_n}\, \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\, c_k x_k \\
&= c_n x_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\, c_k x_k = y_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\, c_k x_k - \sum_{k=1}^{n-1} c_k x_k \\
&= y_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) c_k x_k}_{u_n} = y_n + u_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.
\end{aligned} \tag{167}$$

Dôkaz Vety 46 (pokračovanie).

Zrejme vektor u_n definovaný v (167) je podľa (165) prvkom podpriestoru X_{n-1} pre každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Využitím odvodenej rovnosti (167) pre každé dva indexy $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, s $k < l$ máme

$$\|Lz_l - Lz_k\|_X \overset{(167)}{=} \|y_l + u_l - y_k - u_k\|_X = \|y_l - (u_k + y_k - u_l)\|_X = \|y_l - v\|_X, \quad (168)$$

kde $v := u_k + y_k - u_l$. Nakoľko $u_k \in X_{k-1} \subseteq X_{l-1}$, $y_k \in X_k \subseteq X_{l-1}$ a $u_l \in X_{l-1}$, vektor $v \in X_{l-1}$. Kombináciou (166) a (168) napokon dostaneme

$$\|Lz_l - Lz_k\|_X \overset{(168)}{=} \|y_l - v\|_X \overset{(166)}{\geq} \frac{1}{2} \quad (169)$$

pre každé dva rôzne indexy $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Postupnosť $\{Lz_n\}_{n=2}^{\infty}$ teda skutočne nie je cauchyovská, a teda ani relatívne kompaktná. To je však v rozpore s kompaktnosťou operátora L. Preto postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ lineárne nezávislých vlastných vektorov musí byť konečná. Dôkaz je hotový. ■

Dôsledok 5 (Spektrum kompaktného operátora)

Množina všetkých vlastných čísiel lineárneho kompaktného operátora L je najviac spočítateľná a každému nenulovému vlastnému číslu odpovedá konečný počet lineárne nezávislých vlastných vektorov operátora L.

Dôkaz Dôsledku 5.

Keďže rôznym vlastným číslam operátora L odpovedajú lineárne nezávislé vlastné vektory, z Vety 46 vyplýva, že pre každé $\delta > 0$ má operátor L iba konečne veľa vlastných čísiel λ s vlastnosťou $|\lambda| > \delta$. Obzvlášť, pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje iba konečne veľa vlastných čísiel λ operátora L s $|\lambda| > \frac{1}{n}$. To implikuje prvú časť tvrdenia. Druhá časť vyplýva priamo z Vety 46. Dôkaz je kompletný. ■

Poznámka 29

Poznamenajme, že z vyššie uvedenej analýzy spektra lineárneho kompaktného operátora L vo Vete 46 a Dôsledku 5 vyplýva, že množina všetkých jeho vlastných čísiel sa dá vhodne usporiadať, konkrétne

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \cdots . \tag{170}$$

Naviac, ak ich je nekonečne veľa, nutne platí $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$. Vďaka kompaktnosti spektra operátora L potom $0 \in \sigma(L)$. Zrejme v tomto prípade má priestor X nekonečnú dimenziu. To, či spektrálna hodnota 0 je prvkom spojitého alebo reziduálneho spektra operátora L, závisí na tom, či obor hodnôt $\mathcal{R}(L)$ je alebo nie je hustý v X. Pripomeňme, že inverzia L^{-1} je v tomto prípade nespojitá na podpriestore $\mathcal{R}(L)$. Ak operátor L má konečne veľa vlastných čísiel, potom $\lambda = 0$ môže/nemusí byť vlastná hodnota a môže/nemusí patriť do spektra.

Príklad 31

Uvažujme priestor $X = \mathcal{C}[0,1]$ s normou $\|\cdot\|_C$ a integrálny Fredholmov operátor L definovaný v (18) z Príkladu 8. V Príklade 20 sme dokázali, že L je kompaktný operátor. V súlade s Vetou 45 spektrum operátora L obsahuje iba vlastné čísla, prípadne hodnotu 0. Hľadáme komplexné čísla λ, pre ktoré má $(L - \lambda I)x = 0$, t.j. v zhode s (18) rovnica

$$\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = \lambda x(t), \quad t \in [0,1], \tag{171}$$

netriviálne riešenie v X. Ak $\lambda = 0$, potom integrál $\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = 0$, $t \in [0,1]$, a následným derivovaním dostaneme $x(t) = 0$ pre každé $t \in [0,1]$. Preto hodnota 0 nie je vlastné číslo operátora L. Pre $\lambda \neq 0$ získame derivovaním rovnosti (171) diferenciálnu rovnicu $x = \lambda x'$ so začiatočnou podmienkou $x(0) = 0$. Táto rovnica má opäť práve jedno riešenie $x(t) = 0$ pre každé $t \in [0,1]$. Operátor L má teda bodové spektrum prázdne. Keďže sa jedná o kompaktný, a teda spojitý lineárny operátor, podľa Gelfandovej Vety 43 je spektrum operátora neprázdna množina. Preto podľa Vety 45 nutne $\sigma(L) = \{0\}$. Dokážeme, že hodnota 0 je prvkom reziduálneho spektra. Uvažujme rovnicu $Lx = y$, t.j., podľa (18) rovnicu $\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = y(t)$, $t \in [0,1]$. Ihneď vidíme, že funkcia y musí mať spojitú deriváciu na $[0,1]$ a $y(0) = 0$. To ukazuje, že obor hodnôt

$$\mathcal{R}(L) = \{y \in \mathcal{C}^1[0,1],\ y(0) = 0\}. \tag{172}$$

Príklad 31

Podľa Príkladu 29 je potom uzáver $\overline{\mathcal{R}(L)} = \{y \in \mathcal{C}[0,1],\ y(0) = 0\} \subsetneq X$, teda podpriestor $\mathcal{R}(L)$ nie je hustý v priestore X. V súlade s Definíciou 18 je celé spektrum $\sigma(L) = \{0\}$ reziduálne. Poznamenajme, že rovnaký výsledok by sme samozrejme získali i priamou analýzou spektra operátora L.

Príklad 32

Uvažujme opäť priestor $X = \mathcal{C}[0,1]$ s normou $\|\cdot\|_C$ a lineárny operátor L tvaru

$$[Lx](t) = t^2 x(0), \quad t \in [0,1], \quad x \in X. \tag{173}$$

Keďže obor hodnôt $\mathcal{R}(L) = \{at^2, a \in \mathbb{C}\}$ má konečnú dimenziu 1, operátor je v súlade s Definíciou 14 kompaktný. Poznamenajme, že túto skutočnosť je možné pomerne ľahko dokázať i priamo pomocou Arzelàovej–Ascoliho vety. Nájdeme vlastné čísla operátora L. Podľa (173) hľadáme netriviálne riešenia rovnice

$$t^2 x(0) = \lambda x(t), \quad t \in [0,1]. \tag{174}$$

Pre hodnoty $\lambda \neq 0$ z (174) máme $x(t) = \frac{x(0)}{\lambda} t^2$, $t \in [0,1]$, z čoho $x(0) = 0$, a tak funkcia $x(t) = 0$ pre každé $t \in [0,1]$. Ak $\lambda = 0$, potom netriviálnym riešením rovnice (174) je napríklad funkcia $x(t) = t^2$. Z toho následne vyplýva, že celé spektrum $\sigma(L) = \{0\}$, pričom sa jedná sa bodové spektrum.

V poslednej časti prednášky budeme vyšetrovať spektrum spojitých lineárnych operátorov v Hilbertovom priestore. Špeciálne, budeme sa venovať spektrálnej teórii hermiteovsky samoadjungovaných operátorov. Tieto operátory budeme skrátene označovať prívlastkom hermiteovské.

Lema 4

Nech X je Hilbertov priestor, $L : X \to X$ je spojitý lineárny operátor a $\lambda \in \mathbb{C}$ je dané komplexné číslo. Potom platí formula

$$(L - \lambda I)^* = L^* - \bar{\lambda} I. \tag{175}$$

Obzvlášť, ak operátor L je naviac hermiteovský, potom operátor $L - \lambda I$ je hermiteovský práve vtedy, keď λ je reálne číslo.

Dôkaz Lemy 4.

Formula (175) je priamym dôsledkom rovnosti (68) v Poznámke 13 a vlastností skalárneho súčinu, nakoľko pre každú dvojicu vektorov $x, y \in X$ platí

$$\langle (L - \lambda I)x,\, y\rangle = \langle Lx,\, y\rangle - \lambda\langle x,\, y\rangle = \langle x,\, L^* y\rangle - \langle x,\, \bar{\lambda} y\rangle = \langle x,\, (L^* - \bar{\lambda} I)y\rangle.$$

Ak operátor L je hermiteovský, t.j., $L = L^*$ v súlade s Definíciou 12, potom pomocou (175) platí $(L - \lambda I)^* = L - \lambda I$ práve vtedy, keď $\bar{\lambda} = \lambda$, t.j., $\lambda \in \mathbb{R}$. ∎

Nasledujúce tvrdenie je analógiou klasického výsledku o vlastných číslach a vlastných vektoroch hermiteovských matíc v $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Veta 47

Nech X je Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(X)$ je hermiteovský operátor. Potom každé vlastné číslo operátora L je reálne a vlastné vektory operátora L prislúchajúce rôznym vlastným číslam sú vzájomne ortogonálne.

Dôkaz Vety 47.

Nech $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastné číslo operátora L a $x \in X \setminus \{0\}$ je odpovedajúci vlastný vektor, t.j., platí $Lx = \lambda x$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $\langle x, x\rangle_X = \|x\|_X^2 = 1$. Využitím vlastností skalárneho súčinu a rovnosti $L = L^*$ máme

$$\lambda = \langle \lambda x, x\rangle_X = \langle Lx, x\rangle_X \overset{(68)}{=} \langle x, L^* x\rangle_X = \langle x, Lx\rangle_X = \langle x, \lambda x\rangle_X = \overline{\lambda},$$

a tak hodnota $\lambda \in \mathbb{R}$. Nech ďalej $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sú dve rôzne vlastné hodnoty operátora L s odpovedajúcimi vlastnými vektormi $x_1, x_2 \in X \setminus \{0\}$, t.j., platí $Lx_1 = \lambda_1 x_1$ a $Lx_2 = \lambda_2 x_2$. Potom

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle_X = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle_X = \langle Lx_1, x_2\rangle_X \overset{(68)}{=} \langle x_1, L^* x_2\rangle_X = \langle x_1, Lx_2\rangle_X$$

$$= \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle,$$

Dôkaz Vety 47 (pokračovanie).

z čoho dostávame $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = 0$. Vďaka tomu, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$, napokon máme $\langle x_1, x_2\rangle = 0$, t.j., vlastné vektory x_1, x_2 sú vzájomne ortogonálne. ∎

Definícia 20 (Aproximatívne spektrum operátora)

Nech X je Banachov priestor a $L : X \to X$ je lineárny operátor s definičným oborom hustým v priestore X. Množina všetkých hodnôt $\lambda \in \mathbb{C}$, pre ktoré operátor $L - \lambda I$ nie je ohraničený zdola, sa nazýva aproximatívne spektrum operátora L a označuje sa $\sigma_{AP}(L)$.

Poznámka 30

V súlade s Poznámkou 21 a Definíciou 17 je zrejme množina $\sigma_{AP}(L)$ skutočne časťou spektra $\sigma(L)$ operátora. Obzvlášť, podľa Definícií 6 a 20 platí, že hodnota $\lambda \in \mathbb{C}$ je prvkom aproximatívneho spektra operátora L práve vtedy, keď existuje postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ s vlastnosťou

$$\|x_n\|_X = 1 \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} (L - \lambda I)x_n = 0. \tag{176}$$

Nie je ťažké si premyslieť, ža každá vlastná hodnota operátora L patrí do aproximatívneho spektra $\sigma_{AP}(L)$. Opačné tvrdenie vo všeobecnosti neplatí.

Nasledujúce tvrdenie podáva charakterizáciu spektier hermiteovských operátorov.

Veta 48 (Weylovo kritérium)

Nech X je Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(X)$ je hermiteovský operátor. Potom každá spektrálna hodnota operátora L je prvkom jeho aproximatívneho spektra, t.j., platí rovnosť $\sigma(L) = \sigma_{AP}(L)$.

Dôkaz Vety 48.

Sporom predpokladajme, že množina $\sigma(L) \setminus \sigma_{AP}(L)$ je neprázdna, t.j., existuje spektrálna hodnota λ, pre ktorú je operátor $L - \lambda I$ ohraničený zdola. Podľa Vety 13 je operátor $L - \lambda I$ injektívny a jeho obor hodnôt $\mathcal{R}(I - \lambda I)$ je uzavretý v X. Číslo λ teda nie je vlastná hodnota operátora L. Naviac, v súlade s Poznámkou 21 platí $\mathcal{R}(I - \lambda I) \subsetneq X$. Podľa vety o projekcii máme rozklad

$$X = \mathcal{R}(I - \lambda I) \oplus (\mathcal{R}(I - \lambda I))^{\perp},$$

kde ortogonálny doplnok $(\mathcal{R}(I - \lambda I))^{\perp}$ je netriválny uzavretý podpriestor v X. V zhode s Vetou 23(iii) je potom $\operatorname{Ker}(L - \lambda I)^* \neq \{0\}$ a podľa formuly (175) v Leme 4 máme $(L - \lambda I)^* = L - \bar{\lambda} I$. Operátor $L - \bar{\lambda} I$ teda nie je injektívny a číslo $\bar{\lambda}$ je vlastná hodnota operátora L. Podľa Vety 47 je $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, a tak $\lambda = \bar{\lambda}$ je vlastná hodnota operátora L. Dospeli sme k sporu. Preto množina $\sigma(L) \subseteq \sigma_{AP}(L)$ a v súlade s Poznámkou 30 dostávame napokon rovnosť $\sigma(L) = \sigma_{AP}(L)$. ∎

Poznámka 31 (Weylovo kritérium)

Tvrdenie Vety 48 možno podľa (176) v Poznámke 30 vyjadriť i v tvare

$$\inf_{x \in S_X[0,1]} \|(L - \lambda I)x\|_X = 0 \quad \text{pre každé } \lambda \in \sigma(L). \tag{177}$$

V nasledujúcom výklade budeme pre daný spojitý lineárny a hermiteovský operátor $L : X \to X$ uvažovať kvadratický funkcionál definovaný predpisom

$$Q_L(x) := \langle Lx, x \rangle, \quad x \in X. \tag{178}$$

Poznámka 32

Ľahko sa presvedčíme, že ak $L \in \mathcal{L}(X)$ je hermiteovský operátor, potom kvadratická forma v (178) je reálna, t.j., $\langle Lx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pre každé $x \in X$. Skutočne,

$$\overline{\langle Lx, x \rangle} = \langle x, Lx \rangle = \langle x, L^* x \rangle \overset{(68)}{=} \langle Lx, x \rangle \quad \text{pre každé } x \in X.$$

Veta 49 (Rayleighova)

Nech X je Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(X)$ je daný hermiteovský operátor. Potom

$$\|L\| = \sup\{|Q_L(x)|,\ x \in S_X[0,1]\}, \tag{179}$$

kde Q_L je kvadratický funkcionál definovaný v (178).

Dôkaz Vety 49.

Označme symbolom s suprémum na pravej strane rovnosti (179). Potom pre každý nenulový vektor $x \in X$ platí

$$|\langle Lx,\, x\rangle| = \|x\|_X^2 \left|\left\langle L\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right),\, \frac{x}{\|x\|_X}\right\rangle\right| \overset{(178)}{=} \left|Q_L\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right| \|x\|_X^2 \le s\|x\|_X^2$$

Posledná nerovnosť zrejme platí aj pre $x = 0$, takže máme

$$|\langle Lx,\, x\rangle| \le s\|x\|_X^2, \quad x \in X. \tag{180}$$

Dokážeme, že pre každú dvojicu vektorov $x, y \in X$ platí relácia

$$|\mathrm{Re}\,\langle Lx,\, y\rangle| \le \frac{s}{2}\left(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2\right) \tag{181}$$

Postupnými výpočtami a využitím toho, že operátor L je hermiteovský, máme

$$\begin{aligned}
\langle L(x+y),\, x+y\rangle - \langle L(x-y),\, x-y\rangle &= 2\langle Lx,\, y\rangle + 2\langle Ly,\, x\rangle \\
&= 2\langle Lx,\, y\rangle + 2\langle y,\, L^*x\rangle \\
&= 2\langle Lx,\, y\rangle + 2\langle y,\, Lx\rangle \\
&= 2\langle Lx,\, y\rangle + \overline{2\langle Lx,\, y\rangle} = 4\mathrm{Re}\,\langle Lx,\, y\rangle \qquad (182)
\end{aligned}$$

pre každé $x, y \in X$. Následne, pomocou nerovnosti (180) dostaneme

Dôkaz Vety 49 (pokračovanie).

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Re}\,\langle Lx,\, y\rangle| &\overset{(182)}{=} \frac{1}{4}\,|\langle L(x+y),\, x+y\rangle - \langle L(x-y),\, x-y\rangle| \\
&\le \frac{1}{4}\,|\langle L(x+y),\, x+y\rangle| + \frac{1}{4}\,|\langle L(x-y),\, x-y\rangle| \\
&\overset{(180)}{\le} \frac{s}{4}\,\|x+y\|_X^2 + \frac{s}{4}\,\|x-y\|_X^2 = \frac{s}{2}\left(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2\right)
\end{aligned}
$$

pre každé $x, y \in X$. V poslednom kroku sme využili rovnobežníkové pravidlo, ktoré spĺňa každá norma generovaná skalárnym súčinom. Overili sme teda platnosť nerovnosti (181). Ak $x \in X$ spĺňa $Lx \neq 0$ a $y = \frac{Lx}{\|Lx\|_X}$, potom

$$
|\mathrm{Re}\,\langle Lx,\, y\rangle| = \left|\mathrm{Re}\left\langle Lx,\, \frac{Lx}{\|Lx\|_X}\right\rangle\right| = \left|\mathrm{Re}\left[\frac{\|Lx\|_X^2}{\|Lx\|_X}\right]\right| = \|Lx\|_X. \qquad (183)
$$

Dosadením (183) do nerovnosti (181) a využitím toho, že $\|y\|_X = 1$, získame

$$
\|Lx\|_X \le \frac{s}{2}\left(\|x\|_X^2 + 1\right).
$$

Posledná nerovnosť opäť platí aj pre vektory $x \in X$ s $Lx = 0$, takže máme

$$
\|Lx\|_X \le \frac{s}{2}\left(\|x\|_X^2 + 1\right) \quad \text{pre každé } x \in X. \qquad (184)
$$

Dôkaz Vety 49 (pokračovanie).

Obzvlášť, pre každé $x \in S_X[0,1]$ platí

$$\|Lx\|_X \overset{(184)}{\leq} \frac{s}{2}(1+1) = s,$$

t.j., $\|L\| \leq s$ v zhode s (6). Na druhej strane, podľa Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti máme

$$|Q_L(x)| \overset{(178)}{=} |\langle Lx,\, x\rangle| \leq \|Lx\|_X \cdot \|x\|_X = \|Lx\|_X \overset{(6)}{\leq} \|L\|, \quad x \in S_X[0,1],$$

čo implikuje nerovnosť $s \leq \|L\|$. Preto $s = \|L\|$ a dôkaz je hotový. ■

Veta 50 (Spektrálny polomer hermiteovského operátora)

Nech X je Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(X)$ je hermiteovský operátor. Potom platí

$$r_\sigma(L) = \|L\|. \tag{185}$$

Dôkaz Vety 50.

Pri dôkaze využijeme Gelfandov–Beurlingov vzorec (143) pre spektrálny polomer $r_\sigma(L)$ spojitého lineárneho operátor L. Nie je ťažké sa pomocou matematickej indukcie presvedčiť, že ak L je hermiteovský operátor, potom aj

Dôkaz Vety 50 (pokračovanie).

$$L^n \text{ je hermiteovský operátor pre každé } n \in \mathbb{N}. \tag{186}$$

Obzvlášť, pre mocniny L^{2^k}, $k \in \mathbb{N}$, využitím Rayleighovej Vety 49 máme

$$\begin{aligned}\left\|L^{2^k}\right\| &\overset{(179),(178)}{=} \sup_{x \in B_X[0,1]} \left|\langle L^{2^k}x,\, x\rangle\right| = \sup_{x \in B_X[0,1]} \left|\langle L^{2^{k-1}}x,\, L^{2^{k-1}}x\rangle\right| \\ &= \sup_{x \in B_X[0,1]} \left\|L^{2^{k-1}}x\right\|_X^2 \overset{(6)}{=} \left\|L^{2^{k-1}}\right\|^2, \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{187}$$

Z formuly (187) následne využitím indukcie a vlastnosti (186) získame

$$\left\|L^{2^k}\right\| = \|L\|^{2^k} \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{188}$$

Keďže v súlade s Vetou 44 je postupnosť $\left\{\|L^n\|^{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, i každá z nej vybraná podpostupnosť je konvergentná s rovnakou limitou. Využitím rovnosti (188) a vzorca (143) napokon máme

$$r_\sigma(L) \overset{(143)}{=} \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \left\|L^{2^k}\right\|^{\frac{1}{2^k}} \overset{(188)}{=} \lim_{k\to\infty} \|L\| = \|L\|.$$

Platí teda formula (185) a dôkaz je kompletný. ∎

Veta 51 (Spektrum hermiteovského operátora)

Nech X je Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(X)$ je hermiteovský operátor. Potom jeho spektrum $\sigma(L)$ splýva s aproximatívnym spektrom $\sigma_{AP}(L)$, pričom každá spektrálna hodnota je reálna. Presnejšie, platí $\sigma(L) \subseteq [m_L, M_L]$, kde

$$m_L := \inf_{x \in S_X[0,1]} Q_L(x), \qquad M_L := \sup_{x \in S_X[0,1]} Q_L(x), \tag{189}$$

kde Q_L je funkcionál definovaný v (178). *Naviac, hodnoty $m_L, M_L \in \sigma(L)$.*

Dôkaz Vety 51.

Skutočnosť, že spektrum $\sigma(L) = \sigma_{AP}(L)$ je výsledkom Weylovho kritéria vo Vete 48. Ukážeme, že každá spektrálna hodnota je reálne číslo. Nech $\lambda \in \sigma(L)$ je dané a má tvar $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pre každý vektor $x \in X$ platí

$$\begin{aligned}
\|(L-\lambda I)x\|_X^2 &= \langle (L-\lambda I)x,\, (L-\lambda I)x\rangle = \langle (L-\alpha I)x - \mathrm{i}\beta x,\, (L-\alpha I)x - \mathrm{i}\beta x\rangle \\
&= \|(L-\alpha I)x\|_X^2 + \beta^2\|x\|_X^2 + \mathrm{i}\beta \underbrace{\left[\langle (L-\alpha I)x,\, x\rangle - \langle x,\, (L-\alpha I)x\rangle\right]}_{0} \\
&= \|(L-\alpha I)x\|_X^2 + \beta^2\|x\|_X^2,
\end{aligned} \tag{190}$$

pričom v poslednom kroku sme využili výsledok Lemy 5. V súlade s vlastnosťou

Dôkaz Vety 51 (pokračovanie).

(177) v Poznámke 31 následne máme

$$0 \overset{(177)}{=} \inf_{x \in S_X[0,1]} \|(L-\lambda I)x\|_X^2 \overset{(190)}{=} \inf_{x \in S_X[0,1]} \left(\|(L-\alpha I)x\|_X^2 + \beta^2 \|x\|_X^2 \right),$$

z čoho ihneď vyplývajú relácie

$$\inf_{x \in S_X[0,1]} \|(L-\alpha I)x\|_X = 0 \quad \text{a} \quad \beta = 0.$$

Preto spektrálna hodnota $\lambda = \alpha$ je reálna. Ďalej dokážeme, že spektrum $\sigma(L)$ je podmnožinou reálneho kompaktného intervalu $[m_L, M_L]$ s krajnými bodmi definovanými v (189). Pomocou Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti pre každé $\lambda \in \mathbb{C}$ a každý vektor $x \in S_X[0,1]$ platí

$$|\langle Lx, x\rangle - \lambda| = |\langle (L-\lambda I)x, x\rangle| \le \|(L-\lambda I)x\|_X \cdot \|x\|_X = \|(L-\lambda I)x\|_X. \quad (191)$$

Následne pre každé $\lambda \in \sigma(L)$ a pre každé $x \in S_X[0,1]$ dostávame

$$\langle Lx, x\rangle - \lambda \overset{(191)}{\le} \|(L-\lambda I)x\|_X, \quad \text{a keďže} \quad \inf_{x \in S_X[0,1]} \|(L-\lambda I)x\|_X \overset{(177)}{=} 0, \text{ platí}$$

$$\inf_{x \in S_X[0,1]} (\langle Lx, x\rangle - \lambda) \le 0, \quad \text{a tak podľa (178) a (189) platí} \quad m_L \le \lambda.$$

Podobne pre každé $\lambda \in \sigma(L)$ a pre každé $x \in S_X[0,1]$ máme

Dôkaz Vety 51 (pokračovanie).

$$\lambda - \langle Lx, x\rangle \overset{(191)}{\leq} \|(L-\lambda I)x\|_X, \quad \text{a keďže} \quad \inf_{x\in S_X[0,1]} \|(L-\lambda I)x\|_X \overset{(177)}{=} 0, \ \text{platí}$$

$$\inf_{x\in S_X[0,1]} (\lambda - \langle Lx, x\rangle) \leq 0, \quad \longrightarrow \quad \sup_{x\in S_X[0,1]} (\langle Lx, x\rangle - \lambda) \geq 0,$$

a tak v súlade s (178) a (189) platí $M_L \geq \lambda$. Napokon dokážeme, že obidve čísla m_L a M_L sú spektrálne hodnoty operátora L. Vďaka tomu, že spektrum $\sigma(L)$ je kompaktná množina v $\mathbb{R}$, podľa identity (185) a Definície 19 platí, že

$$\text{aspoň jedno z čísiel } \|L\| \text{ a } -\|L\| \text{ je spektrálna hodnota operátora } L. \tag{192}$$

Na druhej strane, využitím Rayleighovej Vety 49 a definícií čísiel m_L a M_L v (189) nie je ťažké si uevdomiť, že platí

$$\|L\| = \max\{M_L, -m_L\}. \tag{193}$$

Kombináciou podmienok (192) a (193) dostávame, že

$$\text{aspoň jedno z čísiel } m_L \text{ a } M_L \text{ je spektrálna hodnota operátora } L.$$

Stačí teda predpokladať $m_L < M_L$. Nech $m_L \in \sigma(L)$. Uvažujme operátor $K := L - m_L I$. V súlade s Lemou 4 sa jedná o hermiteovský operátor. Z vyššie odvodených vlastností spektra hermiteovských operátorov vyplýva, že

Dôkaz Vety 51 (pokračovanie).

$$\lambda \in \sigma(K) \quad \text{práve vtedy, keď} \quad \lambda + m_L \in \sigma(L). \tag{194}$$

Ďalej pre hodnoty m_K a M_K v (189), ktoré odpovedajú operátoru K, máme $m_K = m_L - m_L = 0$ a $M_K = M_L - m_L$. Následne, podľa (193) platí

$$\|K\| = \max\{M_K, -m_K\} = \max\{M_L - m_L, 0\} = M_L - m_L. \tag{195}$$

V súlade s (192) aspoň jedno z čísiel $M_L - m_L$ a $-(M_L - m_L) = m_L - M_L$ je spektrálna hodnota operátora K. Keďže hodnota $(m_L - M_L) + m_L < m_L$ nie je prvkom spektra operátora L, nutne sa jedná o číslo $M_L - m_L$. V súlade s (194) je potom číslo $(M_L - m_L) + m_L = M_L$ spektrálna hodnota operátora L, t.j., $M_L \in \sigma(L)$. Analogicky sa odvodí, že predpoklad $M_L \in \sigma(L)$ implikuje, že nutne aj číslo $m_L \in \sigma(L)$. V tomto prípade pracujeme s hermiteovským operátorom $K := L - M_L I$. Dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 33 (Spektrum hermiteovského operátora)

Poznamenajme, že reziduálne spektrum každého hermiteovského operátora L je prázdna množina. Dôvodom je prvá rovnosť vo Vete 23(ii), ktorá má pre (hermiteovský) operátor $L - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tvar $\overline{\mathcal{R}(L - \lambda I)} = (\mathrm{Ker}\,(L - \lambda I))^{\perp}$. Nie je ťažké si potom uvedomiť, že podmienka v Definícii 18 pre reziduálne spektrum operátora L nemôže byť splnená pre žiadnu reálnu hodnotu λ.

Hilbertova–Schmidtova veta

Nasledujúce výsledky budú pojednávať o vlastnostiach kompaktných hermiteovských operátoroch v Hilbertových priestoroch. Ako motiváciu pripomeňme klasických výsledok z lineárnej algebry o hermiteovských maticiach v $\mathbb{C}^{n\times n}$. Konkrétne, skutočnosť, že každá hermiteovská matica $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sa dá diagonalizovať. Presnejšie, existuje vhodná ortogonálna matica $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastnosťou

$$V^T A V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{196}$$

kde čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matice A. Naviac, stĺpce matice V v (196) sú tvorené vlastnými vektormi matice A, ktoré odpovedajú vlastným hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ukážeme, že toto pozorovanie sa dá vhodne rozšíriť pre každý lineárny kompaktný hermiteovský operátor $L : H \to H$ pôsobiaci na Hilbertovom priestore s ľubovoľnou (nekonečnou) dimenziou. Tento výsledok sa štandarne označuje ako Hilbertova–Schmidtova veta.

Lema 5

Nech X je Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(X)$ je hermiteovský operátor. Nech ďalej $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ je daná ohraničená postupnosť a $x \in X$ vektor s vlastnosťou $\lim_{n\to\infty} Lx_n = Lx$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \langle Lx_n, x_n\rangle = \langle Lx, x\rangle. \tag{197}$$

Dôkaz Lemy 5.

Podľa predpokladov tvrdenia a využitím Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti postupne pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} |\langle Lx_n, x_n\rangle - \langle Lx, x\rangle| &\le |\langle Lx_n, x_n\rangle - \langle Lx, x_n\rangle| + |\langle Lx, x_n\rangle - \langle Lx, x\rangle| \\ &= |\langle L(x_n - x), x_n\rangle| + |\langle x, L^* x_n\rangle - \langle x, L^* x\rangle| \\ &= |\langle L(x_n - x), x_n\rangle| + |\langle x, L(x_n - x)\rangle| \\ &\le \|L(x_n - x)\|_X \cdot \|x_n\|_X + \|x\|_X \cdot \|L(x_n - x)\|_X . \end{aligned}$$

Číselná postupnosť $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a $\lim_{n\to\infty} \|L(x_n - x)\|_X = 0$, preto podľa poslednej nerovnosti máme $\lim_{n\to\infty} |\langle Lx_n, x_n\rangle - \langle Lx, x\rangle| = 0$. Platí teda formula (197) a dôkaz je hotový. ∎

Veta 52

Nech X je Hilbertov priestor, $L \in \mathcal{L}(X)$ hermiteovský operátor a Q_L odpovedajúci kvadratický funkcionál v (178). Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Aspoň jedno z čísiel $\|L\|$ a $-\|L\|$ je vlastná hodnota operátora L.*

(ii) *Funkcionál $|Q_L|$ nadobúda na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$ svoje maximum, t.j., existuje vektor $x_0 \in S_X[0,1]$ s vlastnosťou*

$$|Q_L(x_0)| = \max_{x \in S_X[0,1]} |Q_L(x)|. \tag{198}$$

V tomto prípade každý vektor $x_0 \in S_X[0,1]$ spĺňajúci (198) je vlastný vektor operátora L, ktorý odpovedá vlastnej hodnote $\|L\|$, resp. $-\|L\|$.

Dôkaz Vety 52.

Nech platí tvrdenie (i), pričom bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\|L\|$ je vlastná hodnota operátora L. Nech $x_0 \in S_X[0,1]$ je odpovedajúci vlastný vektor, t.j., máme $Lx_0 = \|L\| x_0$. Potom podľa (178) platí

$$|Q_L(x_0)| \overset{(178)}{=} |\langle Lx_0, x_0\rangle| = |\langle \|L\| x_0, x_0\rangle| = \|L\| \cdot \|x_0\|_X = \|L\|. \tag{199}$$

V súlade s formulou (179) v Rayleighovej Vete 49 potom dostávame

Dôkaz Vety 52 (pokračovanie).

$$|Q_L(x_0)| \overset{(199)}{=} \|L\| \overset{(179)}{=} \sup_{x \in S_X[0,1]} |Q_L(x)|, \quad \text{a tak} \quad |Q_L(x_0)| = \max_{x \in S_X[0,1]} |Q_L(x)|.$$

Rovnaký záver dostaneme i v prípade, keď číslo $-\|L\|$ je vlastná hodnota operátora L. Platí teda tvrdenie (ii). Naopak, predpokladajme platnosť tvrdenia (ii) a nech $x_0 \in S_X[0,1]$ je vektor s vlastnosťou (198). Opäť využitím Rayleighovej Vety 49 dostávame, že $|Q_L(x_0)| = \|L\|$. Obzvlášť, aplikáciou Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti máme

$$\|L\| = |Q_L(x_0)| \overset{(178)}{=} |\langle Lx_0, x_0\rangle| \leq \|Lx_0\|_X \cdot \|x_0\|_X = \|Lx_0\|_X \overset{(6)}{\leq} \|L\|. \qquad (200)$$

Z posledného reťazca rovností a nerovností vyplýva, že Cauchyho–Schwarzova–Buňakovského nerovnosť sa v tomto prípade realizuje ako rovnosť. To znamená, že vektory Lx_0 a x_0 sú lineárne závislé, t.j., s ohľadom na $x_0 \neq 0$ existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ s vlastnosťou $Lx_0 = \lambda x_0$. Vektor x_0 je teda vlastným vektorom operátora L a číslo λ je odpovedajúca vlastná hodnota. A keďže operátor L je hermiteovský, v súlade s Vetou 51 je λ reálne číslo. Napokon máme

$$\|L\| \overset{(200)}{=} \|Lx_0\|_X = |\lambda| \cdot \|x_0\|_X = |\lambda|.$$

To znamená, že buď $\lambda = \|L\|$ alebo $\lambda = -\|L\|$, t.j., platí tvrdenie (i). ∎

Veta 53

Nech X je Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(X)$ je kompaktný hermiteovský operátor. Potom odpovedajúci funkcionál $|Q_L|$ definovaný v (178) nadobúda na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$ svoje maximum.

Dôkaz Vety 53.

Nakoľko X ako Hilbertov priestor je reflexívny, podľa Poznámky 16 je obraz jednotkovej gule $L(B_X[0,1])$ kompaktná množina v priestore X. V súlade s tvrdením Rayleighovej Vety 49 je funkcionál $|Q_L|$ ohraničený na množine $S_X[0,1]$. Podobne ako v dôkaze Vety 49 označme

$$s := \sup_{x \in S_X[0,1]} |Q_L(x)|. \tag{201}$$

Z (201) vyplýva existencia postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S_X[0,1]$ s vlastnosťou

$$\lim_{n\to\infty} |Q_L(x_n)| = s \quad \text{t.j., podľa (178)} \quad \lim_{n\to\infty} |\langle Lx_n, x_n\rangle| = s. \tag{202}$$

Keďže operátor L je kompaktný a $\|x_n\|_X = 1$, $n \in \mathbb{N}$, podľa Definície 14 je postupnosť $\{Lx_n\}_{n=1}^{\infty} \in L(B_X[0,1])$ relatívne kompaktná v X. To znamená, že existuje podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že odpovedajúca postupnosť hodnôt $\{Lx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná v X. Kompaktnosť obrazu $L(B_X[0,1])$ zaručuje, že príslušná limita patrí do množiny $L(B_X[0,1])$. Inými slovami,

Dôkaz Vety 53 (pokračovanie).

existuje vektor $x_0 \in B_X[0,1]$ s vlastnosťou $\lim_{k\to\infty} Lx_{n_k} = Lx_0$.

Následne podľa Lemy 5 platí

$$\lim_{k\to\infty} \langle Lx_{n_k}, x_{n_k}\rangle \overset{(197)}{=} \langle Lx_0, x_0\rangle. \tag{203}$$

Kombináciou rovnosti (203) s (202) potom dostaneme

$$s \overset{(202)}{=} \lim_{k\to\infty} |Q_L(x_{n_k})| \overset{(178)}{=} \lim_{k\to\infty} |\langle Lx_{n_k}, x_{n_k}\rangle| \overset{(203)}{=} |\langle Lx_0, x_0\rangle| \overset{(178)}{=} |Q_L(x_0)|.$$

Napokon ukážeme, že vektor $x_0 \in S_X[0,1]$, t.j., norma $\|x_0\|_X = 1$. Predpokladajme, že operátor $L \neq 0$. Potom v zhode s (179) je $|Q_L(x_0)| = s > 0$, a tak $x_0 \neq 0$. Ak by $\|x_0\|_X < 1$, potom vektor $x_0^* := \frac{1}{\|x_0\|_X} x_0 \in S_X[0,1]$ spĺňa

$$|Q_L(x_0^*)| \overset{(178)}{=} |\langle Lx_0^*, x_0^*\rangle| = \frac{1}{\|x_0\|_X} |\langle Lx_0, x_0\rangle| > |\langle Lx_0, x_0\rangle| \overset{(178)}{=} |Q_L(x_0)| = s,$$

čo však je v rozpore s definíciou čísla s v (201). Preto $\|x_0\|_X = 1$ a funkcionál $|Q_L|$ sa na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$ skutočne maximalizuje. V prípade operátora $L = 0$ na celom X tvrdenie dokazovanej vety platí triviálne, nakoľko kvadratický funkcionál Q_L je potom identicky nulový na X. Dôkaz je hotový. ∎

Veta 54 (Hilbertova–Schmidtova)

Nech X je Hilbertov priestor a $L \in \mathcal{L}(X)$ je kompaktný hermiteovský operátor. Nech $\{\lambda_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{R}$ s $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ je postupnosť jeho nenulových vlastných čísiel usporiadaná podľa (170). Potom existuje ortonormálny systém $\{x_n\}_{n=1}^N \subseteq X$ odpovedajúcich vlastných vektorov operátora L s vlastnosťou, že každý vektor $x \in X$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$x = y_x + \sum_{n=1}^{N} c_n x_n, \quad \text{kde vektor } y_x \in \operatorname{Ker} L \text{ a postupnosť } \{c_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}. \tag{204}$$

Dôkaz Vety 54.

V súlade s Vetou 47 má operátor iba reálne vlastné čísla, pričom podľa Dôsledku 5 a Poznámky 29 je ich najviac spočítateľne veľa a dajú sa usporiadať v tvare (170). Ďalším záverom Vety 47 a Dôsledku 5 je skutočnosť, že systém odpovedajúcich lineárne nezávislých vlastných vektorov operátora L je najviac spočítateľný a ortonormálny. Ukážeme, že tento systém sa dá vybrať tak, aby platila vlastnosť (204). Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^N \subseteq X$ budeme konštruovať induktívne, pričom využijeme vlastnosti kvadratického funkcionálu Q_L definovaného v (178). Podľa Vety 53 sa funkcionál $|Q_L|$ maximalizuje na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$. Nech $x_1 \in S_X[0,1]$ je vektor s vlastnosťou

Dôkaz Vety 54 (pokračovanie).

$$|Q_L(x_1)| = \max_{x \in S_X[0,1]} |Q_L(x)|.$$

Z Vety 52 vieme, že x_1 je potom vlastný vektor operátora L, ktorý odpovedá vlastnej hodnote $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ s $|\lambda_1| = \|L\|$. Označme $X_1 := \operatorname{Lin}\{x_1\}$. Zrejme $X_1 \subseteq X$ je uzavretý podpriestor v X, ktorý je invariantný vzhľadom na operátor L. Keďže L je hermiteovský, v súlade s Vetou 25 je i ortogonálny doplnok $X_1^\perp$ invariantný vzhľadom na L, t.j., platí $L(X_1^\perp) \subseteq X_1^\perp$. Vieme, že podpriestor $X_1^\perp$ je uzavretý v X, teda i úplný, t.j., Hilbertov priestor. Zúženie funkcionálu $|Q_L|$ na $X_1^\perp$ sa v zhode s Vetou 53 opäť maximalizuje na jednotkovej sfére $X_1^\perp \cap S_X[0,1]$, pričom vektor $x_2 \in X_1^\perp \cap S_X[0,1]$ definovaný vlastnosťou

$$|Q_L(x_2)| = \max_{x \in X_1^\perp \cap S_X[0,1]} |Q_L(x)|,$$

je podľa Vety 52 vlastný vektor operátora L. Vektor x_2 odpovedá vlastnej hodnote $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ s $|\lambda_2| = \|L_1\|$, kde operátor $L_1 := L_{X_1^\perp} : X_1^\perp \to X_1^\perp$. Zrejme podľa (6) je norma $\|L_1\| \leq \|L\|$, a tak

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \quad \text{a vektory } x_1 \in X_1 \text{ a } x_2 \in X_1^\perp \text{ sú ortogonálne.}$$

Analogickým spôsobom postupne zostrojíme ďalšie vlastné vektory a vlastné čísla operátora L. Konkrétne, ak $x_1, \ldots, x_n$ je ortonormálny systém vlastných vektorov operátora L stanovený vyššie uvedeným spôsobom a $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$

Dôkaz Vety 54 (pokračovanie).

je množina odpovedajúcich vlastných čísiel operátora L, potom uzavretý podpriestor $X_n := \mathrm{Lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ je Hilbertov priestor invariantný vzhľadom na operátor L. Funkcionál $|Q_L|$ sa na sfére $X_n^\perp \cap S_X[0,1]$ maximalizuje vo vektore x_{n+1}. Podľa Vety 52 je $x_{n+1} \in X_n^\perp \cap S_X[0,1]$ vlastný vektor operátora L, ktorý odpovedá vlastnej hodnote $\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ s $|\lambda_{n+1}| = \|L_n\|$, kde operátor $L_n := L_{X_n^\perp} : X_n^\perp \to X_n^\perp$. Naviac, systém vektorov $x_1 \ldots, x_{n+1}$ je ortonormálny a $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$. Dodajme, že postupnosť podpriestorov $\{X_n^\perp\}_{n=1}^\infty \subseteq X$ je nerastúca. V uvedenom procese konštrukcie vlastných vektorov a vlastných čísiel operátora L môžu nastať dve situácie.

Existuje najmenší index $N \in \mathbb{N}$ taký, že funkcionál $Q_L \equiv 0$ na $X_N^\perp \cap S_X[0,1]$.

To znamená, že funkcionál Q_L sa na množine $X_N^\perp \cap S_X[0,1]$ maximalizuje v každom vektore $x \in X_N^\perp \cap S_X[0,1]$. Ak podpriestor $X_N^\perp \neq \{0\}$, potom podľa Vety 52 je každé $x \in X_N^\perp \cap S_X[0,1]$ vlastný vektor operátora L odpovedajúci vlastnému číslu $\|L_N\| = |Q_L(x)| = 0$. Operátor L sa teda na podpriestore $X_N^\perp$ správa ako nulové obrazenie, t.j., $L(X_N^\perp) = \{0\}$. Preto L má práve N nenulových vlastných hodnôt a vlastnú hodnotu 0. Naviac, zostrojený systém vektorov $\{x_n\}_{n=1}^N$ dopĺňa každú ortonormálnu bázu podpriestoru $\mathrm{Ker}\, L$ na ortonormálnu bázu priestoru X. Platí teda jednoznačná reprezentácia v (204) pre každé $x \in X$. Ak $X_N^\perp = \{0\}$,

Dôkaz Vety 54 (pokračovanie).

potom operátor L má iba nenulové vlastné hodnoty (v počte N) a systém vektorov $\{x_n\}_{n=1}^N$ vytvára ortonormálnu bázu celého priestoru X. I v tomto prípade platí jednoznačná reprezentácia v (204) s $y_x = 0$ pre každé $x \in X$.

Pre každý index $n \in \mathbb{N}$ je funkcionál $Q_L \not\equiv 0$ na $X_n^\perp \cap S_X[0,1]$.

Uvažujme podpriestor $Z \subseteq X$ definovaný

$$Z := \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^\perp. \tag{205}$$

Zrejme Z je uzavretý podpriestor v X, a teda opäť Hilbertov priestor. Platí

$$|Q_L(x)| \leq |\lambda_n| \quad \text{pre každé } x \in Z \cap S_X[0,1] \text{ a každé } n \in \mathbb{N}. \tag{206}$$

Skutočne, číslo $|\lambda_n|$ je podľa predchádzajúcich úvah maximum funkcionálu $|Q_L|$ na jednotkovej sfére $X_{n-1}^\perp \cap S_X[0,1]$, pričom v zhode s (205) platí inklúzia $Z \cap S_X[0,1] \subseteq X_{n-1}^\perp \cap S_X[0,1]$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ (kladieme $X_0 := \{0\}$). Následným limitovaním nerovnosti (206) pre $n \to \infty$ s ohľadom na to, že podľa Poznámky 29 platí $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$, dostaneme

$$|Q_L(x)| = 0 \quad \text{pre každé } x \in Z \cap S_X[0,1]. \tag{207}$$

Dôkaz Vety 54 (pokračovanie).

Odvodená skutočnosť v (207) prevádza skúmaný problém na prípad analyzovaný vyššie. Ak podpriestor $Z \neq \{0\}$, potom $L(Z) = \{0\}$ a operátor L má nekonečne veľa nenulových vlastných hodnôt $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, pričom 0 je tiež jeho vlastná hodnota. Naviac, každá ortonormálna báza podpriestoru $\operatorname{Ker} L$ sa dá systémom vlastných vektorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ operátora L doplniť na ortonormálnu bázu celého priestoru X. Ak $Z = \{0\}$, potom zrejme $\operatorname{Ker} L = \{0\}$, a tak číslo 0 nie je vlastná hodnota operátora L. Nekonečná postupnosť vlastných vektorov $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ operátora L je ortonormálnou bázou priestoru X. V oboch prípadoch opäť platí jednoznačná reprezentácia (204) pre každé $x \in X$. Dôkaz je kompletný. ■

Poznámka 34

Nie je ťažké si premyslieť, že pre každý daný vektor $x \in X$ sú čísla c_n, $n \in \{1, \ldots, N\}$, v rovnosti (204) Fourierove koeficienty vektora x vzhľadom na ortonormálny systém $\{x_n\}_{n=1}^{N} \subseteq X$ vlastných vektorov operátora L, t.j., platí $c_n = \langle x, x_n \rangle$ pre každé $n \in \{1, \ldots, N\}$. Okrem toho platí formula

$$Lx \overset{(204)}{=} Ly_x + \sum_{n=1}^{N} c_n L x_n = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n x_n \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{208}$$