M7180 Funkcionálna analýza II

Striktne a uniformne konvexné priestory

Peter Šepitka

zima 2021

Obsah

Obsah

Extremálny bod konvexnej množiny

V tejto prednáške budeme študovať reálne Banachove priestory X.

Definícia 1 (Extremálny bod)

Nech X je (reálny) lineárny priestor a $G \subseteq X$ je konvexná množina. Vektor $x \in G$ sa nazýva extremálny bod množiny G, ak spĺňa vlastnosť

$$\text{ak } x = \frac{1}{2}(u+v) \text{ pre nejaké body } u, v \in G, \text{ potom nutne } u = v. \tag{1}$$

Inými slovami, bod $x \in G$ nie je stredom žiadnej nedegenerovanej usečky ležiacej v G. Množina všetkých extremálnych bodov množiny G sa označuje $\operatorname{ext} G$.

Poznámka 1

Nie je ťažké si premyslieť, že vlastnosť (1) je ekvivalentná s tým, že bod x nie je vnútorným bodom žiadnej úsečky ležiacej v konvexnej množine G. Ďalej platí

$$x \in \operatorname{ext} G \text{ práve vtedy, keď množina } G \setminus \{x\} \text{ je konvexná.} \tag{2}$$

Skutočne, ak $x \in \operatorname{ext} G$, potom pre rôzne body $u, v \in G \setminus \{x\}$ úsečka $\overline{uv}$ leží v $G \setminus \{x\}$, t.j., $G \setminus \{x\}$ je konvexná množina. Ak $G \setminus \{x\}$ je konvexná množina, potom žiadna úsečka $\overline{uv} \subseteq G$ neobsahuje vo svojom vnútri bod x, t.j., $x \in \operatorname{ext} G$.

Striktne konvexný priestor

Definícia 2 (Striktne konvexný priestor)

Nech X je Banachov priestor. Hovoríme, že X je striktne konvexný priestor, ak každý bod jednotkovej sféry $S_X[0,1]$ je extremálnym bodov uzavretej jednotkovej gule $B_X[0,1]$, t.j., je splnená inklúzia $S_X[0,1] \subseteq \operatorname{ext} B_X[0,1]$.

Poznámka 2

Keďže množina $B_X[0,1]$ je konvexná a v súlade s Definíciou 1 každý jej extremálny bod musí nutne ležať na jej hranici, t.j., na sfére $S_X[0,1]$, požiadavka inklúzie v Definícii 2 je ekvivalentná s rovnosťou $S_X[0,1] = \operatorname{ext} B_X[0,1]$. Z toho dôvodu žiadna sféra $S_X[x,r]$, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}^+$, v striktne konvexnom priestore X nemôže obsahovať (nedegenerovanú) úsečku. Doplňme, že v niektorej literatúre sa striktne konvexné Banachove priestory označujú názvom rotundné priestory.

Lema 1

Daný Banachov priestor X je striktne konvexný práve vtedy, keď pre každé dva rôzne body $x, y \in B_X[0,1]$ platí nerovnosť $\|x+y\|_X < 2$.

Dôkaz Lemy 1.

Poznamenajme, že v každom normovanom lineárnom priestore X platí nerovnosť

$$\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \leq 2 \quad \text{pre každé } x, y \in B_X[0,1]. \tag{3}$$

Ak X je striktne konvexný Banachov priestor a $x, y \in B_X[0,1]$ by boli dva rôzne body s $\|x+y\|_X = 2$, potom podľa (3) by nutne platilo

$$\|x\|_X = 1 = \|y\|_X \text{ a bod } z := \frac{1}{2}(x+y) \text{ by spĺňal } \|z\|_X = 1, \text{ t.j., } z \in S_X[0,1].$$

Podľa Definície 1 by to znamenalo, že bod z nie je extremálny bod množiny $B_X[0,1]$, čo však je v súlade s Definíciou 2 v rozpore so striktnou konvexnosťou priestoru X. Preto pre každé dva rôzne body $x, y \in B_X[0,1]$ sa nerovnosť v (3) vždy realizuje ako ostrá. Naopak, ak pre každé dva rôzne body $x, y \in B_X[0,1]$ platí $\|x+y\|_X < 2$ a priestor X by nebol striktne konvexný, potom podľa Definícií 2 a 1 by existovala netriviálna úsečka $\overline{uv} \subseteq B_X[0,1]$, ktorej stred by ležal na sfére $S_X[0,1]$. V tomto prípade by teda platilo

$$\left\|\frac{1}{2}(u+v)\right\|_X = 1, \text{ t.j., } \|u+v\|_X = 2,$$

čo však je v rozpore s predpokladom o vlastnostiach gule $B_X[0,1]$, nakoľko body u a v sú rôzne a ležia v množine $B_X[0,1]$. Preto priestor X musí byť striktne konvexný. Dôkaz je hotový. ■

Veta 1

Nech X je Banachov priestor. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X je striktne konvexný.*

(ii) *Pre každé dva rôzne nenulové vektory $x, y \in X$ platí*

$$\|x+y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X \quad \textit{práve vtedy, keď} \quad x = \lambda y \textit{ pre nejaké } \lambda > 0. \tag{4}$$

(iii) *Pre každé dva vektory $x, y \in X$ platí*

$$\|x+y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 \quad \textit{práve vtedy, keď} \quad x = y. \tag{5}$$

Dôkaz Vety 1.

Na začiatok poznamenajme, že časti obidvoch ekvivalencií (4) a (5) v smere "$\Leftarrow$" platia triviálne bez ohľadu na vlastnosti priestoru X, ako je možné ľahko overiť. V dôkaze teda stačí skúmať odpovedajúce implikácie "$\Rightarrow$". Nech X je striktne konvexný priestor a uvažujme dva nenulové vektory $x, y \in X$, pre ktoré platí rovnosť v (4), t.j., $\|x+y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $\|x\|_X \leq \|y\|_X$. Zrejme vektory

$$\frac{x}{\|x\|_X}, \frac{y}{\|y\|_X} \in S_X[0,1], \text{ a tak podľa (3) platí } \left\| \frac{x}{\|x\|_X} + \frac{y}{\|y\|_X} \right\|_X \leq 2. \tag{6}$$

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

Postupne dostávame

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_X} + \frac{y}{\|y\|_X} \right\|_X = \left\| \frac{x}{\|x\|_X} + \frac{y}{\|x\|_X} - \left(\frac{y}{\|x\|_X} - \frac{y}{\|y\|_X} \right) \right\|_X$$

$$= \left\| \frac{x+y}{\|x\|_X} - \underbrace{\left(\frac{1}{\|x\|_X} - \frac{1}{\|y\|_X} \right)}_{\geq 0} y \right\|_X$$

$$\geq \frac{\|x+y\|_X}{\|x\|_X} - \left(\frac{1}{\|x\|_X} - \frac{1}{\|y\|_X} \right) \|y\|_X$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{\|x\|_X + \|y\|_X}{\|x\|_X} - \left(\frac{1}{\|x\|_X} - \frac{1}{\|y\|_X} \right) \|y\|_X = 2. \qquad (7)$$

Z odvodenej nerovnosti (7) potom podľa (6) a výsledku Lemy 1 vyplýva, že

$$\text{vektory} \quad \frac{1}{\|x\|_X} x = \frac{1}{\|y\|_X} y, \quad \text{a tak} \quad x = \frac{\|x\|_X}{\|y\|_X} y,$$

t.j., platí druhá rovnosť v (4) s $\lambda := \frac{\|x\|_X}{\|y\|_X} > 0$. Dokázali sme platnosť implikácie (i)$\Rightarrow$(ii). Predpokladajme teraz platnosť tvrdenia (ii) a nech $x, y \in X$ sú rôzne

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

vektory, ktoré spĺňajú prvú rovnosť v (5). Ukážeme, že potom nutne platí rovnosť $\|x\|_X = \|y\|_X$. Skutočme, postupne máme

$$\begin{aligned} 0 &\le (\|x\|_X - \|y\|_X)^2 = \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 - 2\|x\|_X\|y\|_X \\ &= 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 - \left(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 + 2\|x\|_X\|y\|_X\right) \\ &= 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 - (\|x\|_X + \|y\|_X)^2 \le 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 - \|x+y\|_X^2 \overset{(5)}{=} 0. \end{aligned}$$

Následne, využijúc (5) platí $\|x+y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 = 4\|x\|_X^2$, a tak

$$\|x+y\|_X = 2\|x\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X. \tag{8}$$

Ak sú obidva vektory nenulové, potom z (8) v súlade s (4) vyplýva, že $x = \lambda y$ pre isté $\lambda > 0$. Keďže $\|y\|_X = \|x\|_X = \lambda\|y\|_X$, máme $\lambda = 1$, t.j., $x = y$, čo je spor s predpokladom o vektoroch x a y. Ak aspoň jeden z nich je nulový, tak vďaka odvodenej rovnosti $\|y\|_X = \|x\|_X$ sú nutne obidva nulové, čo je opäť spor s predpokladom. Preto musí platiť podmienka (5), čo kompletizuje dôkaz implikácie (ii)⇒(iii). Napokon pristúpime k dôkazu implikácie (iii)⇒(i). Predpokladajme, že priestor X spĺňa vlastnosť (5) a nech nie je striktne konvexný. V súlade s Lemou 1 potom existujú dva rôzne vektory $x, y \in B_X[0,1]$, pre ktoré platí rovnosť $\|x+y\|_X = 2$. Podľa nerovnosti (3) a následných úvah v dôkaze

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

Lemy 1 máme $x, y \in S_X[0,1]$, t.j., $\|x\|_X = 1 = \|y\|_X$. Následne dostávame

$$\|x+y\|_X^2 = 4 = 2+2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2, \quad \text{z čoho podľa (5) vyplýva} \quad x = y.$$

Dospeli sme teda k sporu, a preto priestor X musí byť striktne konvexný, t.j., platí implikácia (iii)⇒(i). Dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 3

Je dôležité poznamenať, že z dôkazu Vety 1 vyplýva, že vlastnosť

$$\text{ak} \quad \|x+y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2, \quad \text{potom} \quad \|x\|_X = \|y\|_X \tag{9}$$

platí v každom normovanom lineárnom priestore X. Ďalej si všimnime, že podmienka (5) je dôsledkom platnosti rovnobežníkového pravidla v priestore X, t.j.,

$$\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 \quad \text{pre každé } x, y \in X, \tag{10}$$

ktoré je podľa Jordanovej–von Neumannovej vety indikátorom skutočnosti, že daná norma $\|\cdot\|_X$ pochádza zo skalárneho súčinu. Z tohto pohľadu je požiadavka striktnej konvexnosti priestoru X snahou o prenesenie istých špecifických vlastností noriem v unitárnych priestoroch. Obzvlášť teda každý unitárny priestor s normou generovanou odpovedajúcim skalárnym súčinom je striktne konvexný.

Poznámka 4

Doplňme, že existuje mnoho iných charakteristík striktnej konvexnosti priestoru X. Ako príklad uvedieme bez dôkazov ďalšie dve ekvivalentné kritéria.

(iv) Pre dané $p \in (1, \infty)$ platí

$$\|x + y\|_X^p < 2^p \|x\|_X^p + 2^p \|y\|_X^p \quad \text{pre každé rôzne } x, y \in X. \tag{11}$$

(v) Pre každé tri vektory $x, y, z \in X$ platí

$$\|x - y\|_X = \|x - z\|_X + \|z - y\|_X \tag{12}$$

práve vtedy, keď z je konvexná lineárna kombinácia vektorov x a y.

Príklad 1

Priestory l^1 a l^∞ nie sú striktne konvexné. Pre priestor l^1 to vyplýva z pozorovania, že pre každú dvojicu postupností $e_k, e_l \in l^1$ s $k \neq l$ úsečka $\overline{e_k e_l}$ leží na jednotkovej sfére $S_{l^1}[0,1]$, nakoľko $\|\lambda e_k + (1-\lambda)e_l\|_1 = \lambda + 1 - \lambda = 1$ pre každé $\lambda \in [0,1]$. Keďže podľa Definície 1, resp. Poznámky 1 žiadny vnútorný bod úsečky $\overline{e_k e_l}$ nie je extremálnym bodom množiny $B_{l^1}[0,1]$, v súlade s Definíciou 2 priestor l^1 nie je striktne konvexný. V prípade priestoru l^∞ platí rovnaká argumentácia vzhľadom na každú úsečku $\overline{x e_l}$, $l \in \mathbb{N}$, kde $x = \{1\}_{k=1}^\infty \subseteq l^\infty$.

Príklad 2

Uvažujme na priestore l^1 normu $\|\cdot\|$ tvaru

$$\|x\| := \|x\|_1 + \|x\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^1. \tag{13}$$

Norma v (13) je definovaná korektne, nakoľko platí inklúzia $l^1 \subseteq l^2$. Ukážeme, že vzhľadom na túto normu je priestor l^1 striktne konvexný. Využijeme výsledok Vety 1(ii). Nech $x, y \in l^1$ sú nejaké dané identicky nenulové postupnosti spĺňajúce rovnosť $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. V súlade s (13) postupne platí

$$\|x+y\|_1 + \|x+y\|_2 = \|x\|_1 + \|x\|_2 + \|y\|_1 + \|y\|_2$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\|x+y\|_1 - \|x\|_1 - \|y\|_1}_{\leq 0} = \underbrace{\|x\|_2 + \|y\|_2 - \|x+y\|_2}_{\geq 0} \tag{14}$$

Z (14) následne vyplývajú rovnosti

$$\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1, \quad \|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2. \tag{15}$$

Keďže $x, y \in l^1 \subseteq l^2$ a l^2 je Hilbertov priestor, podľa komentára v Poznámke 3

Príklad 2

je l^2 striktne konvexný priestor. Druhá rovnosť v (15) preto v súlade s (4) implikuje $x = \lambda y$ pre vhodné $\lambda > 0$. Následne, aplikujúc Vetu 1(ii) opäť, ale na normu v (13), platí, že priestor l^1 je vzhľadom na normu $\|\cdot\|$ striktne konvexný.

Príklad 3

Analogickú situáciu ako v Príklade 2 máme v prípade $X = \mathcal{C}[0,1]$ a normy

$$\|x\| := \|x\|_C + \|x\|_{L^2} = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sqrt{\int_0^1 |x(t)|^2 \mathrm{d}t}, \quad x \in X. \tag{16}$$

Vzhľadom na normu $\|\cdot\|_C$ priestor X nie je striktne konvexný, nakoľko napríklad pre funkcie $x(t) = t$ a $y(t) = t^2$ máme

$$\|x\|_C = 1 = \|y\|_C, \quad \|x+y\|_C = 2,$$

ale neplatí $x = \lambda y$ pre žiadnu kladnú konštantu λ, ako vyžaduje kritérium vo Vete 1(ii). Na druhej strane, norma definovaná v (16) je striktne konvexná, keďže norma $\|\cdot\|_{L^2}$ pochádza zo skalárneho súčinu v priestore $\mathcal{C}[0,1]$. Toto jednoduché pozorovanie platí pre ľubovoľný lineárny priestor X. Všeobecne, každá norma na X, ktorá je súčtom konečného počtu noriem na X, z ktorých aspoň jedna je striktne konvexná na X, je tiež striktne konvexná na priestore X.

Obsah

Uniformne konvexné priestory

Uvažujme pre dané $n \in \mathbb{N}$ euklidovský priestor $X = \mathbb{E}^n$. Nasledujúci problém predstavuje istú motiváciu a opodstatnenie zavedenia pojmu uniformne konvexný lineárny priestor. Pre dané pevné číslo $0 < d \leq 2$ uvažujme množinu všetkých úsečiek $\overline{uv} \subseteq B_X[0,1]$ dĺžky d. Je zrejmé, že stredy takýchto úsečiek vždy ležia vo vnútri gule $B_X[0,1]$ a ich vzdialenosť od jednotkovej sféry $S_X[0,1]$ nemôže byť ľubovoľne malá. Konkrétne, pomocou nástrojov elementárnej geometrie je možné pomerne ľahko odvodiť, že minimálna vzdialenosť týchto stredov je

$$1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}},$$

pričom táto hodnota nezávisí na dimenzii n priestoru X. Naviac, v tomto prípade zrejme krajné body u a v danej úsečky ležia na sfére $S_X[0,1]$. Ukazuje sa prirodzené položiť si otázku, aké riešenie má vyššie uvedený problém v priestoroch X s nekonečnou dimenziou, obzvlášť, či môže nastať situácia, že stredy úsečiek $\overline{uv} \subseteq B_X[0,1]$ s danou dĺžkou d sa môžu k jednotkovej sfére $S_X[0,1]$ priblížiť neobmedzene blízko. Nasledujúca definícia vymedzuje triedu (úplných) normovaných lineárnych priestorov, v ktorých je zachovaná vyššie uvedená vlastnosť konečnorozmerných euklidovských priestorov $\mathbb{E}^n$.

Definícia 3 (Uniformne konvexný priestor)

Nech X je Banachov priestor. Hovoríme, že X je uniformne konvexný priestor, ak pre každé $\varepsilon \in (0, 2]$ existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$\text{pre každé } x, y \in B_X[0,1] \text{ spĺňajúce } \|x - y\|_X \geq \varepsilon \text{ platí } \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_X \leq 1 - \delta. \quad (17)$$

Poznámka 5

Obsah Definície 3 vystihuje práve vlastnosť jednokovej gule v euklidovských priestoroch s konečnou dimenziou. Konkrétne, normy stredov úsečiek v $B_X[0,1]$ s danou dĺžkou $0 < \varepsilon \leq 2$ majú zhora ohraničenú normu, ktorá je odrazenú od hodnoty 1. Inými slovami, nemôžu sa k jednotkovej sfére $S_X[0,1]$ priblížiť neobmedzene blízko. Presnejšie, ak $\overline{xy} \subseteq B_X[0,1]$ je úsečka danej dĺžky ε, potom pre každý bod $s \in S_X[0,1]$ platí

$$\left\|s - \frac{1}{2}(x+y)\right\|_X \geq \left|\|s\|_X - \frac{1}{2}\|x+y\|_X\right| \overset{(17)}{=} 1 - \frac{1}{2}\|x+y\|_X \geq \delta, \qquad (18)$$

t.j., vzdialenosť $\rho(\frac{1}{2}(x+y), S_X[0,1]) \geq \delta > 0$. Na druhej strane, v priestoroch X, ktoré nie sú uniformne konvexné, táto "geometrická" vlastnoť uzavretej jednotkovej gule $B_X[0,1]$ nemusí byť nutne zaručená.

Veta 2

Nech X je Banachov priestor. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X je uniformne konvexný.*

(ii) *Podmienka (17) v Definícii 3 je splnená pre vektory $x, y \in S_X[0,1]$.*

(iii) *Pre každé dve postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S_X[0,1]$ spĺňajúce*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_k + y_k) \right\|_X = 1 \quad \textit{platí} \quad \lim_{k\to\infty} (x_k - y_k) = 0. \tag{19}$$

Dôkaz Vety 2.

Platnosť implikácie (i)⇒(ii) vyplýva priamo z podmienky (17) v Definície 3. Nech platí tvrdenie (ii). Sporom predpokladajme, že tvrdenie (iii) neplatí, t.j., existujú dve postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S_X[0,1]$ také, že vzhľadom na (19)

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_k + y_k) \right\|_X = 1, \quad \text{ale} \quad \lim_{k\to\infty} (x_k - y_k) \neq 0, \tag{20}$$

kde posledná relácia znamená, že limita buď neexistuje alebo existuje a je rôzna od nuly. Ekvivalentne to znamená, že číselná postupnosť $\{\|x_k - y_k\|_X\}_{k=1}^{\infty}$ nemá limitu 0. Z vlastností množiny reálnych čísiel potom vyplýva, že $\{\|x_k - y_k\|_X\}_{k=1}^{\infty}$ má aspoň jeden kladný hromadný bod. Označme ho 2ε pre isté $\varepsilon > 0$. To zna-

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

mená, že existujú vybrané podpostupnosti $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}, \{y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty} \subseteq S_X[0,1]$ tak, že

$$\lim_{l\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_{k_l} + y_{k_l}) \right\|_X \overset{(20)}{=} 1 \quad \text{a} \quad \lim_{l\to\infty} \|(x_{k_l} - y_{k_l})\|_X = 2\varepsilon. \tag{21}$$

Keďže $\|x_{k_l}\|_X = 1 = \|y_{k_l}\|_X$, máme

$$\|(x_{k_l} - y_{k_l})\|_X \leq \|(x_{k_l}\|_X + \|y_{k_l})\|_X = 2, \quad \text{a teda v súlade s (21) } \varepsilon \in (0,1]. \tag{22}$$

Ďalej, druhá limitná rovnosť v (21) zaručuje existenciu $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou $\big|\|(x_{k_l} - y_{k_l})\|_X - 2\varepsilon\big| < \varepsilon$ pre každé $l \geq l_\varepsilon$. Následne platí

$$-\varepsilon < \|(x_{k_l} - y_{k_l})\|_X - 2\varepsilon \quad \longrightarrow \quad \|(x_{k_l} - y_{k_l})\|_X > \varepsilon \quad \text{pre každé } l \geq l_\varepsilon. \tag{23}$$

Z platnosti tvrdenia (ii) v súlade s (17) potom existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$\left\| \frac{1}{2}(x_{k_l} + y_{k_l}) \right\|_X \leq 1 - \delta \quad \text{pre každé } l \geq l_\varepsilon. \tag{24}$$

Kombináciou (24) a (21) s limitovaním pre $l \to \infty$ dostávame

$$1 \overset{(21)}{=} \lim_{l\to\infty} \left\| \frac{1}{2}(x_{k_l} + y_{k_l}) \right\|_X \overset{(24)}{\leq} 1 - \delta, \quad \text{čo znamená, že } \delta \leq 0.$$

To je očividný spor. Preto tvrdenie (iii) platí a implikácia (ii)$\Rightarrow$(iii) je dokázaná.

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

Napokon pristúpime k dôkazu implikácie (iii)$\Rightarrow$(i). Nech platí tvrdenie (iii) a opäť sporom predpokladajme, že priestor X nie je uniformne konvexný. V súlade s Definíciou 3 teda existuje $\varepsilon \in (0,2]$ a dve existujú postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B_X[0,1]$ s vlastnosťou

$$\|x_k - y_k\|_X \geq \varepsilon \quad \text{a} \quad \left\|\frac{1}{2}(x_k + y_k)\right\|_X \geq 1 - \frac{1}{k} \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Nakoľko máme $\|x_k\|_X \leq 1$ a $\|y_k\|_X \leq 1$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, z (25) dostávame

$$1 - \frac{1}{k} \leq \left\|\frac{1}{2}(x_k + y_k)\right\|_X \leq \frac{1}{2}\|x_k\|_X + \frac{1}{2}\|y_k\|_X \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\frac{1}{2}(x_k + y_k)\right\|_X = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \|x_k\|_X = 1 = \lim_{k\to\infty} \|y_k\|_X. \tag{26}$$

Vďaka posledným rovnostiam v (26) môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $\|x_k\|_X > 0$ a $\|y_k\|_X > 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Definujme vektory

$$u_k := \frac{1}{\|x_k\|_X} x_k, \quad v_k := \frac{1}{\|y_k\|_X} y_k \quad k \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Zrejme $u_k, v_k \in S_X[0,1]$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$. Naviac platí

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

$$\|u_k - x_k\|_X \overset{(27)}{=} \|x_k\|_X \left(\frac{1}{\|x_k\|_X} - 1 \right) \overset{(26)}{\longrightarrow} = 0, \tag{28}$$

$$\|v_k - y_k\|_X \overset{(27)}{=} \|y_k\|_X \left(\frac{1}{\|y_k\|_X} - 1 \right) \overset{(26)}{\longrightarrow} = 0, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \big| \|u_k + v_k\|_X - \|x_k + y_k\|_X \big| &\leq \|u_k + v_k - (x_k + y_k)\|_X \\ &\leq \|u_k - x_k\|_X + \|v_k - y_k\|_X , \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{30}$$

Relácie (28)–(30) v kombinácii s prvou rovnosťou v (26) implikujú

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{2} (u_k + v_k) \right\|_X \overset{(28)-(30)}{=} \lim_{k\to\infty} \left\| \frac{1}{2} (x_k + y_k) \right\|_X \overset{(26)}{=} 1. \tag{31}$$

Na druhej strane platí

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon \overset{(25)}{\leq} \|x_k - y_k\|_X &= \|(x_k - u_k) + (v_k - y_k) + (u_k - v_k)\|_X \\ &\leq \|x_k - u_k\|_X + \|v_k - y_k\|_X + \|u_k - v_k\|_X , \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{32}$$

A nakoľko podľa (28) a (29) je $\lim_{k\to\infty} \|x_k - u_k\|_X = 0 = \lim_{k\to\infty} \|y_k - v_k\|_X$,

Dôkaz Vety 2 (pokračovanie).

z nerovnosti v (32) vyplýva, že $0 < \varepsilon \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k - v_k\|_X$. V kombinácii s reláciou (31) však dospejeme k sporu s platnosťou (19) v tvrdení (iii) s voľbou $x_k := u_k$ a $y_k := v_k$. Preto priestor X je uniformne konvexný, t.j., platí (i). ■

Poznámka 6

Uvedieme tri iné tvrdenia ekvivalentné s uniformnou konvexnosťou priestoru X.

(iv) Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že ak pre vektory $x, y \in X$ platí

$$\|x\|_X < 1+\delta,\ \|y\|_X < 1+\delta \text{ a } \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_X \geq 1, \text{ potom } \|x-y\|_X < \varepsilon.$$

(v) Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že ak pre vektory $x, y \in S_X[0,1]$ platí

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_X \geq 1-\delta, \text{ potom } \|x-y\|_X \leq \varepsilon. \tag{33}$$

(vi) Pre každé dve postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$, z ktorých aspoň jedna je ohraničená, platí, že ak

$$\lim_{k\to\infty}\left[2\|x_k\|_X^2 + 2\|y_k\|_X^2 - \|x_k+y_k\|_X^2\right] = 0, \text{ potom } \lim_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0.$$

Veta 3

Nech X je Banachov priestor. Platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Ak X je uniformne konvexný priestor, potom je aj striktne konvexný.*

(ii) *V prípade $\dim X < \infty$ je priestor X uniformne konvexný práve vtedy, keď je striktne konvexný.*

(iii) *Ak X je unitárny (Hilbertov) priestor, potom je uniformne konvexný.*

Dôkaz Vety 3.

Nech X je uniformne konvexný priestor a pripusťme, že nie je striktne konvexný. Potom podľa Definície 2 existuje netriviálna úsečka $\overline{xy} \subseteq B_X[0,1]$ dĺžky $\varepsilon > 0$, ktorej stred leží na jednotkovej sfére $S_X[0,1]$, t.j., pre body $x, y \in B_X[0,1]$ platí

$$\|x - y\|_X = \varepsilon \quad \text{a} \quad \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|_X = 1. \tag{34}$$

V súlade s vlastnosťou (17) v Definícii 3 však pre uvedené $\varepsilon > 0$ existuje kladné číslo δ také, že $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_X \leq 1 - \delta$. Porovnaním s druhou rovnosťou v (34) dostávame $\delta \leq 0$, čo je spor. Preto priestor X musí byť striktne konvexný, t.j., tvrdenie (i) platí. Majme teraz striktne konvexný priestor X, ktorý má konečnú dimenziu. V tomto prípade je uzavretá guľa $B_X[0,1]$ vždy kompaktná množina v X. Ak na priestore $X \times X$ budeme uvažovať súčinovú normu

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

$$\|[x,y]\|_* := \|x\|_X + \|y\|_X\,, \quad x, y \in X, \tag{35}$$

potom $B_X[0,1] \times B_X[0,1] \subseteq X \times X$ je kompaktná množina vzhľadom na normu $\|\cdot\|_*$ definovanú v (35). Zvoľme nejaké číslo $\varepsilon \in (0,2]$ a uvažujme množinu $M_\varepsilon \subseteq B_X[0,1] \times B_X[0,1]$ tvaru

$$M_\varepsilon := \{[x,y] \in B_X[0,1] \times B_X[0,1],\ \|x-y\|_X \geq \varepsilon\}\,, \tag{36}$$

Nie je ťažké si premyslieť, že vzhľadom na normu $\|\cdot\|_*$ v (35) je množina M_ε v (36) uzavretá, a teda – ako podmnožina kompaktnej množiny $B_X[0,1] \times B_X[0,1]$ – kompaktná v $X \times X$. Zobrazenie $f : M_\varepsilon \to \mathbb{R}$ definované predpisom

$$f(x,y) := \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|_X\,, \quad [x,y] \in M_\varepsilon, \tag{37}$$

je zrejme spojité a ohraničené. Konkrétne, v súlade s Lemou 1 platí $f(x,y) < 1$ pre každý bod $[x,y] \in M_\varepsilon$. Existuje teda číslo $\alpha \in (0,1)$ s vlastnosťou

$$f(x,y) \leq \alpha \quad \text{pre každé } [x,y] \in M_\varepsilon. \tag{38}$$

Položme $\delta := 1 - \alpha$. Zrejme $\delta > 0$ a kombináciou (36)–(38) dostávame, že

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|_X \overset{(37),(38)}{\leq} 1 - \delta \text{ pre každé } [x,y] \in M_\varepsilon,$$

t.j., podľa (36) pre každé $x, y \in B_X[0,1]$ spĺňajúce $\|x-y\|_X \geq \varepsilon$.

Dôkaz Vety 3 (pokračovanie).

Táto relácia podľa Definície 3 znamená, že priestor X je uniformne konvexný a tvrdenie (ii) je dokázané. Napokon pristúpime k dôkazu tvrdenia (iii). Nech X je daný unitárny priestor. Zvoľme číslo $\varepsilon \in (0, 2]$ a vektory $x, y \in B_X[0, 1]$. Následne platí $\|x\|_X \leq 1$ a $\|y\|_X \leq 1$ a ak $\|x - y\|_X \geq \varepsilon$, potom pomocou rovnobežníkového pravidla (10) postupne dostávame

$$\|x + y\|_X^2 \overset{(10)}{=} 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 - \|x - y\|_X^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\|_X \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Položiac $\delta := 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} > 0$ je ľahko vidieť, že odvodená relácia je ekvivalentná s vlastnosťou (17) v Definícii 3, t.j, priestor X je uniformne konvexný. ∎

Poznámka 7

Je dôležité poznamenať, že konečnorozmerný Banachov priestor X nemusí byť nutne striktne konvexný. Príkladom je priestor $\mathbb{R}^n$ vzhľadom na súčtovú normu, resp. vzhľadom na maximálnu normu.

Príklad 4

Ukážeme, že priestor l^1 z Príkladu 2 nie je vzhľadom na normu $\|\cdot\|$ definovanú v (13) uniformne konvexný. Zvoľme pevne $N \in \mathbb{N}$ a uvažujme dve postupnosti $x^{[N]}$ a $y^{[N]}$ z priestoru l^1 definované predpismi

$$x^{[N]} := \{\underbrace{1,\dots,1}_{N},0,\dots\}, \quad y^{[N]} := \{\underbrace{0,\dots,0}_{N},\underbrace{1,\dots,1}_{N},0,\dots\}. \tag{39}$$

Podľa (39) a (13) zrejme platí

$$\left\|x^{[N]}\right\| \overset{(13)}{=} N+\sqrt{N} \overset{(13)}{=} \left\|y^{[N]}\right\|, \quad \left\|x^{[N]}-y^{[N]}\right\| \overset{(13)}{=} 2N+\sqrt{2N}, \tag{40}$$

$$\left\|\frac{1}{2}\left(x^{[N]}+y^{[N]}\right)\right\| \overset{(13)}{=} N+\sqrt{\frac{N}{2}}. \tag{41}$$

Definujme novú dvojicu postupností $u^{[N]}, v^{[N]} \in l^1$ formulami

$$u^{[N]} := \frac{1}{N+\sqrt{N}}\, x^{[N]}, \quad v^{[N]} := \frac{1}{N+\sqrt{N}}\, y^{[N]}. \tag{42}$$

Následne v súlade s (40) máme

$$\left\|u^{[N]}\right\| \overset{(42),(40)}{=} 1 \overset{(42),(40)}{=} \left\|v^{[N]}\right\|, \tag{43}$$

Príklad 4

$$\left\| u^{[N]} - v^{[N]} \right\| \overset{(42),(40)}{=} \frac{2N + \sqrt{2N}}{N + \sqrt{N}} > \sqrt{2} \in (0, 2], \tag{44}$$

$$\left\| \frac{1}{2} \left(u^{[N]} + v^{[N]} \right) \right\| \overset{(42),(41)}{=} \frac{N + \sqrt{\frac{N}{2}}}{N + \sqrt{N}} \to 1 \text{ pre } N \to \infty. \tag{45}$$

Voľbou $\varepsilon := \sqrt{2}$ platí v súlade s (43) a (44), že

$$u^{[N]}, u^{[N]} \in S_{l^1}[0,1] \quad \text{a} \quad \left\| u^{[N]} - v^{[N]} \right\| > \varepsilon \quad \text{pre každé } N \in \mathbb{N}.$$

Avšak z (45) vyplýva, že neexistuje $\delta \in (0,1)$ také, aby platilo

$$\left\| \frac{1}{2} \left(u^{[N]} + v^{[N]} \right) \right\| \leq 1 - \delta \quad \text{pre každé } N \in \mathbb{N}.$$

V súlade s Vetou 2(ii) teda norma $\|\cdot\|$ v (13) na l^1 nie je uniformne konvexná.

Príklad 5

Nech $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ je daná lebesgueovsky merateľná množina a $p \in (1, \infty)$ dané číslo.

Príklad 5

Potom priestor funkcií $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$, kde norma

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{L}^p(\Omega),$$

je vždy, t.j., pre každú danú voľbu Ω a p, uniformne konvexný. Existuje niekoľko možností, ako dokázať túto skutočnosť. Uvedieme dôkaz využívajúci tzv. rovnobežníkové (Clarksonove) nerovnosti, ktoré platia v priestoroch $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Konkrétne, pre prípad $p \in (1,2)$ máme relácie

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \le 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{q-1}, \quad f,g \in \mathcal{L}^p(\Omega), \tag{46}$$

kde $q := \frac{p}{p-1}$, kým pre $p \in [2,\infty)$ platí

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \le 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right), \quad f,g \in \mathcal{L}^p(\Omega), \tag{47}$$

Uvažujme číslo $p \in (1,2)$. Zvoľme $\varepsilon \in (0,2]$ a nech $f,g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ spĺňajú

$$\|f\|_p = 1 = \|g\|_p, \quad \|f-g\|_p \ge \varepsilon. \tag{48}$$

Potom pomocou nerovnosti (46) máme

$$\|f+g\|_p^q \overset{(46)}{\le} 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{q-1} - \|f-g\|_p^q \overset{(48)}{\le} 2^q - \varepsilon^q, \tag{49}$$

Príklad 5

z čoho následne dostávame

$$\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\|_p^q \overset{(49)}{\leq} 1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q. \tag{50}$$

V kritériu Veta 2(ii) potom vzhľadom na (50) stačí položiť

$$\delta := 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{1/q} > 0.$$

V prípade $p \in [2,\infty)$ postupujeme podobne. Pre dvojicu $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, ktoré spĺňajú relácie v (48), v súlade s Clarksonovou nerovnosťou (47) máme

$$\|f+g\|_p^p \overset{(47)}{\leq} 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right)-\|f-g\|_p^p \overset{(48)}{\leq} 2^p-\varepsilon^p, \tag{51}$$

z čoho následne vyplýva, že

$$\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\|_p^p \overset{(51)}{\leq} 1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{52}$$

V kritériu Veta 2(ii) potom vzhľadom na (52) stačí položiť

$$\delta := 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0.$$

Príklad 6 (Radonov–Rieszov priestor)

Normovaný lineárny priestor X sa označuje ako Radonov–Rieszov priestor, resp. ako priestor majúci Radonovu–Rieszovu vlastnosť, ak pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ a vektor $x \in X$ platí

$$\text{ak } x_k \rightharpoonup x \in X \text{ a } \|x_k\|_X \to \|x\|_X \text{ pre } k \to \infty, \text{ potom } \lim_{k\to\infty} x_k = x \text{ v norme.} \quad (53)$$

Pomocou poznatku, že každá norma na X je slabo zdola polospojitá funkcia na X, je možné pomerne jednoducho dokázať, že každý uniformne konvexný Banachov priestor X má Radonovu–Rieszovu vlastnosť (53). Špeciálne, v súlade s Vetou 3(iii) každý Hilbertov priestor X je Radonov–Rieszov priestor.

Veta 4 (Milmanova–Pettisova)

Každý uniformne konvexný Banachov priestor X je reflexívny.

Dôkaz Vety 4.

Pri dôkaze využijeme tzv. Jamesovu charakterizáciu reflexívnych Banachových priestorov. Konkrétne, platí, že Banachov priestor X je reflexívny práve vtedy, keď každý spojitý lineárny funkcionál na X nadobúda na guli $B_X[0,1]$ svoju normu. Inými slovami, Banachov priestor X je reflexívny práve vtedy, keď

Dôkaz Vety 4 (pokračovanie).

$$\text{pre každé } f \in X' \text{ platí } \|f\| = \max\{|f(x)|,\ \|x\|_X \leq 1\}. \tag{54}$$

Zvoľme nejaký funkcionál $f \in X'$ a bez ujmy na všeobecnosti nech pre jeho normu platí $\|f\| = 1$. Podľa jednej z ekvivalentných definícii normy spojitého lineárneho funkcionálu na X platí rovnosť $1 = \|f\| = \sup\{|f(x)|,\ x \in S_X[0,1]\}$. Potom sa dá vybrať postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S_X[0,1]$ s vlastnosťou

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 1. \tag{55}$$

Nech priestor X je uniformne konvexný. Dokážeme, že potom vyššie uvažovaná postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nutne cauchyovská v X. Využijeme pri tom vlastnosť (v) v Poznámke 6. Nech $\varepsilon > 0$ je dané a nech $\delta \in (0,1)$ je v zhode s týmto kritériom také, že platí podmienka (33). Vďaka rovnosti (55) zrejme existuje index $k_0 \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou $1-\delta \leq f(x_k)$ pre každé $k \geq k_0$. Následne máme

$$2(1-\delta) \leq f(x_k)+f(x_l) = f(x_k+x_l) \leq |f(x_k+x_l)| \leq \|f\|\,\|x_k+x_l\|_X = \|x_k+x_l\|_X$$

pre každé $k,l \geq k_0$. Úpravou poslednej nerovnosti získame

$$\left\|\frac{1}{2}(x_k+x_l)\right\|_X \geq 1-\delta \quad \text{pre každé } k,l \geq k_0. \tag{56}$$

V súlade s podmienkou (33) ihneď dostávame nerovnosť $\|x_k - x_l\|_X \leq \varepsilon$ pre každé $k,l \geq k_0$, t.j., postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S_X[0,1]$ je cauchyovská, a teda i konvergentná v úplnom priestore X. Nech $x := \lim_{k\to\infty} x_k$ je jej odpovedajúca

Dôkaz Vety 4 (pokračovanie).

limita vX. Zrejme $x \in S_X[0,1]$, t.j., $\|x\|_X = 1$, a vďaka spojitosti funkcionálu f z rovnosti (55) vyplýva $f(x) = 1$. To dokazuje vlastnosť (54). Podľa Jamesovho kritéria je teda Banachov priestor X reflexívny. Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 8

Poznamenajme, že striktne konvexný Banachov priestor nemusí byť reflexívny. Dokonca ani striktne konvexný a reflexívny Banachov priestor nemusí byť uniformne konvexný. Dá sa napríklad dokázať existencia separabilného striktne konvexného a reflexívneho Banachovho priestoru, ktorý nie je uniformne konvexný.

Veta 5 (Kleeova)

Nech X je reálny Banachov priestor a X' je jeho odpovedajúci duálny priestor. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Ak X' je striktne konvexný priestor, potom X je hladký priestor.*

(ii) *Ak X' je hladký priestor, potom X je striktne konvexný priestor.*

Dôkaz Vety 5.

Pri obidvoch tvrdení dokážeme platnosť ich obmien. Nech priestor X nie je hladký. Potom existuje bod $x \in S_X[0,1]$, v ktorom máme dva rôzne dotykové funkcionály $f, g \in X'$, t.j.,

$$\|f\|_{X'} = 1 = \|g\|_{X'} \quad \text{a} \quad f(x) = \|x\|_X = g(x). \tag{57}$$

Ukážeme, že stred úsečky $\overline{fg} \in X'$ tiež leží na jednotkovej sfére $S_{X'}[0,1]$, t.j., $\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\|_{X'} = 1$. Skutočne, postupne platí

$$\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\|_{X'} \le \frac{1}{2}\|f\|_{X'} + \frac{1}{2}\|g\|_{X'} \stackrel{(57)}{=} 1, \quad \text{t.j.,} \quad \left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\|_{X'} \le 1,$$

$$\left|\frac{1}{2}(f+g)(x)\right| = \left|\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x)\right| \stackrel{(57)}{=} \|x\|_X = 1 \quad \text{t.j.,} \quad \left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\|_{X'} \ge 1.$$

Podľa Definície 2 preto duálny priestor X' nemôže byť striktne konvexný, čo dokazuje platnosť tvrdenia (i). Predpokladajme, že priestor X nie je striktne konvexný. To znamená, že existujú dva rôzne vektory $x, y \in S_X[0,1]$ také, že aj vektor $\frac{1}{2}(x+y) \in S_X[0,1]$. Z dôsledku Hahnovej–Banachovej vety vieme, že v bode $\frac{1}{2}(x+y)$ existuje dotykový funkcionál, t.j., existuje $f \in X'$ s vlastnosťou

$$\|f\|_{X'} = 1 \quad \text{a} \quad f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|_X = 1. \tag{58}$$

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

Keďže z prvej rovnosti v (58) máme $|f(x)| \leq 1$ a $|f(y)| \leq 1$ a ďalej

$$1 \overset{(58)}{=} f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \leq \frac{1}{2}|f(x)| + \frac{1}{2}|f(y)| \leq 1, \tag{59}$$

v (59) sa všade realizujú práve rovnosti, a tak platí $|f(x)| = 1 = |f(y)|$. Naviac,

$$f(x) + f(y) \overset{(59)}{=} |f(x)| + |f(y)| \quad \longrightarrow \quad \underbrace{|f(x)| - f(x)}_{\geq 0} + \underbrace{|g(x)| - g(x)}_{\geq 0} = 0.$$

Preto dokonca máme $f(x) = |f(x)| = 1$ a $f(y) = |f(y)| = 1$. Uvažujme funkcionály $F_x, F_y \in X''$, ktoré v prirodzenom zobrazení $\pi : X \to X''$ odpovedajú vektorom x a y, t.j.,

$$F_x(g) = g(x), \quad F_y(g) = g(y), \quad g \in X', \tag{60}$$

$$\|F_x\|_{X''} = \|x\|_X = 1, \quad \|F_y\|_{X''} = \|y\|_X = 1. \tag{61}$$

Keďže vektory x a y sú podľa predpokladov rôzne a zobrazenie π je injektívne, funkcionály F_x a F_y sú tiež rôzne. Pre voľbu $g := f$ platí

$$F_x(f) \overset{(60)}{=} f(x) = 1, \quad F_y(f) \overset{(60)}{=} f(y) = 1. \tag{62}$$

Kombináciou (62) a (61) dostávame, že F_x a F_y sú dva rôzne dotykové funkcio-

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

nály v bode $f \in S_{X'}[0,1]$, v súlade s (58). Duálny priestor X' preto nemôže byť hladký v bode $f \in X'$, a teda ani hladký a tvrdenie (ii) je dokázané. ∎

Poznámka 9

Z Kleeovej Vety 5 vyplývajú bezprostredné pozorovania

$$X'' \text{ je striktne konvexný } \Rightarrow X' \text{ je hladký } \Rightarrow X \text{ je striktne konvexný} \tag{63}$$

$$X'' \text{ je hladký } \Rightarrow X' \text{ je striktne konvexný } \Rightarrow X \text{ je hladký.} \tag{64}$$

Ďalej poznamenajme, že vo všeobecnosti striktne konvexný priestor X nemusí mať svoj duálny priestor X' hladký. Podobne, pre hladký priestor X nemusí byť nutne jeho duálny priestor X' striktne konvexný. Ak však priestor X je izometricky izomorfný s svojim druhým duálnym priestorom, potom v oboch tvrdeniach Kleeovej Vety 5 platia ekvivalencie. V tomto prípade totiž X je striktne konvexný, resp. uniformne konvexný, resp. hladký, resp. uniformne hladký práve vtedy, keď druhý duálny priestor X'' má uvedené odpovedajúce vlastnosti. Je to jednoduchý dôsledok definícií týchto geometrických pojmov, v ktorých sa pracuje iba s normami v daných Banachových priestoroch. Následne, v reťazcoch implikácií v (63) a (64) platia potom ekvivalencie.

Dôsledok 1

Nech X je reálny reflexívny Banachov priestor a X' je jeho odpovedajúci duálny priestor. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Priestor X' je striktne konvexný práve vtedy, keď priestor X je hladký.*

(ii) *Priestor X' je hladký práve vtedy, keď priestor X je striktne konvexný.*

Dôkaz Dôsledku 1.

Tvrdenia (i) a (ii) vyplývajú z Kleeovej Vety 5(i) a (ii) a z komentára v Poznámke 9, keďže v tomto prípade sú priestory X a X'' izometricky izomorfné prostredníctvom prirodzeného zobrazenia π. ■

Veta 6 (Šmuljanova)

Nech X je reálny Banachov priestor a X' je jeho odpovedajúci duálny priestor. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Priestor X je uniformne hladký (uniformne konvexný) práve vtedy, keď duálny priestor X' je uniformne konvexný (uniformne hladký).*

(ii) *Ak priestor X je unifomne hladký, potom X je reflexívny priestor.*

Obsah

Metrická projekcia

Definícia 4 (Metrická projekcia)

Nech X je Banachov priestor a $G \subseteq X$ množina. Pre bod $x \in X$ definujme

$$P_G(x) := \{y \in G,\ \|x - y\|_X = \rho(x, G)\}. \tag{65}$$

Podľa tvaru množiny $P_G(x)$ v (65) označujeme množinu G ako

(i) proximinálnu, ak $P_G(x) \neq \emptyset$ pre každé $x \in X$,

(ii) semi-Čebyševovu, ak $P_G(x)$ je najviac jednoprvková pre každé $x \in X$,

(iii) Čebyševovu, ak $P_G(x)$ je jednoprvková pre každé $x \in X$.

V prípade Čebyševovej množiny G sa zobrazenie $x \mapsto P_G(x)$, $x \in X$, nazýva metrická projekcia priestoru X na G a označuje sa rovnakým symbolom P_G.

Poznámka 10

Každá kompaktná množina $G \subseteq X$ je proximinálna. Zobrazenie $y \mapsto \|x - y\|_X$, $y \in G$, je totiž pre každé $x \in X$ spojité, a tak na kompaktnej množine G nadobúda svoje minimum, t.j., množina $P_G(x) \neq \emptyset$ pre každé $x \in X$.

Poznámka 11

Poznamenajme, že priamo z formuly (65) v Definícii 4 vyplývajú nasledujúce vlastnosti metrickej projekcie vzhľadom na posunutie, resp. násobenie skalárom. Pre každý daný vektor $u \in X$ a dané nenulové $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$P_{G+u}(x+u) = P_G(x), \quad P_{\lambda G}(\lambda x) = |\lambda| P_G(x) \quad \text{pre každé } G \subseteq X \text{ a } x \in X, \tag{66}$$

kde objekty $G+u$ a λG sú definované rovnosťami

$$G + u := \{y + u,\ y \in G\} \subseteq X, \quad \lambda G := \{\lambda y,\ y \in G\} \subseteq X. \tag{67}$$

Relácie v (67) sú korektné, nakoľko X je lineárny priestor. Je zrejmé, že ak G je proximinálna, semi-Čebyševova, resp. Čebyševova množiny, potom i množiny $G+u$ a λG majú odpovedajúca vlastnosti pre každé $u \in X$ a každé $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Veta 7

Nech X je striktne konvexný Banachov priestor. Platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Každá konvexná množina $G \subseteq X$ je semi-Čebyševova.*

(ii) *Ak priestor X je naviac reflexívny, potom každá uzavretá konvexná množina $G \subseteq X$ je Čebyševova. Inými slovami, pre každý vektor $x \in X$ existuje práve jeden prvok $y \in G$ taký, že $\|x - y\|_X = \rho(x, G)$.*

Dôkaz Vety 7.

Zvoľme danú konvexnú množinu $G \in X$ a daný bod $x \in X$. Nech $u, v \in G$ sú body, v ktorých sa realizuje vzdialenosť $\rho(x, G)$, t.j.,

$$\|x - u\|_X = \rho(x, G) = \|x - v\|_X \tag{68}$$

Ak položíme $r := \rho(x, G)$, potom rovnosti v (68) možno interpetovať tak, že body $u, v \in S_X[x, r]$. Ukážeme, že celá úsečka $\overline{uv}$ leží na sfére $S_X[x, r]$. Vďaka konvexnosti množiny G máme, že $\overline{uv} \subseteq G$. Pre každé potom $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$r \leq \|x - [\lambda u + (1 - \lambda)v]\|_X = \|\lambda(x - u) + (1 - \lambda)(x - v)\|_X$$

$$\leq \lambda\|x - u\|_X + (1 - \lambda)\|x - v\|_X \overset{(68)}{=} \lambda r + (1 - \lambda)r = r,$$

čo znamená, že $\|x - [\lambda u + (1 - \lambda)v]\|_X = r$. Keďže priestor X je striktne konvexný, nutne podľa Poznámky 2 platí $u = v$. Množina $P_G(x)$ definovaná v (65) je teda najviac jednoprvková, a tak v súlade s Definíciou 4 je G semi-Čebyševova množina. Dokázali sme tvrdenie (i). Predpokladajme teraz, že priestor X je naviac i reflexívny uvažujme uzavretú konvexnú množinu $G \subseteq X$ a daný bod $x \in X$. V kontexte tvrdenia (i) stačí ukázať, že vzdialenosť $r := \rho(x, G)$ sa realizuje v nejakom vektore $y \in G$, t.j., existuje $y \in G$ taký, že $\|x - y\|_X = r$. Z definície vzdialenosti $\rho(x, G)$ zrejme existuje postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq G$ s vlastnosťou $\lim_{k\to\infty} \|x - y_k\|_X = r$. Obzvlášť, postupnosť $\{x - y_k\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená v norme. Využijeme teraz Eberleinovu–Šmuljanovu charakterizáciu reflexívneho

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

Banachovho priestoru. Konkrétne, platí, že Banachov priestor X je reflexívny práve vtedy, keď z každej postupnosti v X, ktorá je ohraničená v norme, sa dá vybrať podpustupnosť, ktorá konverguje slabo v X. Keďže podľa predpokladov je priestor X reflexívny, existuje vybraná podpostupnosť $\{x-y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$, ktorá slabo konverguje v priestore X, t.j., $x - y_{k_l} \rightharpoonup x - y \in X$ pre $l \to \infty$. Z tejto relácie následne vyplýva, že postupnosť $\{y_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ slabo konverguje k y. Keďže množina G je uzavretá (v norme), je zároveň i slabo uzavretá, a tak vektor $y \in G$. Obzvlášť, potom $r \leq \|x - y\|_X$. Napokon aplikujeme skutočnosť, že norma na X je slabo zdola polospojitá funkcia. Preto dostávame

$$r \leq \|x - y\|_X \leq \liminf_{l\to\infty} \|x - y_{k_l}\|_X = \lim_{l\to\infty} \|x - y_{k_l}\|_X = r,$$

a tak norma $\|x - y\|_X = r$. Dôkaz tvrdenia (ii) je tak kompletný. ∎

Poznámka 12 (Projekcia v striktne konvexných priestoroch)

Výsledok Vety 7(ii) ukazuje, že v striktne konvexnom reflexívnom Banachovom priestore X je možné premietať na každú jeho uzavretú konvexnú podmnožinu $G \subseteq X$, t.j., operátor (metrickej) projekcie $P_G : X \to G$ z Definície 4 je v tomto prípade definovaný korektne. Vo všeobecnom striktne konvexnom Banachovom priestore X je možné premietať napríklad na každú kompaktnú konvexnú podmnožinu $G \subseteq X$, ako vyplýva z Poznámky 10 a Vety 7(i).

Veta 8 (Spojitosť projekcie v striktne konvexných priestoroch)

Nech X je striktne konvexný Banachov priestor a $G \subseteq X$ daná kompaktná konvexná množina. Potom operátor projekcie $P_G : X \to G$ je spojitý na X.

Dôkaz Vety 8.

Nech $x \in X$ je daný bod a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ nejaká postupnosť spĺňajúca podmienku $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Naším cieľom je ukázať, že potom platí rovnosť $\lim_{k\to\infty} P_G(x_k) = P_G(x)$. Pripomeňme jednu dôležitú vlastnosť postupností obsiahnutých v (relatívne) kompaktných podmnožinách metrického priestoru. Konkrétne, každá takáto postupnosť je konvergentná (v danej metrike) práve vtedy, keď má práve jeden hromadný bod (vzhľadom na danú metriku). Keďže v našom prípade máme $\{P_G(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq G$ a $G \subseteq X$ je kompaktná množina, v kontexte uvedenej vlastnosti stačí zrejme dokázať, že vektor $P_G(x)$ je jediný hromadný bod postupnosti $\{P_G(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$. V súlade s Definíciou 4 platí

$$\|x - P_G(x)\|_X = \rho(x, G), \quad \|x_k - P_G(x_k)\|_X = \rho(x_k, G), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{69}$$

Využitím definície vzdialenosti bodu od množiny nie je ťažké odvodiť nerovnosť

$$\big|\|x_k - P_G(x_k)\|_X - \|x - P_G(x)\|_X\big| \overset{(69)}{=} |\rho(x_k, G) - \rho(x, G)| \le \|x_k - x\|_X \tag{70}$$

pre každé $k \in \mathbb{N}$. Vďaka kompaktnosti množiny G sa z postupnosti $\{P_G(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ dá vybrať konvergentná podpostupnosť, t.j., existuje $\{P_G(x_{k_l})\}_{l=1}^{\infty}$ taká, že

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

$$y := \lim_{l\to\infty} P_G(x_{k_l}), \quad \text{a teda nutne vektor } y \in G. \tag{71}$$

Podľa (70) následne máme

$$\big|\|x_{k_l} - P_G(x_{k_l})\|_X - \|x - P_G(x)\|_X\big| \overset{(70)}{\leq} \|x_{k_l} - x\|_X, \tag{72}$$

z čoho využitím spojitosti normy limitovaním pre $l \to \infty$ získame

$$\lim_{l\to\infty} \big|\|x_{k_l} - P_G(x_{k_l})\|_X - \|x - P_G(x)\|_X\big| \overset{(72)}{\leq} \lim_{l\to\infty} \|x_{k_l} - x\|_X$$

$$\Downarrow \text{ (71) } \Downarrow$$

$$\big|\|x - y\|_X - \|x - P_G(x)\|_X\big| \leq 0, \quad \text{t.j.,} \quad \|x - y\|_X = \|x - P_G(x)\|_X = \rho(x, G).$$

Vektor y je v zhode s Definíciou 4 metrickou projekciou bodu x do množiny G. Podľa predpokladov je priestor X striktne konvexný a množina G konvexná, preto v súlade s Poznámkou 12 je G Čebyševova množina, a tak nutne vektor $y = P_G(x)$. Limitný bod y teda nezávisí na výbere konvergentnej podpostupnosti $\{P_G(x_{k_l})\}_{l=1}^{\infty}$, t.j., postupnosť $\{P_G(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq G$ má práve jeden hromadný bod. Na základe vyššie uvedených úvah preto platí $\lim_{k\to\infty} P_G(x_k) = P_G(x)$, t.j., operátor projekcie P_G je spojitý v bode x. Dôkaz je hotový. ∎

Veta 9

Nech X je uniformne konvexný Banachov priestor. Potom každá uzavretá konvexná množina $G \subseteq X$ je Čebyševova. Inými slovami, pre každý vektor $x \in X$ existuje práve jeden prvok $y \in G$ taký, že $\|x - y\|_X = \rho(x, G)$.

Dôkaze Vety 9.

Podľa Vety 3(i) a Milmanovej–Pettisovej Vety 4 je uvažovaný priestor X striktne konvexný a reflexívny. Tvrdenie je potom priamym dôsledkom Vety 7(ii). ∎

Veta 10 (Spojitosť projekcie v uniformne konvexných priestoroch)

Nech X je uniformne konvexný Banachov priestor a $G \subseteq X$ daná uzavretá konvexná množina. Potom operátor projekcie $P_G : X \to G$ je spojitý na X.

Dôkaz Vety 10.

Zvoľme uzavretú konvexnú množinu $G \subseteq X$. Vzhľadom na prvú formulu v (66) zrejme stačí ukázať spojitosť operátora P_G v bode $x = 0$. Nech $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je nejaká postupnosť s $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Využitím nerovnosti v (70) máme

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

$$\big|\|x_k - P_G(x_k)\|_X - \|P_G(0)\|_X\big| \overset{(70)}{\leq} \|x_k\|_X, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{73}$$

Z (73) následne dostávame

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - P_G(x_k)\|_X = \|P_G(0)\|_X. \tag{74}$$

Nie je ťažké si premyslieť, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ platia odhady

$$\big|\|x_k - P_G(x_k)\|_X - \|x_k\|_X\big| \leq \|P_G(x_k)\|_X \leq \|x_k - P_G(x_k)\|_X + \|x_k\|_X. \tag{75}$$

Ak $P_G(0) = 0$, t.j., vektor $0 \in G$, potom kombináciou (74) a horného odhadu v (75) máme $\lim_{k\to\infty} \|P_G(x_k)\|_X = 0$. To znamená, že

$$\lim_{k\to\infty} P_G(x_k) = 0 = P_G(0),$$

t.j., operátor P_G je spojitý v bode $x = 0$. Uvažujme teraz prípad $P_G(0) \neq 0$, pričom položme $\lambda := \frac{1}{\|P_G(0)\|_X} > 0$. Pomocou druhej formuly v (66) môžeme skúmaný problém transformovať na ekvivalentnú situáciu vyšetrovania spojitosti operátora $P_{\tilde{G}}$ v bode $x = 0$ vzhľadom na uzavretú konvexnú množinu $\tilde{G} := \lambda G$, pre ktorú vzdialenosť $\rho(0, \tilde{G}) = \|P_{\tilde{G}}(0)\|_X = 1$. V tomto prípade z nerovností v (75) a z rovnosti (74) (s množinou $\tilde{G}$) vyplýva $\lim_{k\to\infty} \|P_{\tilde{G}}(x_k)\|_X = 1$. Keďže množina $\tilde{G}$ je konvexná a vektory $P_{\tilde{G}}(0), P_{\tilde{G}}(x_k) \in \tilde{G}$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, platí

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

$$\frac{1}{2}\left(P_{\tilde{G}}(0)+P_{\tilde{G}}(x_k)\right)\in\tilde{G},\quad \text{a tak } 1=\rho(0,\tilde{G})\le\left\|\frac{1}{2}\left(P_{\tilde{G}}(0)+P_{\tilde{G}}(x_k)\right)\right\|_X \tag{76}$$

pre každý index $k\in\mathbb{N}$. Využijeme teraz skutočnosť, že priestor X je uniformne konvexný. Konkrétne, aplikujeme kritérium (iv) v Poznámke 6. Zvoľme $\varepsilon>0$ a nech δ je odpovedajúce kladné číslo v Poznámke 6(iv). Platí

$$\|P_{\tilde{G}}(0)\|_X<1+\delta,\quad \|P_{\tilde{G}}(x_k)\|_X<1+\delta,\quad \left\|\frac{1}{2}\left(P_{\tilde{G}}(0)+P_{\tilde{G}}(x_k)\right)\right\|_X\overset{(76)}{\ge}1, \tag{77}$$

pričom druhá nerovnosť je splnená pre každé $k\ge k_0$, kde $k_0\in\mathbb{N}$ je vhodný index, ktorého existencia je zaručená vlastnosťou $\lim_{k\to\infty}\|P_{\tilde{G}}(x_k)\|_X=1$. Následne z podmienok v (77) podľa Poznámke 6(iv) vyplýva, že platí nerovnosť

$$\|P_{\tilde{G}}(0)-P_{\tilde{G}}(x_k)\|_X<\varepsilon\quad \text{pre každé } k\ge k_0. \tag{78}$$

Relácia (78) znamená, že $\lim_{k\to\infty}P_{\tilde{G}}(x_k)=P_{\tilde{G}}(0)$, t.j., operátor $P_{\tilde{G}}$ je spojitý v bode $x=0$. Dokázali sme teda, že operátor P_G je spojitý v bode $x=0$ vzhľadom na každú uzavretú konvexnú podmnožinu $G\subseteq X$. ∎

Poznámka 13

Poznamenajme, že spojitý operátor P_G vo Vete 10 nemusí byť nutne lineárny.