1 Binomické rozdělení $\text{Bin}(N, p)$

- Bernoulliho pokusy $X_1, \ldots, X_N$
  - $X_i = 1$ ... událost nastala; $X_i = 0$... událost nenastala; $i = 1, \ldots, N$
  - $\Pr(X_i = 1) = p$
  - $\Pr(X_i = 0) = 1 - p = q$
- X... počet událostí v posloupnosti N nezávislých Bernoulliho pokusů, přičemž pravděpodobnost nastání události v každém pokusu je vyjádřena parametrem p
- $\sum_{i=1}^{N} X_i = X \sim \text{Bin}(N, p)$
- $\boldsymbol{\theta} = (N, p)$
- pravděpodobnostní funkce
$$p(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} \qquad x = 0, 1, \ldots, N$$
- vlastnosti: $\text{E}[X] = Np$; $\text{Var}[X] = Np(1-p)$
- dbinom(x, N, p), pbinom(x, N, p), rbinom(M, N, p)
- Data:
  - **Dataset 1: Počet chlapců v rodinách s 12 dětmi**
  - V rámci studie poměru pohlaví u lidí z roku 1889 bylo na základě záznamů z nemocnic v Sasku zaznamenáno rozdělení počtu chlapců v čtrnáctičlenných rodinách. Mezi $M = 6115$ rodinami s $N = 12$ dětmi byla pozorována početnost chlapců. Údaje ze studie jsou uvedeny v následující tabulce.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$m_{observed}$	3	24	104	286	670	1033	1343	1112	829	478	181	45	7	6115

Příklad 1.1. Výpočet očekávaných početností za předpokladu binomického modelu
Vezměte údaje z **datasetu 1**. Vypočítejte očekávané početnosti výskytu chlapců $m_{expected}$ za předpokladu, že početnosti chlapců X v rodinách mají binomické rozdělení $\text{Bin}(N, p)$ s parametry $N = 12$ a

$$\widehat{p} = \frac{\sum_{n=0}^{N} n m_{observed}}{NM}. \tag{1.1}$$

Řešení příkladu 1.1
Odhad parametru p, tj. $\widehat{p} = 0.5192$. Tabulka očekávaných početností $m_{expected}$ je

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$m_{expected}$	1	12	72	258	628	1085	1367	1266	854	410	133	26	2	6114

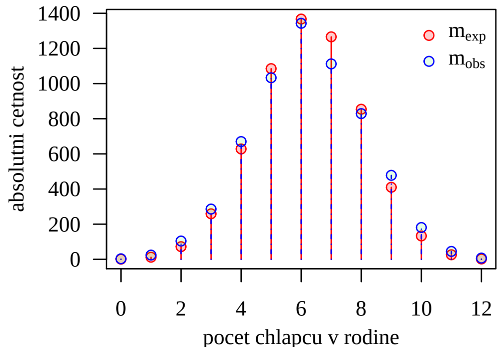
Z tabulky očekávaných početností vidíme, že součet očekávaných početností dává výsledek $M = 6114$. Odchylka od původní hodnoty $M = 6115$ je způsobena přesným výpočtem očekávaných početností a jejich následným zaokrouhlením. Konkrétně v tomto případě, pokud bychom očekávané početnosti spočítali na základě binomického rozdělení $\text{Bin}(N, p)$, kde $N = 12$ a $\widehat{p} = 0.5192$ (hodnotu $\widehat{p}$ bychom pro další výpočet zaokrouhlili na čtyři desetinná místa) dostali bychom následující tabulku očekávaných početností.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$m_{expected}$	1	12	72	259	628	1085	1367	1266	854	410	133	26	2	6115

Při použití hodnoty odhadu $\widehat{p}$ zaokrouhlené na čtyři desetinná místa došlo k mírné úpravě binomického rozdělení a očekávaná početnost výskytu tří chlapců v rodině se z hodnoty 258.47 přehoupla na hodnotu 258.52, čímž jsme po zaokrouhlení získali absolutní početnost 259 namísto 258. Ostatní očekávané početnosti zůstaly nezměněny, jelikož jejich nezaokrouhlená hodnota byla dostatečně blízko k celému číslu. ★

Příklad 1.2. Overdispersion a underdispersion v binomickém modelu
V předchozím příkladu 1.1 jsme stanovili očekávané početnosti výskytu chlapců v rodinách s dvanácti dětmi. Do jednoho grafu zaneste nyní hodnoty pozorovaných početností $m_{observed}$ a hodnoty očekávaných početností $m_{expected}$. Pozorované a očekávané početnosti od sebe barevně odlište. Na základě výsledného grafu stanovte, zda došlo v tomto případě k overdisperzi nebo underdisperzi. Závěr podložte srovnáním rozptylu vypočítaného z pozorovaných dat s rozptylem vypočítaným z očekávaných dat.

Řešení příkladu 1.2



Obrázek 1: Porovnání pozorovaných a očekávaných početností v binomickém modelu

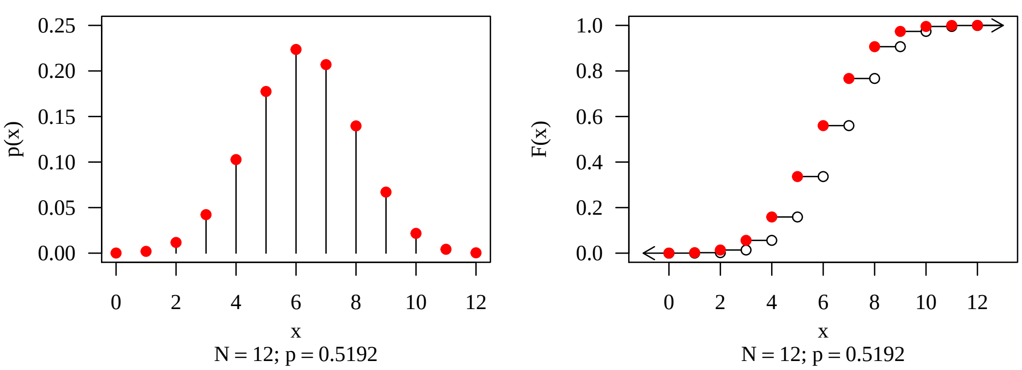
Oproti očekávaným početnostem jsou pozorované početnosti krajních případů vyšší a naopak pozorované početnosti nejčastějších případů jsou nižší. Tato situace ukazuje na vyšší rozptyl pozorovaných početností než teoretických. Jde tedy o ....disperzi.

```
  var.obs  var.exp
1 3.48984 2.995539
```

Rozptyl skutečných počtů chlapců v rodinách s dvanácti dětmi je 3.4898, rozptyl očekávaných počtů chlapců je 2.9956. Rozptyl skutečných počtů je tedy vyšší než rozptyl očekávaných počtů chlapců v rodinách s dvanácti dětmi. ★

Příklad 1.3. Graf pravděpodobnostní a distribuční funkce binomického modelu
V příkladu 1.1 jsme odhadli hodnotu parametru p binomického rozdělení $\mathrm{Bin}(N, p)$ jako $\widehat{p} = 0.5192$. Hodnota parametru $N = 12$. Nakreslete graf pravděpodobnostní a distribuční funkce binomického rozdělení $\mathrm{Bin}(N, p)$, kde $N = 12$ a $p = 0.5192$.

Řešení příkladu 1.3



Obrázek 2: Pravděpodobnostní a distribuční funkce binomického modelu

★

Příklad 1.4. Výpočet pravděpodobností na základě binomického modelu
Za předpokladu, že náhodná veličina X, udávající počet chlapců v rodině s dvanácti dětmi, pochází z binomického rozdělení, tj. $X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$, s parametry $N = 12$ a $p = 0.5192$, vypočítejte pravděpodobnost, že v rodině s dvanácti dětmi bude (a) právě devět chlapců; (b) nejvýše čtyři chlapci; (c) alespoň osm chlapců; (d) čtyři, pět, šest, nebo sedm chlapců.

Řešení příkladu 1.4

```
           a         b         c         d
1 0.06703911 0.1588736 0.2330869 0.7107605
```

Pravděpodobnost, že v rodině bude právě devět chlapců, je 6.7 %. Pravděpodobnost, že v rodině budou nejvýše čtyři chlapci, je 15.89 %. Pravděpodobnost, že v rodině bude alespoň osm chlapců, je 23.31 %. Pravděpodobnost, že v rodině bude čtyři, pět, šest, nebo sedm chlapců, je 71.08 %. ★

Příklad 1.5. Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny z binomického modelu
Za předpokladu, že náhodná veličina X, udávající počet chlapců v rodině s dvanácti dětmi, pochází z binomického rozdělení, tj. $X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$, s parametry $N = 12$ a $p = 0.5192$, vypočítejte střední hodnotu $\mathrm{E}[X]$ a rozptyl $\mathrm{Var}[X]$ náhodné veličiny X. Střední hodnotu a rozptyl porovnejte s jejich odhady vypočítanými na (a) základě očekávaných dat; (b) na základě pozorovaných dat (viz příklad 1.2).

Řešení příkladu 1.5

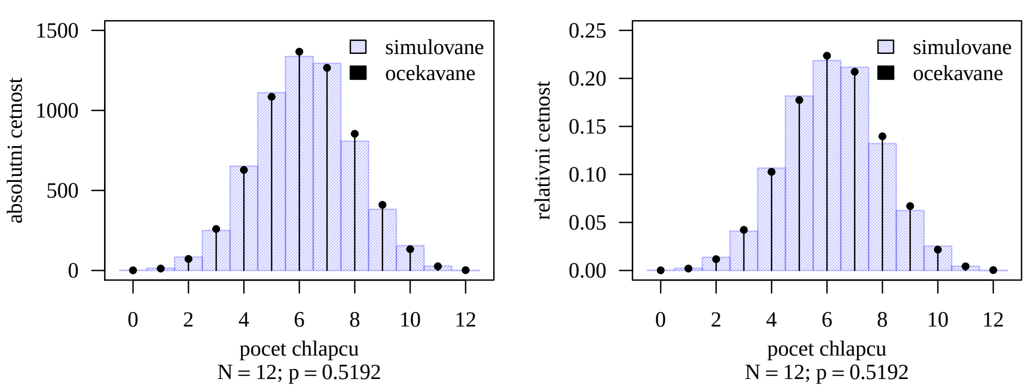
```
     E.X    Var.X    E.exp  Var.exp    E.obs Var.obs
1 6.2304 2.995576 6.229926 2.995539 6.230581 3.48984
```

Střední hodnota počtu chlapců v rodině s dvanácti dětmi je 6.2304 s rozptylem 2.9956. Odhad střední hodnoty počtu chlapců v rodině vypočítaný na základě očekávaných hodnot je 6.2299 s rozptylem 2.9955. Odhad střední hodnoty počtu chlapců v rodině vypočítaný na základě pozorovaných dat je 6.2306 s rozptylem 3.4898. ★

Příklad 1.6. Simulační studie pro binomický model
Sekci o binomickém rozdělení zakončíme simulační studií modelující chování očekávaných početností náhodné veličiny X ... počet chlapců v rodinách s dvanácti dětmi za předpokladu, že $X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$, $N = 12$, $p = 0.5192$.

Vygenerujte pseudonáhodná čísla X (početnosti úspěchů) opakovaná M-krát ($M = 6115$) z $\mathrm{Bin}(N, p)$, kde $N = 12$ a $p = 0.5192$. Vytvořte histogram vygenerovaných pseudonáhodných čísel superponovaný hodnotami očekávaných (teoretických) početností za předpokladu, že $X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$.

Řešení příkladu 1.6



Obrázek 3: Porovnání pozorovaných a očekávaných početností v binomickém modelu ★