Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

Statistická inference I

Téma 9: Princip věrohodnosti - binomický model

Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

Princip věrohodnosti

- $f(\mathbf{x}|\theta)$ ... hustota rozdělení $\mathcal{L}(\theta)$
- $L(\theta|\mathbf{x})$ ... funkce věrohodnosti
  - $L(\theta|\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})f(\mathbf{x}|\theta)$, kde $c \in \mathbb{R}$ je nezávislá na θ a $f(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$.
- $\ell(\theta|\mathbf{x})$ ... logaritmus funkce věrohodnosti
  - $\ell(\theta|\mathbf{x}) = \ln(L(\theta|\mathbf{x})) = \ln(c(\mathbf{x})) + \ln(f(\mathbf{x}|\theta))$
- $S(\theta)$ ... skóre funkce (první derivace logaritmu funkce věrohodnosti)
  - $S(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta|\mathbf{x})$
- $\widehat{\theta}$ ... MLE odhad parametru θ
  - lze jej získat maximalizací fce věrohodnosti $L(\theta|\mathbf{x})$ resp. log. fce věrohodnosti $\ell(\theta|\mathbf{x})$
  - odpovídá kořenu skóre funkce $S(\theta)$
- $\mathcal{I}(\widehat{\theta})$ ... Fisherova míra informace (mínus druhá derivace logaritmu věrohodnostní funkce vyjádřená v MLE odhadu parametru θ)
  - $\mathcal{I}(\widehat{\theta}) = -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta|\mathbf{x})_{|\theta=\widehat{\theta}}$
- $\mathrm{Var}[\widehat{\theta}]$ ... MLE odhad rozptylu odhadu parametru θ
  - $\mathrm{Var}[\widehat{\theta}] = \frac{1}{\mathcal{I}(\widehat{\theta})}$

Příklad 9.1 Maximálně věrohodný odhad parametru p binomického modelu
Nechť $X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$ a realizace X jsou x. Předpokládejme, že jsme pozorovali (i) $x = 2$, (ii) $x = 10$ a (iii) $x = 18$ úspěchů v $N = 20$ pokusech.

1. Odvoďte
   a. tvar jádra věrohodnostní funkce $L(p|x)$ binomického modelu;
   b. tvar jádra logaritmu věrohodnostní funkce $\ell(p|x)$ binomického modelu;
   c. skóre funkci pro parametr p + MLE odhad parametru p;
   d. Fisherovo informační číslo + rozptyl MLE odhadu parametru p.
2. Dosazením do vzorců stanovte přesnou hodnotu odhadu parametru p, tj. $\widehat{p}$, a odhad rozptylu odhadu parametru p, tj. $\mathrm{Var}[\widehat{p}]$.
3. Pomocí maximalizace logaritmu věrohodnostní funkce $\ell(p|x)$ binomického modelu nalezněte maximálně věrohodný odhad parametru p pro situaci (i), (ii) a (iii). Pro každou situaci vykreslete křivku logaritmu věrohodnostní funkce binomického modelu spolu s maximálně věrohodným odhadem parametru p. Maximalizaci proveďte
   a. pomocí funkce optimize();
   b. pomocí vlastnoručně naprogramované Newton-Raphsonovy metody NRbin();
   c. pomocí vlastnoručně naprogramované metody sečen MSbin().
4. Pro situaci (i), (ii) a (iii) vykreslete křivku věrohodnostní funkce binomického modelu spolu s maximálně věrohodným odhadem parametru p získaným optimalizací věrohodnostní funkce $L(p|x)$ pomocí funkce optimize().

Řešení příkladu 9.1

1. Odvoďte
   a. tvar jádra věrohodnostní funkce $L(p|x)$ binomického modelu

   b. tvar jádra logaritmu věrohodnostní funkce $\ell(p|x)$ binomického modelu

   c. skóre funkci pro parametr p + MLE odhad parametru p

d. Fisherovo informační číslo + rozptyl MLE odhadu parametru p

2. Dosazením do vzorců stanovte přesnou hodnotu odhadu parametru p, tj. $\widehat{p}$, a odhad rozptylu odhadu parametru p, tj. $\mathrm{Var}[\widehat{p}]$.

```
x <- ... # vektor poctu uspechu pro (i)-(iii)
N <- ... # pocet Bernoulliho pokusu N
p <- ... # vektor MLE odhadu parametru p pro (i)-(iii)
Var.p <- ... # vektor rozptylu odhadu par. p pro (i)-(iii)
tab <- data.frame(...) # souhrnna tabulka vysledku
```

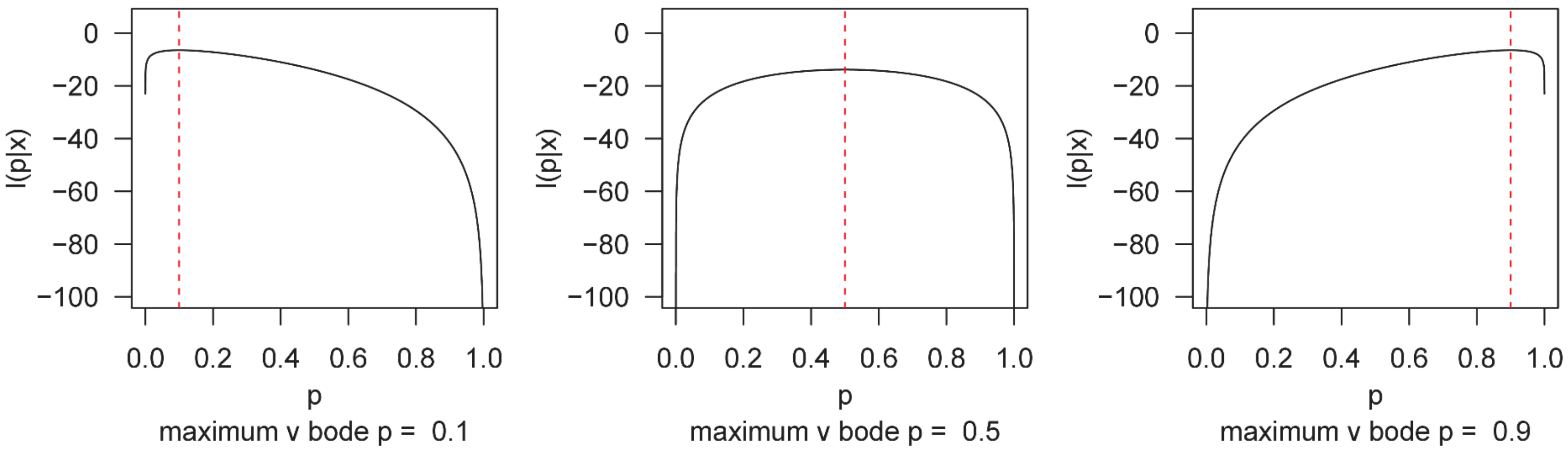
```
        x = 2 x = 10 x = 18
p       0.1000 0.5000 0.9000
Var[p]  0.0045 0.0125 0.0045
```

3. Pomocí maximalizace logaritmu věrohodnostní funkce $\ell(p|x)$ binomického modelu nalezněte maximálně věrohodný odhad parametru p pro situaci (i), (ii) a (iii). Pro každou situaci vykreslete křivku logaritmu věrohodnostní funkce binomického modelu spolu s maximálně věrohodným odhadem parametru p. Maximalizaci proveďte

   a. pomocí funkce optimize()

```
l <- function(p, x, N){...} # logaritmus veroh. fce rozdeleni Bin(N, p)
mle.bin.optim <- function(x, N){
  poptim <- optimize(l, c(0.0001, 0.9999), x = x, N = N,
                     maximum = T) # MLE odhad p pomoci fce optimize()
  pmax <- poptim$maximum # vyber maxima ze vsech vystupu fce optimize()
  par(...) # okraje grafu 5, 4, 2, 2
  p <- seq(...) # posl. od 0.00001 do 0.99999 o delce 2048
  plot(..., l(...), ylim = c(-100, 5), ...) # graf l(p|x)
  abline(v = pmax, ...) # svisla cervena cara (MLE odhad p)
  mtext(...) # popisek osy x
  mtext(paste(...), ...) # druhy popisek osy x
  return(...) # vrat MLE odhad parametru p
}
```

```
MLE.i <- mle.bin.optim(x = ..., N = ...) # graf + MLE odhad p pro (i)
MLE.ii <- mle.bin.optim(...)  # graf + MLE odhad p pro (ii)
MLE.iii <- ... # graf + MLE odhad p pro (iii)
tab.opt <- data.frame(...) # souhrnna tabulka MLE odhadu pro (i)-(iii)
```



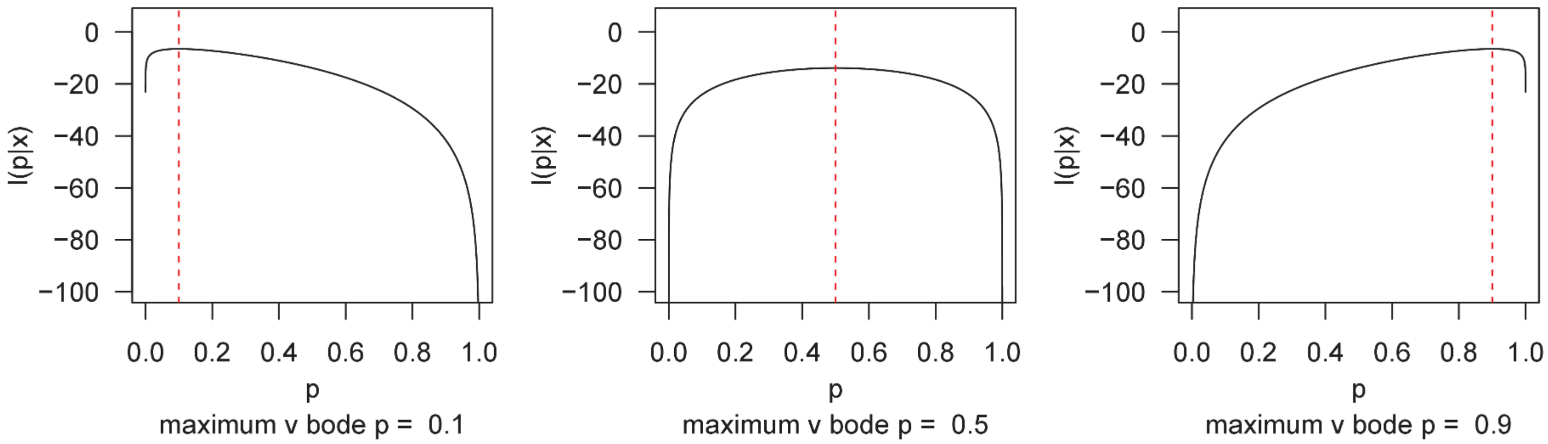
Obrázek: Logaritmus věrohodnostní funkce + MLE odhad parametru p pomocí funkce optimize()

b. pomocí vlastnoručně naprogramované Newton-Raphsonovy metody NRbin()

```
S <- function(p, x, N) {...} # skore fce S(p) rozd. Bin(N, p)
I <- function(p, N) {...} # Fisherovo i. cislo I(p) rozd. Bin(N, p)
NRbin <- function(p0, x, N, treshold = 0.00005, max.it = 100){
  kriterium <- 1 # iniciace rozhodovaciho kriteria: kriterium = 1
  p1 <- NULL # priprava promenne p1
  for(i in 1:max.it){ # cyklus (skonci nejpozdeji po max.it iteracich)
    p1 <- ... # iteracni krok
    kriterium <- abs(...) # aktualizace rozhodovaciho kriteria
    p0 <- p1 # aktualizace promenne p0
    pmax <- p1 # aktualizace MLE odhadu p
    if(kriterium < treshold){break} # kontrola rozh. kriteria; splneno ->
     # -> vynut ukonceni algoritmu
  }
  return(list(pmax = pmax, k = i)) # vystup: MLE odhad p, pocet iteraci k
}
```

```r
mle.bin.nr <- function(x, N, p0 = 0.001){
  pmax <- NRbin(...)$pmax # MLE odhad p pomoci fce NRbin()
  p <- seq(...) # posloupnost p
  par(...) # okraje grafu
  plot(...) # graf l(p|x)
  ...
  return(...) # vrat MLE odhad parametru p
}

MLE.i <- mle.bin.nr(x = ..., N = ...) # graf + MLE odhad p pro (i)
MLE.ii <- mle.bin.nr(...) # graf + MLE odhad p pro (ii)
MLE.iii <- ... # graf + MLE odhad p pro (iii)
tab.NR <- data.frame(...) # souhrnna tabulka MLE odhadu pro (i)-(iii)
```



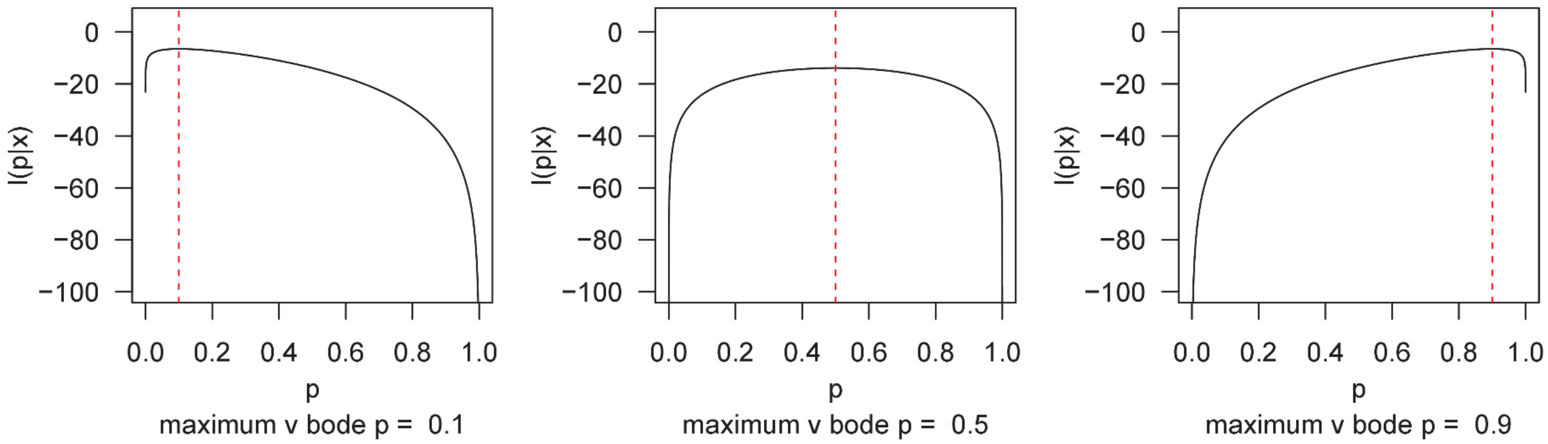
Obrázek: Logaritmus věrohodnostní funkce + MLE odhad parametru p pomocí Newton-Raphsonovy metody

c. pomocí vlastnoručně naprogramované metody sečen MSbin()

```
MSbin <- function(p01, p02, x, N, treshold = 1e-5, maxit = 100){
  p1 <- ... # iniciace promenne p1 (p01)
  p2 <- ... # iniciace promenne p2 (p02)
  for(i in 1:max.it){ # cyklus (skonci nejpozdeji po max.it iteracich)
    df <- ... # prepis clenu df
    p3 <- p2 - df # iteracni krok (s vyuzitim df)
    p1 <- p2 # aktualizace promenne p1
    p2 <- p3 # aktualizace promenne p2
    if (S(p3, x, N) == 0) { # kontrola nalezeni presneho korenu fce S(p)
       # S(p3) = 0 -> konec a vystup
      return(result <- list(koren = p3, k = i, chyba = 0)) # vystup
    }
    else if (abs(df) < treshold){ # kontrola rozh. kriteria; splneno ->
       # -> konec a vystup
      chyba = (p2 - p1) / (S(...) - S(...)) * S(...) # vypocet chyby
      return(result <- list(pmax = p3, k = i, chyba = chyba)) # vystup
    }
  }
}
```

```
mle.bin.ms <- function(x, N, p01 = 0.001, p02 = 0.999){
pmax <- MSbin(...)$pmax # MLE odhad p pomoci fce MSbin()
par(...) # okraje grafu
p <- ... # posloupnost p
plot(...) # graf l(p|x)
...
return(...) # vrat MLE odhad parametru p
}

MLE.i <- mle.bin.ms(x = ..., N = ...) # graf + MLE odhad p pro (i)
MLE.ii <- mle.bin.ms(...) # graf + MLE odhad p pro (ii)
MLE.iii <- ... # graf + MLE odhad p pro (iii)
tab.MS <- data.frame(...) # souhrnna tabulka MLE odhadu pro (i)-(iii)
```



Obrázek: Logaritmus věrohodnostní funkce + MLE odhad parametru p pomocí metody sečen

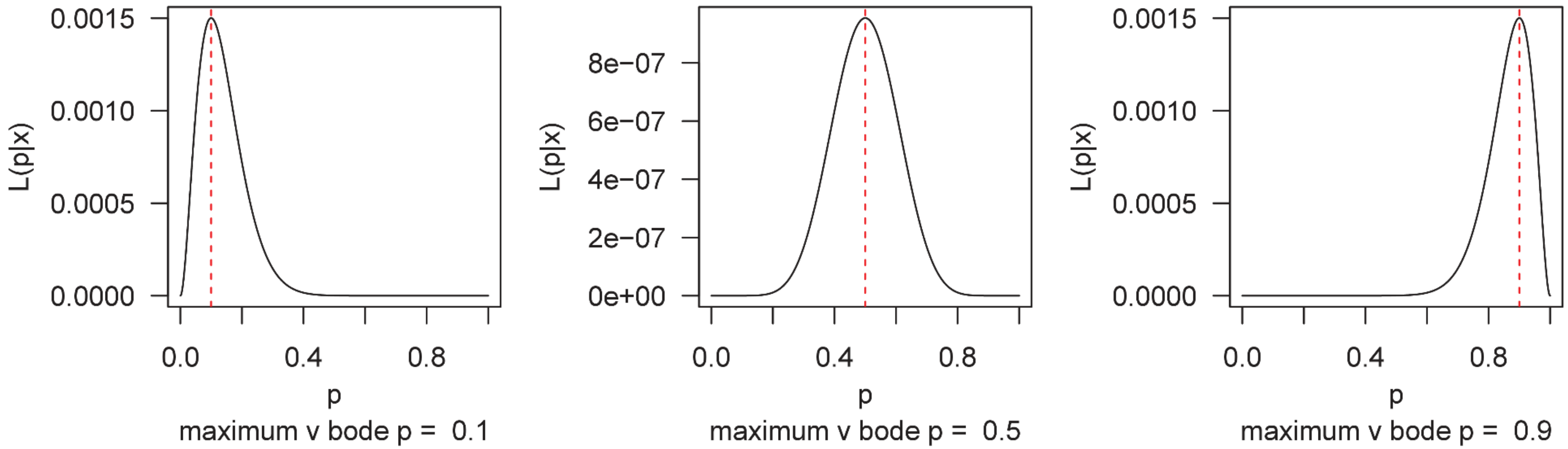
Tabulka: Odhady parametru p binomického rozdělení

	$x = 2$	$x = 10$	$x = 18$
exaktní výpočet	0.100000	0.500000	0.900000
funkce optimize()	0.100001	0.500000	0.899999
Newton-Raphsonova metoda	0.100000	0.500000	0.900000
metoda sečen	0.100000	0.500000	0.900000

4. Pro situaci (i), (ii) a (iii) vykreslete křivku věrohodnostní funkce binomického modelu spolu s maximálně věrohodným odhadem parametru p získaným optimalizací věrohodnostní funkce $L(p|x)$ pomocí funkce optimize().

```
L <- function(p, x, N) {...} # veroh. fce L(p|x) rozd. Bin(N, p)
mle.bin.optim.L <- function(x, N){
  poptim <- optimize(L, ...) # MLE odhad p pomoci L(p|x) a optimize()
  pmax <- ... # vyber maxima ze vsech vystupu fce optimize()
  par(...) # okraje grafu
  p <- ... # posloupnost p od 0.00001 do 0.99999 o delce 2048
  plot(p, L(p, x, N), ...) # graf L(p|x)
  abline(...) # svisla cervena cara (MLE odhad p)
  mtext(...) # popisek osy x
  mtext(...) # druhy popisek osy x
  mtext('L(p|x)',...) # popisek osy y
  return(...) # vrat MLE odhad parametru p
}
```

```
MLE.i <- mle.bin.optim.L(x = ..., N = ...) # graf + MLE odhad p pro (i)
MLE.ii <- mle.bin.optim.L(...) # graf + MLE odhad p pro (ii)
MLE.iii <- ... # graf + MLE odhad p pro (iii)
tab <- data.frame(...) # souhrnna tabulka MLE odhadu pro (i)-(iii)
```



Obrázek: Věrohodnostní funkce + MLE odhad parametru p pomocí funkce optimize()