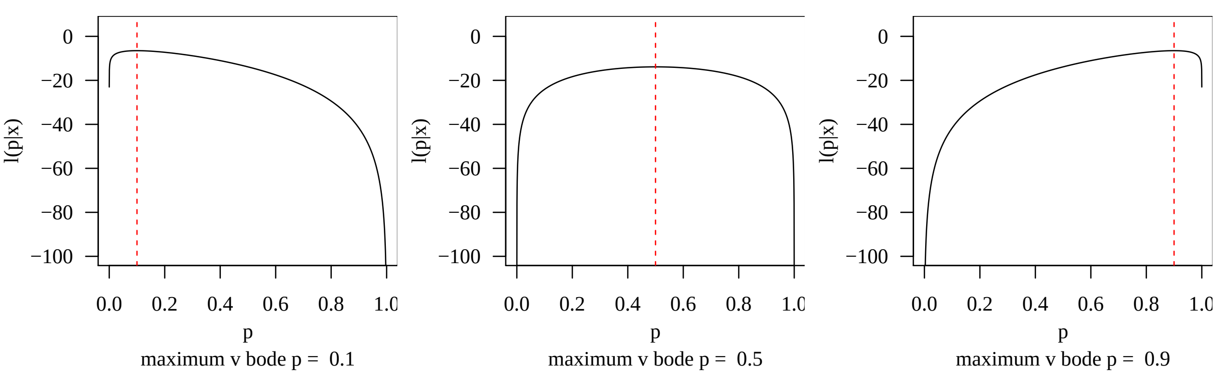
9 Věrohodnost – Binomické rozdělení

Příklad 9.1. Maximálně věrohodný odhad parametru p binomického modelu
Nechť $X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$ a realizace X jsou x. Předpokládejme, že jsme pozorovali (i) $x = 2$, (ii) $x = 10$ a (iii) $x = 18$ úspěchů v $N = 20$ pokusech.

1. Odvoďte
   a. tvar jádra věrohodnostní funkce $L(p|x)$ binomického modelu;
   b. tvar jádra logaritmu věrohodnostní funkce $\ell(p|x)$ binomického modelu;
   c. skóre funkci pro parametr p + MLE odhad parametru p;
   d. Fisherovo informační číslo + rozptyl MLE odhadu parametru p.
2. Dosazením do vzorců stanovte přesnou hodnotu odhadu parametru p, tj. $\widehat{p}$, a odhad rozptylu odhadu parametru p, tj. $\mathrm{Var}[\widehat{p}]$.
3. Pomocí maximalizace logaritmu věrohodnostní funkce $\ell(p|x)$ binomického modelu nalezněte maximálně věrohodný odhad parametru p pro situaci (i), (ii) a (iii). Pro každou situaci vykreslete křivku logaritmu věrohodnostní funkce binomického modelu spolu s maximálně věrohodným odhadem parametru p. Maximalizaci proveďte
   a. pomocí funkce optimize();
   b. pomocí vlastnoručně naprogramované Newton-Raphsonovy metody NRbin();
   c. pomocí vlastnoručně naprogramované metody sečen MSbin().
4. Pro situaci (i), (ii) a (iii) vykreslete křivku věrohodnostní funkce binomického modelu spolu s maximálně věrohodným odhadem parametru p získaným optimalizací věrohodnostní funkce $L(p|x)$ pomocí funkce optimize().

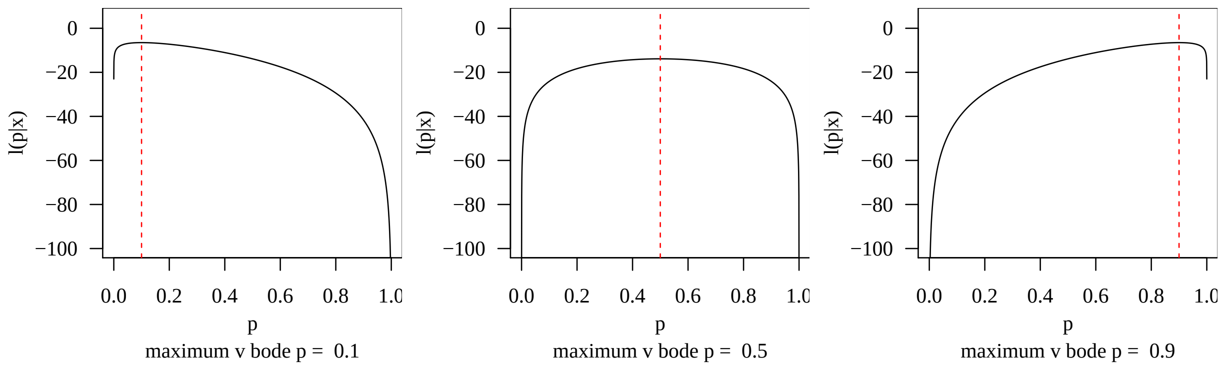
Řešení příkladu 9.1

```
        x = 2 x = 10 x = 18
p       0.1000 0.5000 0.9000
Var[p]  0.0045 0.0125 0.0045
```

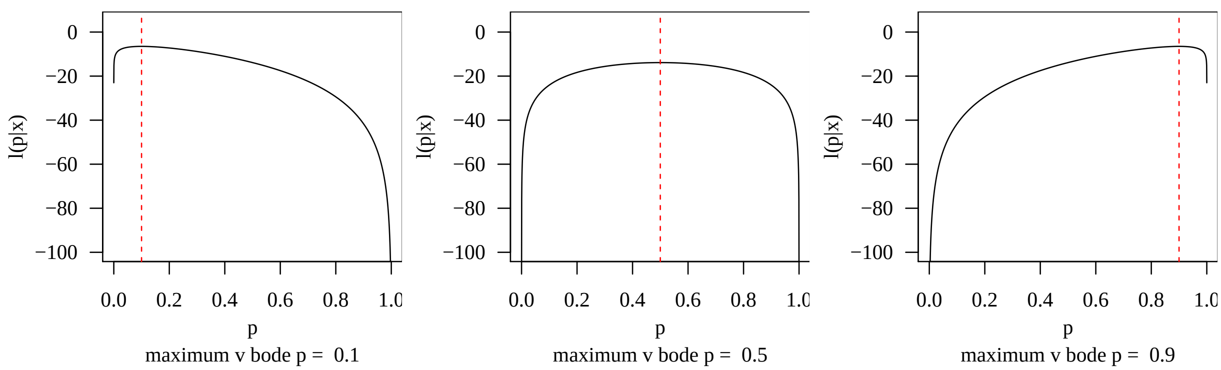


Obrázek 1: Logaritmus věrohodnostní funkce + MLE odhad parametru p pomocí funkce optimize()

★



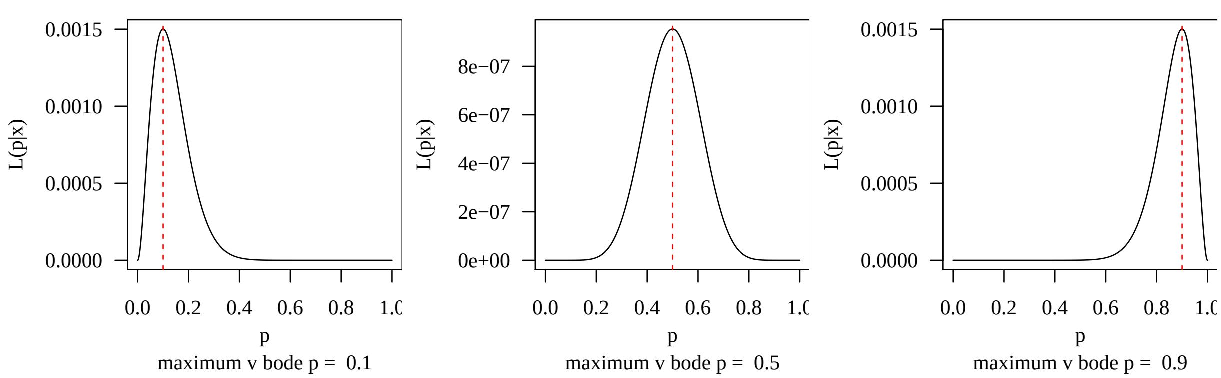
Obrázek 2: Logaritmus věrohodnostní funkce + MLE odhad parametru p pomocí Newton-Raphsonovy metody



Obrázek 3: Logaritmus věrohodnostní funkce + MLE odhad parametru p pomocí metody sečen

Tabulka 1: Odhady parametru p binomického rozdělení

	$x = 2$	$x = 10$	$x = 18$
exaktní výpočet	0.100000	0.500000	0.900000
funkce optimize()	0.100001	0.500000	0.899999
Newton-Raphsonova metoda	0.100000	0.500000	0.900000
metoda sečen	0.100000	0.500000	0.900000



Obrázek 4: Věrohodnostní funkce + MLE odhad parametru p pomocí funkce optimize()

Příklad 9.2. Kvadratická aproximace v binomickém modelu

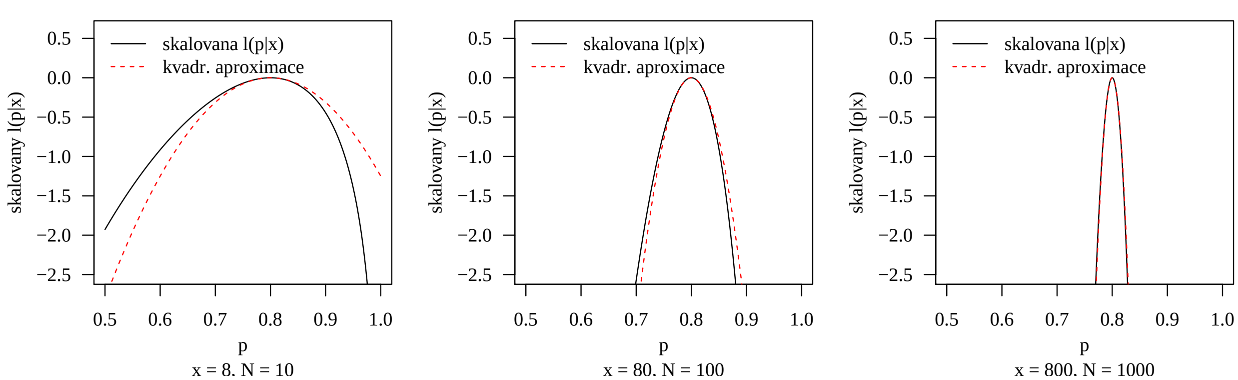
1. Nakreslete škálovaný logaritmus funkce věrohodnosti binomického rozdělení. Na x-ové ose bude p a na y-ové ose $\ln \mathcal{L}(p) = l(p|\mathbf{x}) - \max(l(p|\mathbf{x}))$. Porovnejte $\ln \mathcal{L}(p)$ s kvadratickou aproximací vypočítanou pomocí Taylorova rozvoje $\ln \mathcal{L}(p) = \ln\left(\frac{L(p|\mathbf{x})}{L(\widehat{p}|\mathbf{x})}\right) \approx -\frac{1}{2}\mathcal{I}(\widehat{p})(p-\widehat{p})^2$.

2. Nechť skóre funkce $S(p) = \frac{\partial}{\partial p} \ln L(p|\mathbf{x})$. Vezmeme-li derivaci kvadratické aproximace uvedené výše, dostaneme $S(p) = -\mathcal{I}(\widehat{p})(p-\widehat{p})$ anebo $-\mathcal{I}^{-1/2}(\widehat{p})S(p) \approx \mathcal{I}^{1/2}(\widehat{p})(p-\widehat{p})$. Potom zobrazením pravé strany na x-ové ose a levé strany na y-ové ose dostaneme asymptoticky lineární funkci s jednotkovým sklonem. Asymptoticky také platí $\mathcal{I}^{1/2}(\widehat{p})(p-\widehat{p}) \sim N(0,1)$, Je postačující mít rozsah x-ové osy $\langle -2; 2\rangle$, protože funkce je asymptoticky (lokálně) lineární na tomto intervalu. Rozumně škálujte y-vou osu. Zobrazte pro (a) $n = 8$, $N = 10$, (b) $n = 80$, $N = 100$ a (c) $n = 800$, $N = 1000$ ($p \in (0.5; 0.99)$). Okomentujte rozdíly mezi (a), (b) a (c).

Řešení příkladu 9.2

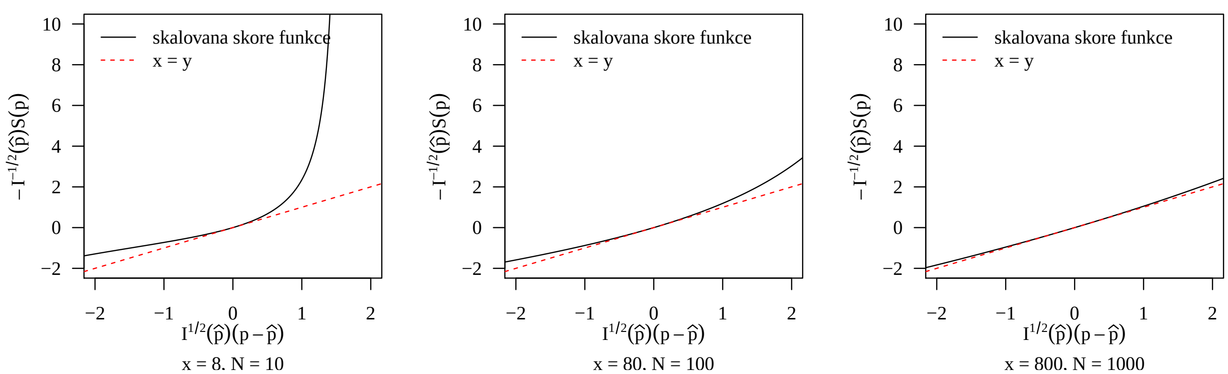
```
kvadr_aprox <- function(p, x, N, max.ylim, plot = 'aproximace'){
  l <- function(p, x, N) {...} # log. veroh. fce
  pmax <- optimize(...)$maximum # MLE odhad parametru p
  lr <- l(p, x, N) - l(pmax, x, N) # skalovany logaritmus veroh. fce v posloupnosti p
  FIM <- function(p, N) {...} # Fisherovo inf. cislo (FIM)
  Ip <-  FIM(...) # hodnota FIM pro p = pmax
  kv.aproximace <- -1 / 2 * Ip * (p - pmax) ^ 2 # kvadraticka aproximace

  # graf kvadraticke aproximace
  if(plot == 'aproximace'){
    par(...) # nastaveni okraji 4, 4, 1, 1
    plot(p, lr, ylim = c(-2.5, 0.6), xlab = '', ...) # graf skalovaneho logaritmu
    lines(p, kv.aproximace, ...) # krivka kvard. aproximace
    mtext(...) # popisek osy x
    mtext(paste('x = ', x, ', N = ', N, sep = ''), ...) # druhy popisek osy x
    legend(...) # legenda
  }
  # graf linearity skalovaneho logaritmu
  if(plot == 'linearita'){
    S <- function(p, x, N){x / p - (N - x) / (1 - p)} # skore funkce
    Sp <- S(...) # vypocet konkretni hodnoty skore funkce
    par(...) # nastaveni okraju 4, 4, 1, 1
    plot(Ip ^ (1 / 2) * (p - pmax), -Ip ^ (-1 / 2) * Sp, xlim = c(-2, 2),
         ylim = c(-2, max.ylim), ...) # graf skalovaneho logaritmu (vztah z bodu 2)
    abline(a = 0, b = 1, ...) # referencni primka y = x
    mtext(bquote(paste(I^{1/2} * (widehat(p)) * (p - widehat(p)))), ...) # popisek osy x
    mtext(...) # druhy popisek osy x
    mtext(bquote(paste(-I^{-1/2} * (widehat(p)) * S(p))), side = 2, ...) # popisek osy y
    legend(...) # legenda
  }
}
```



Obrázek 5: Kvadratická aproximace škálovaného logaritmu funkce věrohodnosti binomického rozdělení

★



Obrázek 6: Asymptotická linearita skóre funkce logaritmu funkce věrohodnosti binomického rozdělení