

Ústav matematiky a statistiky  
Přírodovědecká fakulta  
Masarykova univerzita

## Statistická inference I

### Téma 10: Normální model - Věrohodnost

Veronika Bendová

bendova.veronika@gmail.com

#### Princip věrohodnosti

- $f(\mathbf{x}|\theta)$  ... hustota rozdělení  $\mathcal{L}(\theta)$
- $L(\theta|\mathbf{x})$  ... funkce věrohodnosti
  - $L(\theta|\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})f(\mathbf{x}|\theta)$ , kde  $c \in \mathbb{R}$  je nezávislá na  $\theta$  a  $f(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$ .
- $\ell(\theta|\mathbf{x})$  ... logaritmus funkce věrohodnosti
  - $\ell(\theta|\mathbf{x}) = \ln(L(\theta|\mathbf{x})) = \ln(c(\mathbf{x})) + \ln(f(\mathbf{x}|\theta))$
- $S(\theta)$  ... skóre funkce (první derivace logaritmu funkce věrohodnosti)
  - $S(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ell(\theta|\mathbf{x})$
- $\hat{\theta}$  ... MLE odhad parametru  $\theta$ 
  - lze jej získat maximalizací fce věrohodnosti  $L(\theta|\mathbf{x})$  resp. log. fce věrohodnosti  $\ell(\theta|\mathbf{x})$
  - odpovídá kořenu skóre funkce  $S(\theta)$ ; ten můžeme vypočítat explicitně (je-li to možné), nebo vhodnou numerickou metodou. Pro nalezení jednorozměrného parametru  $\theta$  použijeme např. Newton-Raphsonovu metodu, metodu sečen, nebo metodu bisekce.
- $\mathcal{I}(\hat{\theta})$  ... Fisherova míra informace (mínus druhá derivace logaritmu věrohodnostní funkce vyjádřená v MLE odhadu parametru  $\theta$ )
  - $\mathcal{I}(\hat{\theta}) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ell(\theta|\mathbf{x})|_{\theta=\hat{\theta}}$
- $\text{Var}[\hat{\theta}]$  ... MLE odhad rozptylu odhadu parametru  $\theta$ 
  - $\text{Var}[\hat{\theta}] = \frac{1}{\mathcal{I}(\hat{\theta})}$

**Dataset 6: 03-paired-means-clavicle2.txt**

- Datový soubor obsahuje osteometrické údaje o délkách klíčních kostí (*clavicula*). Data pochází z anglického souboru dokumentovaných skeletů (Parsons, 1916). V souboru se nachází délky klíčních kostí na pravé a levé straně těla v párovém uspořádání. Jednotlivé kosti bez druhostranné kosti nebyly do souboru zařazeny.
- Přehled proměnných v datasetu:
  - id ... ID jedince;
  - sex ... pohlaví jedince (*m* - muž, *f* - žena);
  - length.L ... délka klíční kosti z levé strany (v mm);
  - length.R ... délka klíční kosti z pravé strany (v mm).

2 / 13

**Příklad 10.1 Maximálně věrohodné odhady parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$  v normálním modelu**

Načtěte datový soubor 03-paired-means-clavicle2.txt. Nechť náhodná proměnná  $X$  popisuje délku klíční kosti z levé strany u mužů. Za předpokladu, že náhodná veličina  $X$  pochází z normálního rozdělení, tj.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ :

1. Odvoďte
  - a. tvar jádra věrohodnostní funkce  $L((\mu, \sigma^2)^T | x)$  normálního modelu;
  - b. tvar jádra logaritmu věrohodnostní funkce  $\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)$  normálního modelu;
  - c. skóre funkce pro parametr  $\mu$  + MLE odhad parametru  $\mu$ ;
  - d. skóre funkce pro parametr  $\sigma^2$  + MLE odhad parametru  $\sigma^2$ ;
  - e. tvar Fisherovy informační matice.
2. Dosazením do vzorců stanovte přesnou hodnotu maximálně věrohodného odhadu parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$ , tj.  $\hat{\mu}$  a  $\hat{\sigma}^2$ .
3. Pomocí maximalizace logaritmu věrohodnostní funkce  $\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)$  normálního modelu nalezněte maximálně věrohodný odhad parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$ . Maximalizaci proveďte
  - a. pomocí funkce `optim()`;
  - b. pomocí vlastnoručně naprogramované dvourozměrné Newton-Raphsonovy metody `NRnorm()`;
  - c. pomocí vlastnoručně naprogramované Broydenovy metody `BMnorm()`.
4. Vykreslete (a) vrstevnicový diagram; (b) 3D-diagram logaritmu dvourozměrné věrohodnostní funkce normálního modelu spolu s maximálně věrohodnými odhady parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$  odhadnutými pomocí funkce `optim()`. K vykreslení použijte (a) funkce `image()` a `contour()`, (b) funkci `persp()`.

3 / 13

**Řešení příkladu 10.1**

1. Odvoďte

a. tvar jádra věrohodnostní funkce  $L((\mu, \sigma^2)^T | x)$  normálního modelu

$$f(x_i | (\mu, \sigma^2)^T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L((\mu, \sigma^2)^T | x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

konstanta      jádro věroh. fce

b. tvar jádra logaritmu věrohodnostní funkce  $\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)$  normálního modelu

$$\ell((\mu, \sigma^2)^T | x) = \ln(L((\mu, \sigma^2)^T | x)) = \underbrace{-\frac{n}{2} \ln 2\pi}_{\text{konstanta}} - \underbrace{\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}_{\text{jádro logaritmu věroh. fce}}$$

c. skóre funkce pro parametr  $\mu$  + MLE odhad parametru  $\mu$

$$S(\mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} (\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \cdot (-1) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$$

MLE ODHAD  $\mu$ :

$$S(\mu) = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i) - \sum_{i=1}^n \mu = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0$$

$$n\mu = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

4/13

d. skóre funkce pro parametr  $\sigma^2$  + MLE odhad parametru  $\sigma^2$

$$S(\sigma^2) = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} (\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)) = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left( -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right)$$

$$= -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^4} (-1) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

MLE ODHAD  $\sigma^2$ :

$$S(\sigma^2) = 0$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \quad | \cdot 2\sigma^4$$

$$-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

e. tvar Fisherovy informační matice

$$I((\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)^T) = \begin{pmatrix} I(\hat{\mu}) & I(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) \\ I(\hat{\sigma}^2, \hat{\mu}) & I(\hat{\sigma}^2) \end{pmatrix}$$

$$I(\hat{\mu}) = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ell((\mu, \sigma^2)^T | x) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{\sigma^2} n\mu \right) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\left( \frac{n}{\sigma^2} \right) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = \frac{n}{\hat{\sigma}^2}$$

$$I(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = -\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma^2} \ell((\mu, \sigma^2)^T | x) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left( \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\frac{1}{\sigma^4} (-1) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\frac{1}{\hat{\sigma}^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}) = 0$$

$$I(\hat{\sigma}^2) = -\frac{\partial^2}{\partial (\sigma^2)^2} \ell((\mu, \sigma^2)^T | x) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left( -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\left( \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} + \frac{1}{\hat{\sigma}^6} n \hat{\sigma}^2 = -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} + \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} = \frac{n}{2\hat{\sigma}^4}$$

2. Dosazením do vzorců stanovte přesnou hodnotu maximálně věrohodného odhadu parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$ , tj.  $\hat{\mu}$  a  $\hat{\sigma}^2$ .

$$I(\hat{\sigma}^2, \hat{\mu}) = -\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2 \partial \mu} \ell((\mu, \sigma^2)^T | x) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = -\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left( -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \Big|_{\substack{\mu = \hat{\mu} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma}^2}} = \frac{1}{\hat{\sigma}^4} \left( \sum_{i=1}^n x_i - n\hat{\mu} \right) = \frac{1}{\hat{\sigma}^4} \left( \sum_{i=1}^n x_i - n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{1}{\hat{\sigma}^4} \left( \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0$$

Poznámka k pseudokódu: V celém pseudokódu této prezentace je proměnnými **sigma** i **sigma2** myšlena hodnota parametru  $\sigma^2$ . Název **sigma** používáme zejména proto, aby naprogramované funkce byly přehlednější. Taktéž proměnná **theta[2]** ve funkci **lnormo()** reprezentuje parametr  $\sigma^2$ .

```
1 data <- read.delim(...) # nacteni dat
2 ... # ...
```

sigma2. Myslena hodnota parametru  $\sigma^2$ . Tazek sigma pouzivame zejména proto, aby naprogramované funkce byly přehlednější. Taktéž proměnná **theta[2]** ve funkci **lnormo()** reprezentuje parametr  $\sigma^2$ .

```
1 data <- read.delim(...) # nacteni dat
2 cla.L <- data[... , ...] # vyber delek leve kl. kosti muzu
3 data <- na.omit(...) # odstraneni NA hodnot
4 n <- ... # delka vektoru cla.L
5 mu <- ... # MLE odhad parametru mu
6 sigma2 <- ... # MLE odhad parametru sigma ^ 2
7 tab <- data.frame(...) # souhrnna tabulka vysledku
```

	mu	sigma2	
1	153.6	96.96	8 9

3. Pomocí maximalizace logaritmu věrohodnostní funkce  $\ell((\mu, \sigma^2)^T | x)$  normálního modelu nalezněte maximálně věrohodný odhad parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$ . Maximalizaci proveďte

a. pomocí funkce **optim()**  $c(\mu, \sigma^2)$

```
lnormo <- function(theta, x){
  n <- length(x)
  like <- -n/2 * ln(2*pi) - n/2 * ln(sigma^2) - 1/(2*sigma^2) * sum((x_i - mu)^2)
}
```

```
OPTtheta <- optim(interval, fce, x = ..., control = list(fnscale = -1))
```

$\hat{\mu}$  ... OPTtheta\$par[1]  
 $\hat{\sigma}^2$  ... OPTtheta\$par[2]

```
10 lnormo <- function(theta, x){ # log. veroh. fce rozd. N(mu, sigma ^ 2)
11   n <- ... # delka vektoru x
12   like <- ... # log. fce veroh. rozdeleni N(theta[1], theta[2])
13   return(...) # vystup; promenna like
14 }
15 OPTtheta <- optim(c(145, 100), lnormo, x = cla.L,
16   control = list(fnscale = -1)) # MLE odhad vektoru
17   # parametru theta = (mu, sigma ^ 2) ^ T
18 max.m <- OPTtheta$par[1] # MLE odhad parametru mu
19 max.s <- OPTtheta$par[2] # MLE odhad parametru sigma ^ 2
```

	mu	sigma2	
1	153.6043	96.97404	20 21

b. pomocí vlastnoručně naprogramované dvourozměrné Newton-Raphsonovy metody **NRnorm()**; Newton-Raphsonova metoda

Jednorozměrná

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, f'(x^k) \neq 0$$

Aplikace na bin. rozdělení!

$$p^{k+1} = p^k + \frac{S(p^k)}{I(p^k)}$$

Dvourozměrná

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{J(x^k)}$$

Jakobián

Aplikace na normální rozdělení

$$x^{k+1} = x^k + I(x^k)^{-1} \cdot x' \cdot u(x^{k-1})$$

$$x^k = \begin{pmatrix} \mu^k \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$I(x^k) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

FISHEROVÁ MIRA INF.

$$u_1 = \left( \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \right)$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{n}{2\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mu} \ell((\mu, \sigma^2)^T | x) \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell((\mu, \sigma^2)^T | x) \end{pmatrix}$$

SKÓRE VEKTOR

```
22 lnorm <- function(mu, sigma, x){ # log. veroh. fce rozd. N(mu, sigma ^ 2)
23   n <- ... # delka vektoru x
24   like <- ... # logaritmus veroh. fce rozd. N(mu, sigma ^ 2)
25   return(...) # vystup; promenna like
26 }
27
28 snorm <- function(mu, sigma, x){ # vektor skore funkci U
29   n <- ... # delka vektoru x
30   skore.mu <- ... # skore fce pro par. mu
31   skore.sigma <- ... # skore fce pro par. sigma ^ 2
32   U <- c(... , ...) # vektor U = (S(mu), S(sigma ^ 2)) ^ T
33   return(...) # vystup; vektor U
34 }
```

Kritérium pro zastavení:

$$(|\ell(x^k) - \ell(x^{k-1})| < 0.05 \ \& \ k < 1000)$$

```

35 hnorm <- function(mu, sigma, x){ # Fisherova inf. matice I
36   n <- ... # delka vektoru x
37   I11 <- ... # I_{11}
38   I12 <- ... # I_{12} = I_{21}
39   I22 <- ... # I_{22}
40   I <- matrix(...) # Fisherova informaci matice I
41   return(...) # vystup; matice I
42 }
43
44 NMnorm <- function(x01, x02, t){
45   # iniciacni faze funkce; x = (mu, sigma ^ 2) ^ T
46   x <- c(x01, x02) # poc. nastaveni vektoru x v kroku 1
47   f1 <- ... # poc. nastaveni f1 v kroku 1: f1 = 0
48   f2 <- lnorm(...) # poc. nastaveni f2 v kroku 1: f2 = 1(x[1], x[2] | t)
49   k <- ... # poc. nastaveni pocitadla k: k = 0
50
51   # telo funkce; proces probiha, dokud podminka while(...) plati
52   while(abs(f1 - f2) > 0.00001 & k < 1000){
53     k <- ... # zvetseni pocitadla o 1
54     U <- snorm(..., t) # vektor skore fci U = (S(x[1]), S(x[2]))^T
55     H <- hnorm(..., t) # FIM v hodnotach mu = x[1] a sigma^2 = x[2]
56     x <- x + solve(H) %*% U # aktualizace vektoru x
57     f1 <- f2 # aktualizace f1
58     f2 <- lnorm(..., t) # aktualizace f2: log. veroh. fce v novem x
59   }
60   return(list(mu = x[1], sigma2 = x[2], like = f2,
61             k = k)) # vystup; seznam o 4 polozkach
62 }
63 NMres <- NMnorm(x01 = ..., x02 = ..., cla.L) # MLE odhad (mu, sigma^2)^T
64 # x01 a x02 je treba zvolit vhodne, napr. x01 = 150 a x02 = 90
65 max.nm <- NMres$... # MLE odhad par. mu
66 max.ns <- NMres$... # MLE odhad par. sigma ^ 2

```

mu	sigma2	
1	153.6	96.36093

67  
68  
9/13

$$x^{k+1} = x^k + \underbrace{I(x^k)^{-1}}_H \cdot \underbrace{U(x^k)}_U$$

c. pomocí vlastnoručně naprogramované Broydenovy metody BMnorm()

Broydenova metoda (dvourozměrná analogie metody sečen)

Jednorozměrná MS:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k) - f(x^{k-1})} f(x^k)$$

$$x^k = \begin{pmatrix} \mu^k \\ \sigma^2 k \end{pmatrix} \quad B^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \\ -\frac{n}{2\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{pmatrix}$$

Dvourozměrná MS (Broydenova)

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{B^k}$$

$$B^k = B^{k-1} + \frac{f(x^k) - f(x^{k-1}) - B^{k-1}(x^k - x^{k-1})}{\|x^k - x^{k-1}\|^2} (x^k - x^{k-1})$$

Aplikace na normální rozdělení

$$x^{k+1} = x^k - \frac{u(x^k)}{B^k} \quad \text{!} \cdot \text{!}$$

$$B^k = B^{k-1} + \frac{u(x^k) - u(x^{k-1}) - B^{k-1} \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x^k & x^{k-1} \end{pmatrix}}{\|x^k - x^{k-1}\|^2}$$

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

```

69 BMnorm <- function(x10, x11, x20, x21, t){
70   # iniciacni faze funkce; x1 = (mu, sigma ^ 2)^T v kroku 1;
71   # x2 = (mu, sigma ^ 2)^T v kroku 2
72   x1 <- c(x10, x20) # poc. nastaveni vektoru x v kroku 1
73   x2 <- c(x11, x21) # poc. nastaveni vektoru x v kroku 2
74   f1 <- lnorm(x1[1], x1[2], t) # log. veroh. fce v kroku 1
75   f2 <- lnorm(...) # log. veroh. fce v kroku 2
76   k <- ... # poc. nastaveni pocitadla k: k = 0
77   B <- diag(2) # poc. nastaveni matice B (jednotkova m. dimenze = 2x2)

```

kritérium pro zastavení:  
viz N-R metoda

```

78 # telo funkce; proces probiha, dokud podminka while(...) plati
79 while(abs(f1 - f2) > 0.00001 & k < 1000){
80   k <- ... # zvetseni pocitadla o 1
81   U1 <- snorm(x1[1], x1[2], t) # vektor skore fci v kroku 1
82   U2 <- snorm(...) # vektor skore fci v kroku 2
83   B <- B + c(((...) - B %*% (...)) / sum(...) ^ 2) %*% t(c(...))
84   # aktualizace matice B
85   x <- (x2 - solve(B) %*% U2) # vypocet vektoru x
86   f1 <- ... # aktualizace f1 (nyni f2)
87   f2 <- lnorm(...) # aktualizace f2 (log. veroh. fce ve vektoru x)
88   x1 <- ... # aktualizace x1 (nyni x2)
89   x2 <- ... # aktualizace x2 (nyni x)
90 }
91 return(list(mu = x[1], sigma2 = x[2], like = f2,
92           k = k)) # vystup; seznam o 4 polozkach
93 }
94
95 BMres <- BMnorm(..., t = cla.L) # MLE odhad (mu, sigma ^ 2)^T
96 # x10, x11, x20 a x21 je treba zvolit vhodne, napr. 147, 157, 90 a 100.
97 max.bm <- BMres$mu # MLE odhad par. mu
98 max.bs <- BMres$sigma2 # MLE odhad par. sigma ^ 2

```

	mu	sigma2
1	153.6039	96.46132

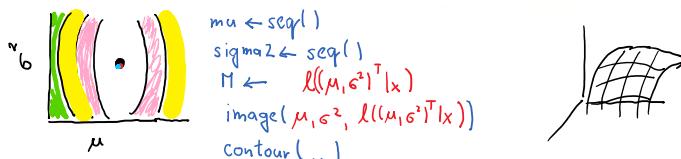
99  
100

Tabulka: Odhady parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$  normálního rozdělení

	$\mu$	$\sigma^2$
exaktní výpočet	153.600000	96.960000
funkce optim()	153.604298	96.974037
Newton-Raphsonova metoda	153.600000	96.360928
Broydenova metoda	153.603912	96.461318

11/13

3. Vykreslete (a) vrstevnicový diagram; (b) 3D-diagram logaritmu dvourozměrné věrohodnostní funkce normálního modelu spolu s MLE odhady parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$  odhadnutými pomocí všech tří funkcí. K vykreslení použijte (a) funkce image() a contour(), (b) funkci persp().



```

101 N <- 50
102 mu <- seq(...) # posl. bodu osy x; od 146 do 157 o delce N
103 sigma2 <- seq(...) # posl. bodu osy y; od 80 do 120 o delce N
104 M <- matrix(NA, N, N) # prazdna matice dimenze (N x N)
105 for(i in 1:length(mu)){
106   for(j in 1:length(sigma2)){
107     M[i, j] <- lnorm(mu[i], sigma2[j], cla.L)
108   }
109 } # hodnoty log. veroh. fce
110
111 k <- ... # pocet barev; k = 15
112 par(...) # okraje grafu 4, 4, 2, 2
113 image(..., asp = F, ylim = c(75, 120), col = terrain.colors(...),
114        xlab = expression(...), ylab = expression(...),
115        breaks = seq(min(M), max(M), length = k + 1),
116        las = ...) # vrstevnicovy diagram log. veroh. fce
117 contour(..., levels = ..., add = T) # konturovy diagram log. veroh. fce
118 points(...) # cerny bod; MLE odhad (mu, sigma ^ 2); fce optim
119 points(...) # cerveny bod MLE odhad (mu, sigma ^ 2); N-R metoda
120 points(...) # modry bod MLE odhad (mu, sigma ^ 2); Br. metoda
121 legend('bottom', horiz = T, ...) # legenda

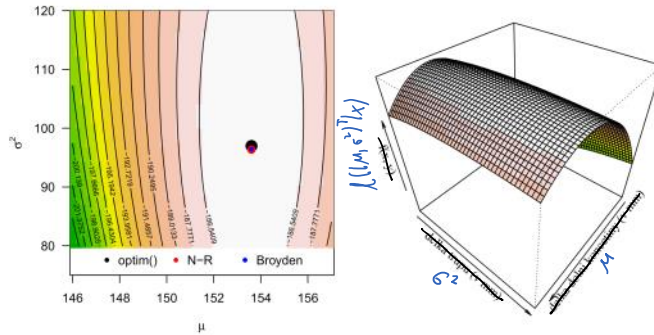
```

12/13

```

122 nrz <- nrow(M) # pocet radku matice M
123 ncz <- ncol(M) # pocet sloupce matice M
124 color <- terrain.colors(...) # paleta k barev
125 stredy <- (M[-1, -1] + M[-1, -ncz] + M[-nrz, -1] + M[-nrz, -ncz]) / 4
126 # matice stredy site
127 stredy.col <- cut(stredy, k) # rozděl rozpeti hodnot do k ekvidistantních
128 # intervalu a kazde hodnotě prirad interval, do kterého nalezí
129 par(...) # okraje grafu 1, 1, 1, 1
130 persp(..., col = color[stredy.col], ticktype = ..., xlab = ..., ylab = ...,
131         zlab = ..., , phi = 40, theta = 130)) # 3D-diagram log. veroh. fce

```



Obrázek: (a) Vrstevnicový diagram (vlevo); (b) 3D-diagram (vpravo) logaritmu dvourozměrné věrohodnostní funkce normálního modelu spolu s maximálně věrohodnými odhady parametrů  $\mu$  a  $\sigma^2$