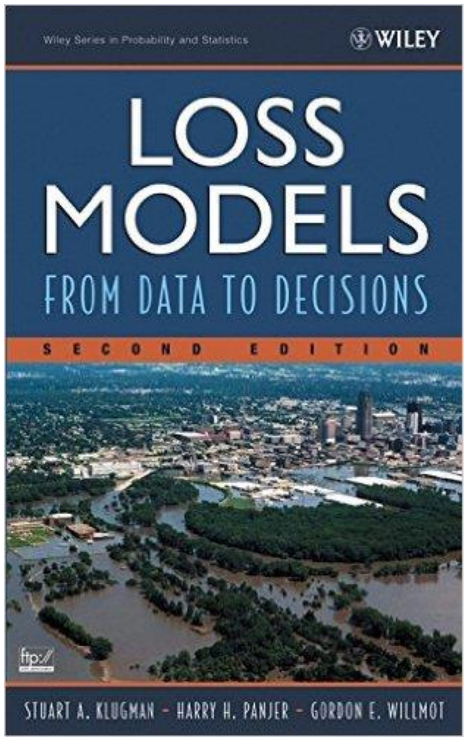
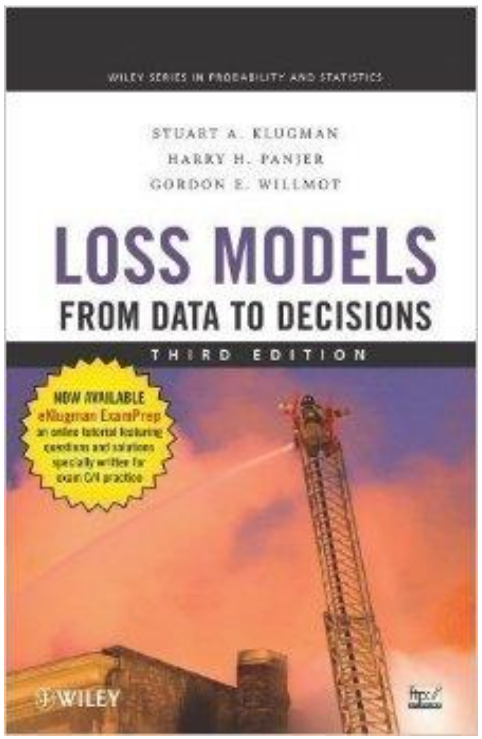
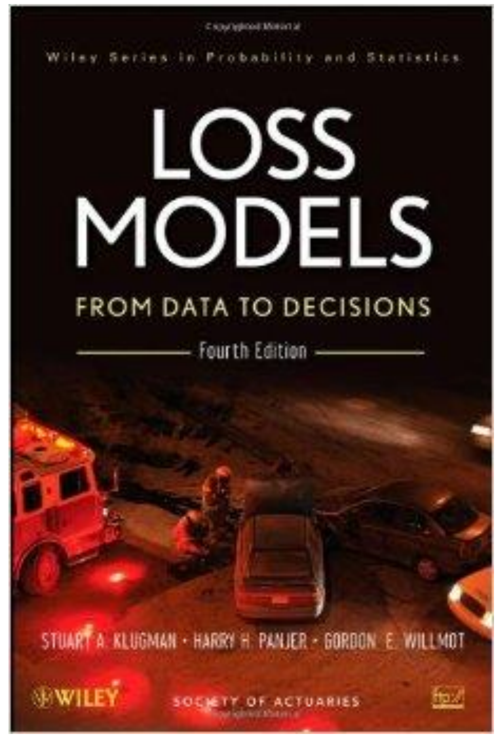
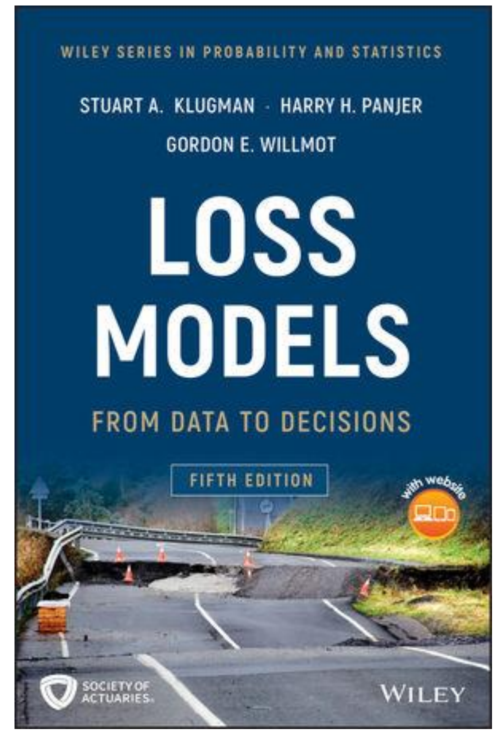
M7988 Modely ztrát v neživotním pojištění









M7988 Modely ztrát v neživotním pojištění

$\mathrm{E}[\mu(\Theta)]$, $\mathrm{E}[v(\Theta)]$, and $\mathrm{Var}[\mu(\Theta)]$ are all finite, and therefore the credibility premium is well defined. In fact, (20.47) becomes

$$\mathrm{E}[\mu(\Theta)] = \mu + \frac{\theta_1^k e^{-\mu k \theta_1} - \theta_0^k e^{-\mu k \theta_0}}{k \int_{\theta_0}^{\theta_1} t^k e^{-\mu k t} dt}. \tag{20.57}$$

The posterior pdf from (20.50) is of the same form as (20.56), with μ and k replaced by μ_* and k_* in (20.52) and (20.51), respectively. Therefore, the Bayesian premium (20.53) in this truncated situation is, by analogy with (20.57),

$$\mathrm{E}(X_{n+1}|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \mu_* + \frac{\theta_1^{k_*} e^{-\mu_* k_* \theta_1} - \theta_0^{k_*} e^{-\mu_* k_* \theta_0}}{k_* \int_{\theta_0}^{\theta_1} t^{k_*} e^{-\mu_* k_* t} dt}. \tag{20.58}$$

Because μ_* is a linear function of the x_js, (20.58) is nonlinear in the x_js, and therefore credibility cannot be exact. Furthermore, this truncated example demonstrates that the endpoint conditions (20.48) and (20.54) needed for exact credibility are model assumptions and, so, cannot be omitted just to obtain a nicer result.

Next, consider the more usual (untruncated) situation with $\theta_0 = 0$ and $\theta_1 = \infty$. Then (20.56) becomes the gamma pdf with

$$\pi(\theta) = \frac{\mu k (\mu k \theta)^k e^{-\mu k \theta}}{\Gamma(k+1)}, \quad \theta > 0, \tag{20.59}$$

which is a valid pdf as long as $k > -1$ and $\mu k > 0$. There are three cases:

Case	Result
$-1 < k \le 0$,	$\mathrm{E}[\mu(\Theta)] = \mathrm{E}[v(\Theta)] = \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = \infty$,
$0 < k \le 1$,	$\mathrm{E}[\mu(\Theta)] = \mu < \infty$, $\mathrm{E}[v(\Theta)] = \mathrm{Var}[\mu(\Theta)] = \infty$,
$k > 1$,	$\mathrm{E}[\mu(\Theta)] = \mu < \infty$, $\mathrm{E}[v(\Theta)] < \infty$, $\mathrm{Var}[\mu(\Theta)] < \infty$.

Hence, there is no credibility premium unless $k > 1$. However, because $k_* = k + n > 0$ regardless of the value of k, the Bayesian premium is

$$\mathrm{E}(X_{n+1}|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \mu_* = \frac{\mu k + n\bar{x}}{k+n},$$

a linear function of the x_js. To summarize, in the exponential-gamma model with prior pdf (20.59), the Bayesian premium is a linear function of the x_js regardless of the value of k, whereas if $k \le 1$ there is no credibility premium. If $k > 1$, then credibility is exact.

There is one last technical point worth noting. It was mentioned previously that the choice of the symbol μ as a parameter associated with the prior pdf $\mu(\theta)$ is not a coincidence because it is often the case that $\mathrm{E}[\mu(\Theta)] = \mu$. A similar comment applies to the parameter k. Because $v(\theta) = \mu'(\theta)/r'(\theta)$ from (5.9), it follows from (20.46) and the product rule for differentiation that

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\left\{[\mu(\theta) - \mu]\frac{\pi(\theta)}{r'(\theta)}\right\} &= \mu'(\theta)\left[\frac{\pi(\theta)}{r'(\theta)}\right] + [\mu(\theta) - \mu]\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\pi(\theta)}{r'(\theta)}\right] \\ &= v(\theta)\pi(\theta) - k[\mu(\theta) - \mu]^2\pi(\theta).\end{aligned}$$

A.5.1.2 Inverse Gaussian—μ, θ

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{\theta}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\theta z^2}{2x}\right), \quad z = \frac{x-\mu}{\mu}, \\
F(x) &= \Phi\left[z\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2}\right] + \exp\left(\frac{2\theta}{\mu}\right)\Phi\left[-y\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2}\right], \quad y = \frac{x+\mu}{\mu}, \\
\mathrm{E}[X] &= \mu, \quad Var[X] = \mu^3/\theta, \\
\mathrm{E}[X^k] &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(k+n-1)!}{(k-n-1)!n!}\frac{\mu^{n+k}}{(2\theta)^n}, \quad k = 1, 2, \ldots, \\
\mathrm{E}[X \wedge x] &= x - \mu z \Phi\left[z\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2}\right] - \mu y \exp(2\theta/\mu)\Phi\left[-y\left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2}\right], \\
M(t) &= \exp\left[\frac{\theta}{\mu}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2}{\theta}t}\right)\right], \quad t < \frac{\theta}{2\mu^2}, \\
\hat{\mu} &= m, \quad \hat{\theta} = \frac{m^3}{t - m^2}.
\end{aligned}$$

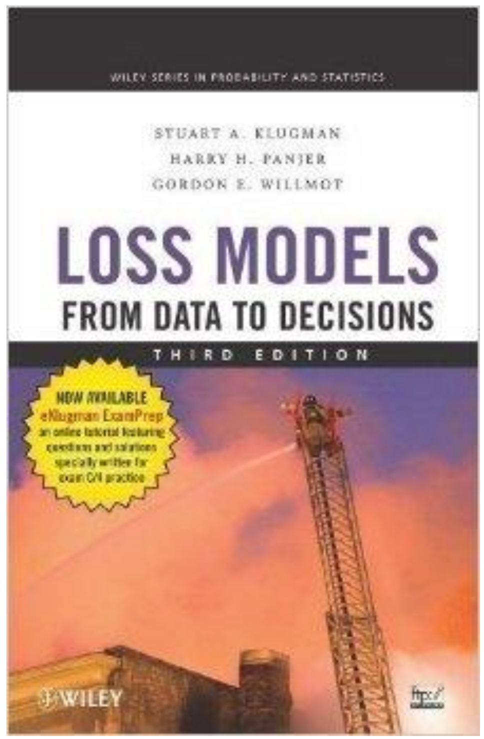
A.5.1.3 log-t—r, μ, σ

(μ can be negative) Let Y have a t distribution with r degrees of freedom. Then $X = \exp(\sigma Y + \mu)$ has the log-t distribution. Positive moments do not exist for this distribution. Just as the t distribution has a heavier tail than the normal distribution, this distribution has a heavier tail than the lognormal distribution.

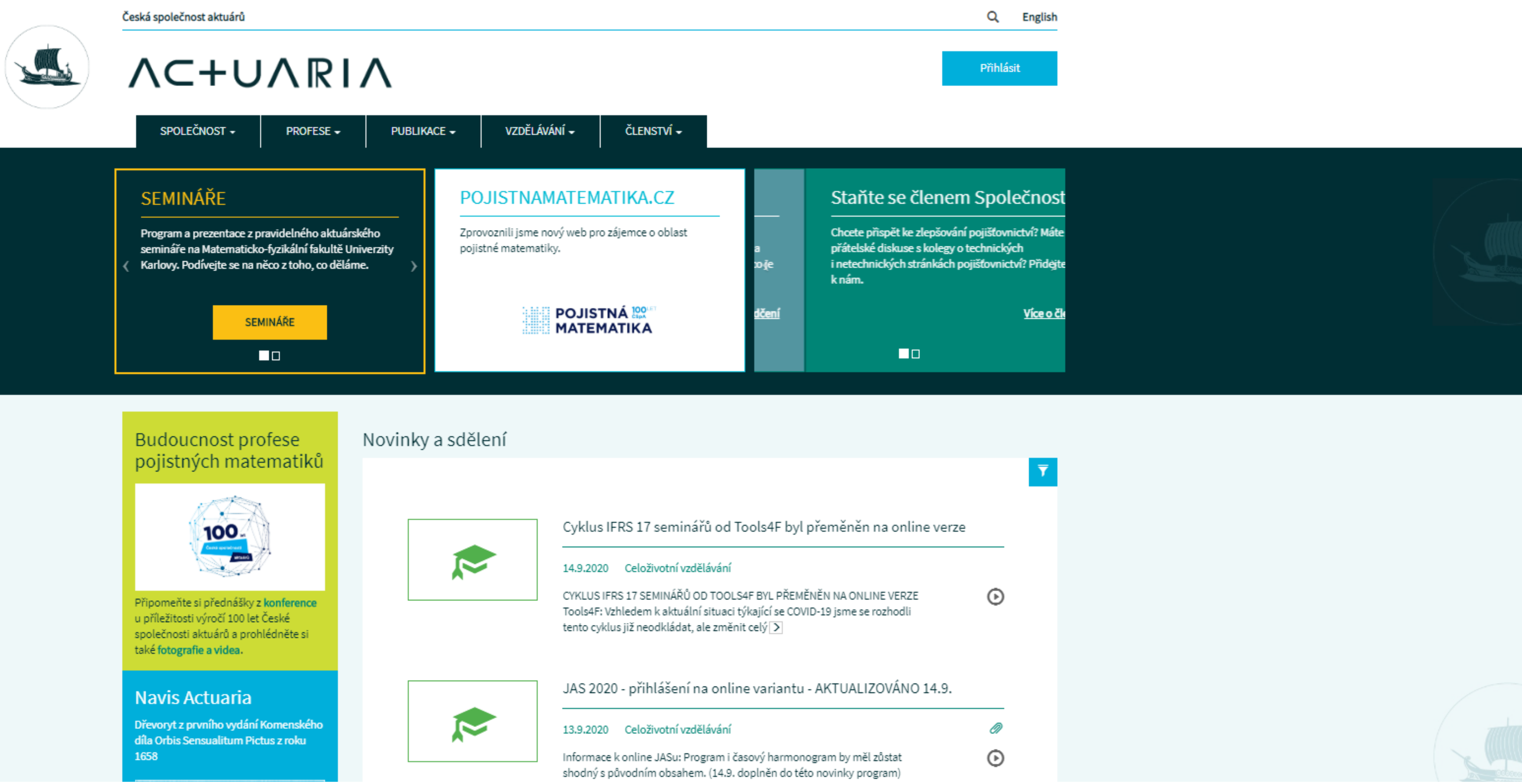
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{x\sigma\sqrt{\pi r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{r}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]^{(r+1)/2}}, \\
F(x) &= F_r\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \text{ with } F_r(t) \text{ the cdf of a } t \text{ distribution with } r \text{ df}, \\
F(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\beta\left[\frac{r}{2}, \frac{1}{2}; \frac{r}{r + \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}\right], & 0 < x \le e^{\mu}, \\ 1 - \frac{1}{2}\beta\left[\frac{r}{2}, \frac{1}{2}; \frac{r}{r + \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}\right], & x \ge e^{\mu}. \end{cases}
\end{aligned}$$

M7988 Modely ztrát v neživotním pojištění – literatura

Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot: *Loss Models: From Data to Decisions*, 3rd edition (2008).



Česká společnost aktuárů – www.actuaria.cz



Kdo jsou aktuáři?

Aktuáři jsou odborníci, kteří používají své znalosti a dovednosti z matematiky, matematické pravděpodobnosti a statistiky, ale také z informatiky, ekonomie, financí a podnikání k měření a řízení rizik a nejistot, a to zejména v kontextu pojišťoven, zajišťoven, penzijních fondů. Aktuáři jsou pro pojišťovny a zajišťovny naprosto nezbytní ať již jako zaměstnanci, nebo jako poradci; rozsáhlé uplatnění však nalézají v poslední době i v jiných finančních i nefinančních institucích.

Tradičně aktuáři sestavují a analyzují data pro odhad pravděpodobnosti a pravděpodobných nákladů spojených s náhodnými událostmi, jako je smrt, nemoc, zranění, zdravotní postižení, ztráta nebo poškození majetku atd. Následně pak své výsledky a znalosti uplatňují v tvorbě pojistných produktů, stanovování cen pojistného, stanovování technických rezerv a jiných souvisejících finančních strategií takovým způsobem, aby byly na řádné matematické, statistické a finanční bázi. Aktuáři se rovněž zabývají finančními otázkami, jako výše penzijních příspěvků potřebných k dosažení určitého důchodu a způsob, jakým investovat zdroje s cílem maximalizovat návratnost investic s ohledem na potenciální riziko.

V poslední době se záběr analýz i uplatnění aktuárů v pojišťovnictví i mimo něj značně rozšiřuje a aktuáry najdeme mimo tradiční oblasti zmíněné výše zejména ve všech oblastech řízení podnikových rizik, v datově analytických týmech, ale i v nejvyšších patrech řízení podniků samotných. Aktuáři přispívají k řízení investic a aktiv, sestavují strategické analýzy a podílí se na celé řadě dalších velmi zajímavých činností jako zkoumání chování klientů, distribučních kanálů atd.

M7988 Modely ztrát v neživotním pojištění – informace

Na **přednáškách (čtvrtek 8:00 - 9:40)** budeme probírat vybrané partie z knihy *Loss Models: From Data to Decisions*.

Na **cvičeních (čtvrtek 10:00 – 10:50)** budete zpracovávat zadané problémy, většinou na počítači v softwaru R.

Zkouška:

- vypracování semestrálního projektu
- ústní s písemnou přípravou (seznam okruhů bude uveden později)

Konzultační hodiny: podle (e-mailové) dohody

M7988 Modely ztrát v neživotním pojištění – plán přednášek

- Odhady parametrů v aktuárských modelech
  - Metoda momentů
  - Metoda maximální věrohodnosti
  - Metoda minimálního χ^2
  - Bayesovské metody

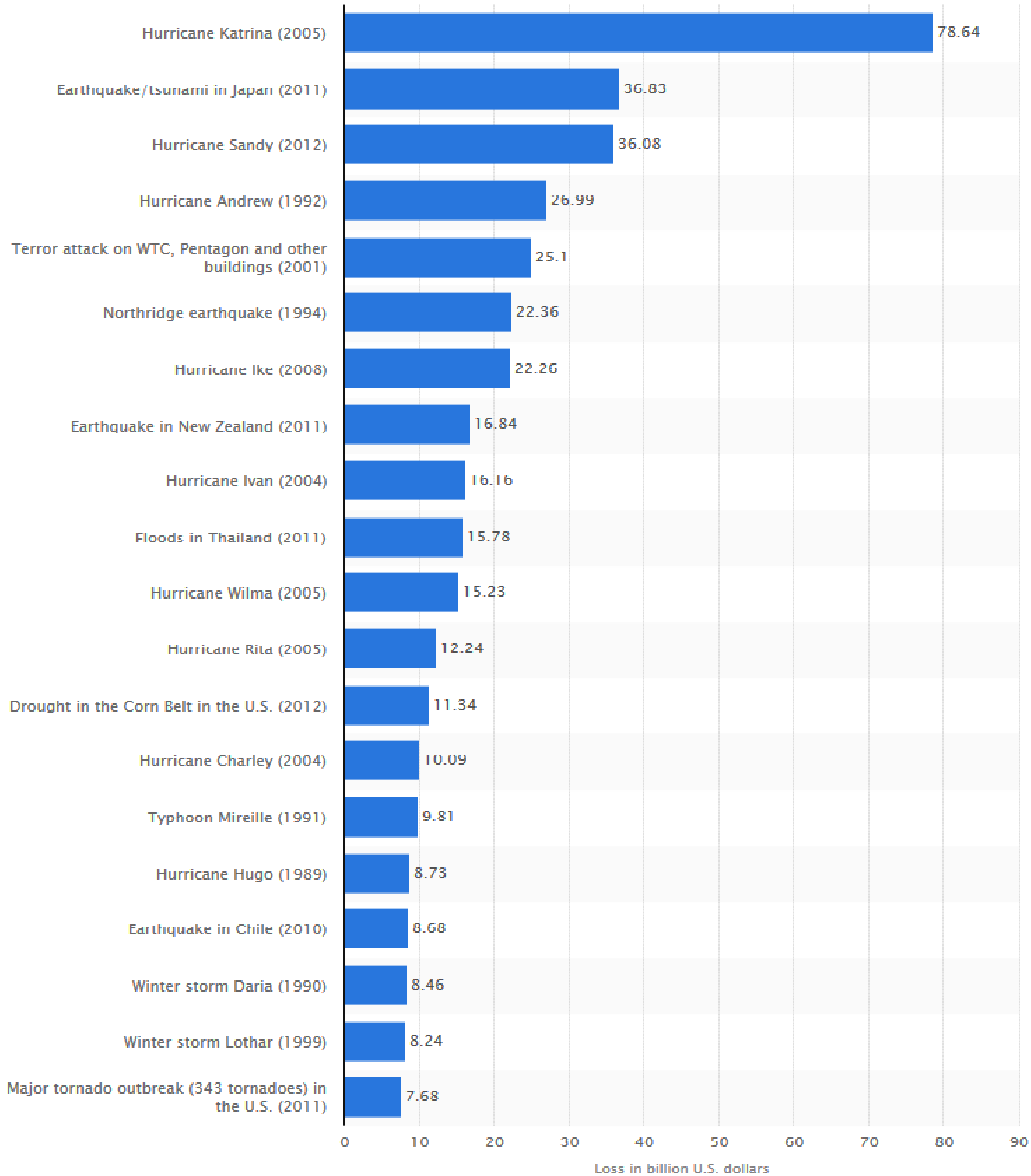
- Metody pro výběr vhodného modelu
  - Grafické metody pro ověřování vhodnosti modelu
  - Testy pro ověření vhodnosti modelu
  - Model selection

- Teorie extrémních hodnot

- Mnohorozměrné modely, kopule

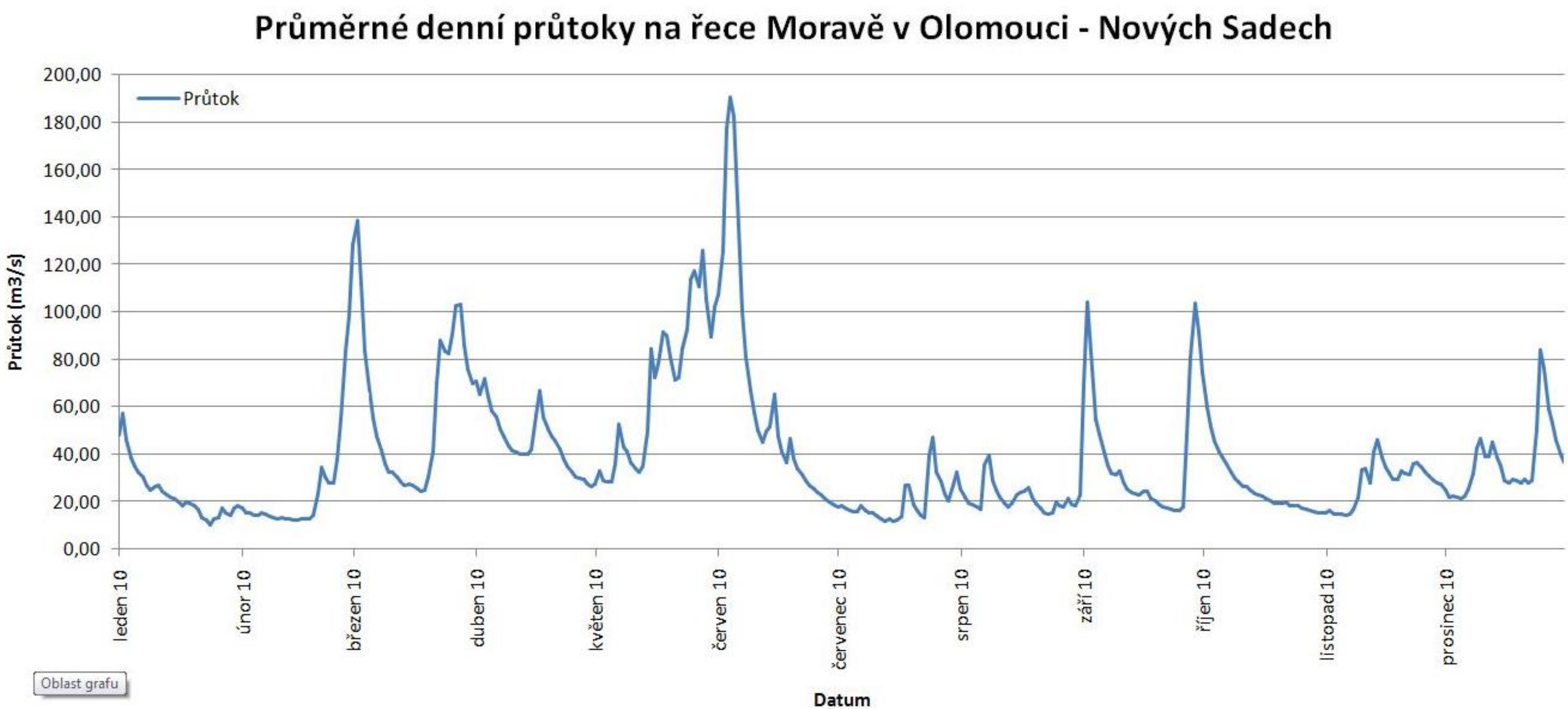
M7988 Modely ztrát v neživotním pojištění – plán přednášek

- 16.9. - Metoda momentů
- 23.9. - Metoda maximální věrohodnosti, delta metoda
- 30.9. - MLE pro intervalová data, metoda minimálního χ^2
- 7.10. - Úvod do Bayesovské statistiky
- 14.10. - Bayesovská statistika
- 21.10. - Model selection
- 4.11. - Úvod do teorie extrémních hodnot
- 11.11. - Metoda blokových maxim
- 18.11. - Metoda peaks over threshold
- 25.11. - Metoda peaks over threshold II
- 2.12. - Kopuly
- 9.12. - Kopuly II

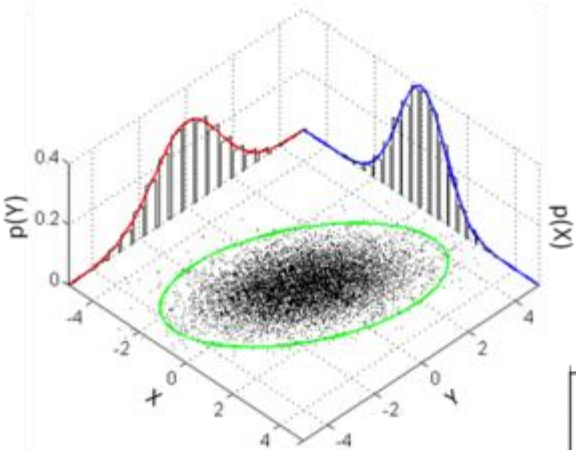


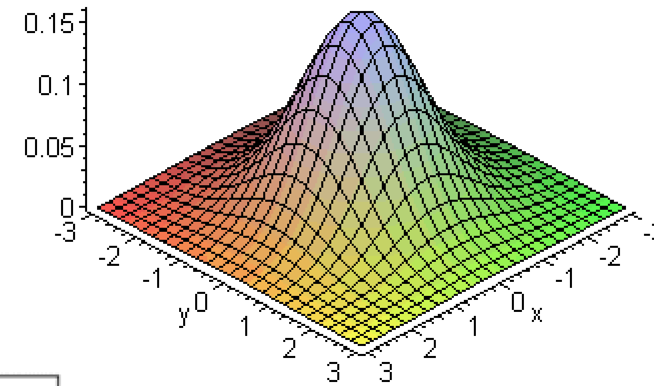
Most costly catastrophes to the insurance industry worldwide from 1970 to 2014 (in billion U.S. dollars)

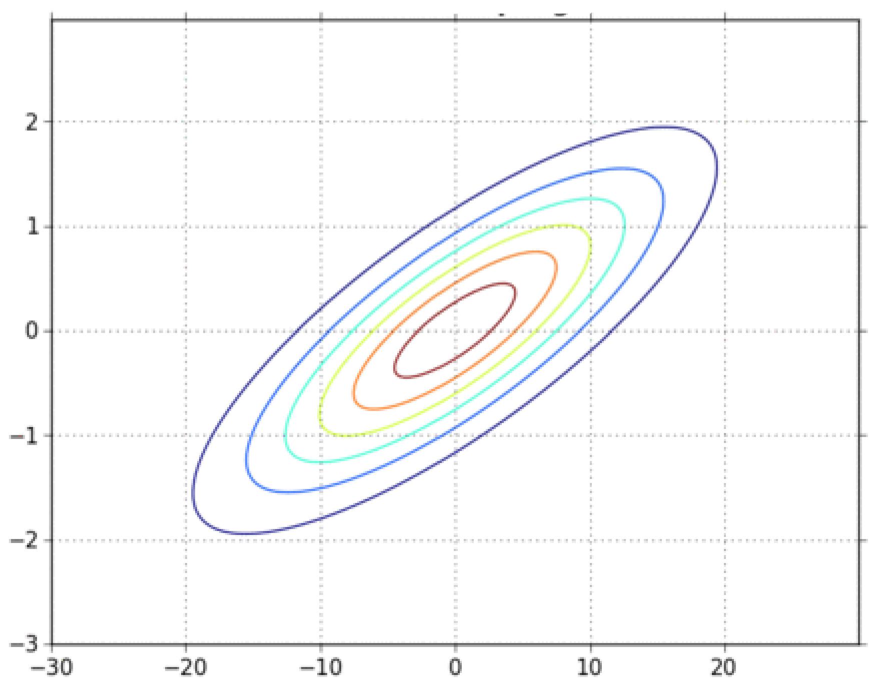
Stoletá (tisíciletá) povodeň



Dvourozměrné normální rozdělení







Dvourozměrné F rozdělení