Věta

Nechť náh. vektor $R=(R_1,\dots,R_N)^T$ má rovnoměrné rozdělení na množině permutací $\{1,\dots,N\}$. Označme $T_N=\sum_{i=1}^{N} c_i\cdot a(R_i)$, kde $c_1,\dots,c_N$ jsou pevné konstanty a $a:\{1,2,\dots,N\}\to\mathbb{R}$ je nějaká pevně zvolená funkce. Pak platí

$$ET_N=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}c_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}a(j)\right) \quad \text{a} \quad DT_N=\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(c_i-\bar{c})^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}(a(j)-\bar{a})^2\right),$$ kde $\bar{c}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}c_i$ a $\bar{a}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}a(j)$.

Poznámka (terminologická)

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost náh. veličin. Označme $\mu_n=EX_n$ a $\sigma_n^2=DX_n$. Řekneme, že $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je asymptoticky normální s parametry μ_n a σ_n^2, píšeme $X_n\approx N(\mu_n,\sigma_n^2)$,

jestliže $P\left(\frac{X_n-\mu_n}{\sigma_n}\leq x\right)\xrightarrow{n\to\infty}\Phi(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, kde Φ je distribuční funkce $N(0,1)$, tedy

$$\frac{X_n-\mu_n}{\sigma_n}\xrightarrow[n\to\infty]{d}N(0,1).$$

Věta

Za platnosti H_0 má testová statistika S_N (případně S_N^{δ}, nebo $S_N^{*\delta}$) asymptoticky normální rozdělení $N(ES_N, DS_N)$ při $n,m\to\infty$.

Věta

Za platnosti H_0 má testová statistika S_N (opět) asymptoticky normální rozdělení $N\left(ES_N, \frac{n\cdot m}{N}\cdot\int_0^1(\varphi(u)-\bar{\varphi})^2\,du\right)$, kde $\bar{\varphi}=\int_0^1\varphi(t)\,dt$.

Příklady

a) Wilcoxonův test $\tilde{S}_N = \sum_{i=m+1}^{N} R_i$

$$c_1 = \dots = c_m = 0 \qquad \overline{c} = \frac{1}{N} \overbrace{\sum_{i=1}^{N} c_i}^{n} = \frac{n}{N}$$

$$c_{m+1} = \dots = c_N = 1 \qquad \sum_{j=1}^{N} a(j) = \sum_{j=1}^{N} j = 1 + 2 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$a(i) = i \qquad \overline{a} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} a(j) = \frac{N+1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (c_i - \overline{c})^2 = m \cdot \left(-\frac{n}{N}\right)^2 + n \cdot \left(1 - \frac{m}{N}\right)^2 = \frac{mn^2}{N^2} + \frac{nm^2}{N^2} = \frac{mn(n+m)}{N^2} = \frac{mn}{N}.$$

$$\sum_{j=1}^{N} (a(j) - \overline{a})^2 = \sum_{j=1}^{N} a^2(j) \overbrace{- 2 \cdot \overline{a} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} a(j)}_{N \cdot \overline{a}} + N \cdot (\overline{a})^2}^{-N(\overline{a})^2} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - N \cdot \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{2N(N+1)(2N+1)}{12} - \frac{3N(N+1)^2}{12} =$$

$$\frac{N(N+1) \cdot (\overbrace{4N + 2 - 3N - 3}^{N-1})}{12} = \frac{N(N^2-1)}{12}.$$

$$E\tilde{S}_N = \frac{1}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}(N+1)}{2} \cdot \frac{n}{\cancel{}} = \frac{n(N+1)}{2}.$$

$$D\tilde{S}_N = \frac{1}{\cancel{N-1}} \cdot \frac{m \cdot n}{\cancel{N}} \cdot \frac{\cancel{N}(\overset{N+1}{\cancel{N^2-1}})}{12} = \frac{mn(N+1)}{12}.$$

Uvažujme nyní původní statistiku $S_N = \sum_{i=m+1}^{N} \varphi\left(\frac{R_i}{N+1}\right)$ pro $\varphi(u) = 2u-1$, pak $S_N = \frac{2}{N+1} \cdot \sum_{i=m+1}^{N} R_i - n = \frac{2}{N+1} \cdot \tilde{S}_N - n$.

$$ES_N = \frac{2}{N+1} E\tilde{S}_N - n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{N+1}} \cdot \frac{n\cancel{(N+1)}}{\cancel{2}} - n = 0.$$

$$DS_N = \frac{4}{(N+1)^2} \cdot D\tilde{S}_N = \frac{4}{(N+1)^2} \cdot \frac{m \cdot n \cdot (N+1)}{12} = \frac{m \cdot n}{3(N+1)}.$$

Podle druhé věty můžeme rozptyl DS_N aproximovat pomocí $\frac{m \cdot n}{N} \cdot \int_0^1 (\varphi(u) - \bar{\varphi})^2 \, du$

$\varphi(u) = 2u - 1$

$\bar{\varphi} = \int_0^1 \varphi(u) \, du = \int_0^1 2u - 1 \, du = 0.$

$\int_0^1 (\varphi(u) - \bar{\varphi})^2 \, du = \int_0^1 (2u-1)^2 = \int_0^1 (4u^2 - 4u + 1) \, du = \left[\frac{4u^3}{3} - 2u^2 + u\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

tedy $DS_N \approx \frac{m \cdot n}{3N}$.

Použití Wilcoxonova testu:

určíme hodnotu testové statistiky $\tilde{Z} = \frac{\tilde{S}_N - E\tilde{S}_N}{\sqrt{D\tilde{S}_N}}$ nebo $Z = \frac{S_N}{\sqrt{DS_N}}$.

je-li $|\tilde{Z}| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ nebo $|Z| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, zamítáme H_0 ve prospěch H_1:

b) van der Waerdenův test

$$S_N = \sum_{i=m+1}^{N} \Phi^{-1}\left(\frac{R_i}{N+1}\right)$$

$$ES_N = \frac{1}{N} \cdot n \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \Phi^{-1}\left(\frac{j}{N+1}\right)}_{=0} = 0, \text{ neboť } \Phi^{-1}\left(\frac{j}{N+1}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{N+1-j}{N+1}\right), \forall j = 1, \dots, N$$

$$DS_N = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{m \cdot n}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} \left[\Phi^{-1}\left(\frac{j}{N+1}\right)\right]^2.$$

Poznámka (aproximace DS_N)

$$\varphi(u) = \Phi^{-1}(u)$$

$$\overline{\varphi} = \int_0^1 \Phi^{-1}(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)\,dx = EX = 0., \text{ kde } X \sim N(0,1)$$

$x = \Phi^{-1}(u)$
$u = \Phi(x)$
$du = \varphi(x)dx$

$$\int_0^1 (\varphi(u) - \overline{\varphi})^2\,du = \int_0^1 \Phi^{-1\,2}(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x)\,dx = EX^2 = 1.$$

Tedy $DS_N \approx \frac{m \cdot n}{N}$.

Poznámka (ARE = asymptotická relativní vydatnost)

– popisuje sílu daného testu ve srovnání s jiným testem

– T_1 a T_2 testy, pak $ARE(T_1 : T_2) = \frac{n_{T_2}}{n_{T_1}}$, kde n_{T_i} je počet pozorování, které potřebujeme k tomu, aby test T_i měl požadovanou sílu.

$$ARE(T_1 : T_2) \in (0, \infty)$$
< 1 „ T_1 je lepší “.
> 1 „ T_2 je lepší “.

ARE(van der Waerdenův test : t-test) $= 1$, je-li $X_1, \dots, X_m$ a $Y_1, \dots, Y_n$ výběr z normálního rozdělení
≥ 1, pro ostatní rozdělení

c) mediánový test

$$S_N = \sum_{i=m+1}^{N} \operatorname{sign}\left(\frac{R_i}{N+1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$ES_N = \frac{1}{N} \cdot n \cdot \overbrace{\sum_{j=1}^{N} \operatorname{sign}\left(\frac{j}{N+1} - \frac{1}{2}\right)}^{= 0} = 0$$

$$DS_N = \frac{1}{N-1} \cdot \frac{m \cdot n}{N} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \left[\operatorname{sign}\left(\frac{j}{N+1} - \frac{1}{2}\right)\right]^2}_{\substack{= N \dots N \text{ sudé} \\ = N-1 \dots N \text{ liché}}} = \begin{cases} \frac{mn}{N-1} \dots N \text{ sudé} \\ \frac{mn}{N} \dots N \text{ liché} \end{cases}$$

Poznámka

$$DS_N \approx \frac{mn}{N} \quad \text{(podle věty)}$$

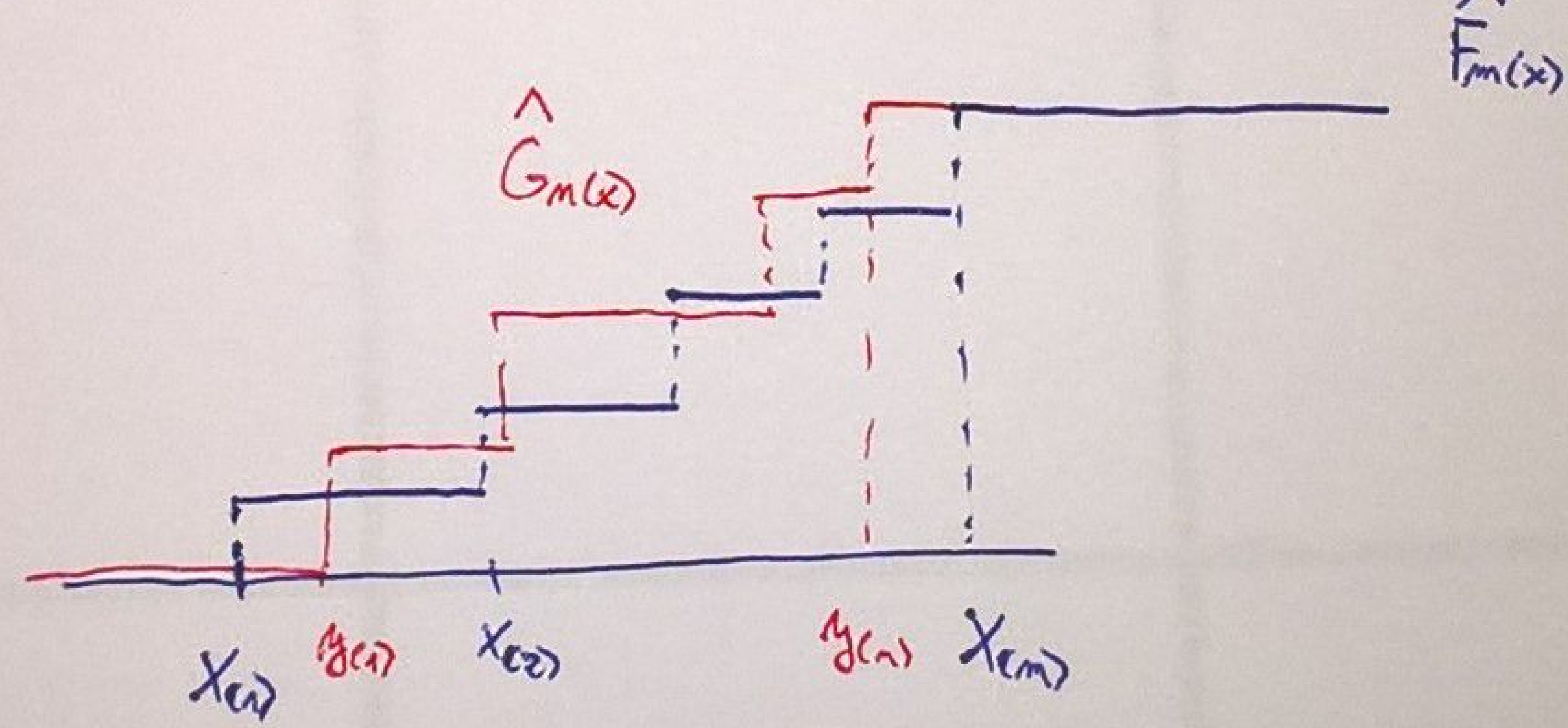
někdy se jako mediánový test označuje test daný funkcí $\varphi(u) = \begin{cases} 0 & \dots \quad 0<u<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \dots \quad u=\frac{1}{2} \\ 1 & \dots \quad \frac{1}{2}<u<1 \end{cases}$

$S_N = \sum_{i=m+1}^{N} \varphi\left(\frac{R_i}{N+1}\right)$ = počet pozorování z výběru $Y_1,\dots,Y_m$, které jsou větší než medián sdruženého výběru $Z_1,\dots,Z_N$ $+\frac{1}{2}$ (je-li N liché)

Testy založené na empirických distribučních funkcích – Kolmogorovův – Smirnovův test

$X_1,\dots,X_m \sim F$
$Y_1,\dots,Y_m \sim G$
vzájemně nezávislé

$H_0: F=G$
$H_1: F\neq G$



$$\hat{F}_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}\{Y_i \le x\}$$

empirické distr. fce

$$\hat{G}_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}\{Y_i \le x\}$$

$$D_{mn} = \max_{x\in\mathbb{R}} \left|\hat{F}_m(x) - \hat{G}_m(x)\right| = \max_{i=1,\dots,N} \left|\hat{F}_m(Z_i) - \hat{G}_m(Z_i)\right|$$ ... pořadová statistika (nelineární)

Věta

Za platnosti H_0 má testová statistika $\sqrt{\frac{mn}{N}} \cdot D_{m,n}$ asymptoticky při $m,n \to \infty$ rozdělení jako $\sup_{t \in [0,1]} |B(t)|$, kde $B(t)$ je Brownův most.

Poznámka

$Y = \sup_{t \in [0,1]} |B(t)|$ má distribuční funkci $F_Y(y) = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} e^{-2j^2y^2}, \; y > 0$

$$\doteq 1 - 2 \cdot e^{-2y^2}, \; y > 0.$$

$(1-\alpha)$-kvantil je přibližně $\sqrt{\frac{1}{2} \log \frac{2}{\alpha}} = 1{,}36$ pro $\alpha = 0{,}05$

Tedy, pokud $\sqrt{\frac{mn}{N}} D_{m,n} > 1{,}36$, zamítáme H_0.