Jednovýběrové testy (o střední hodnotě)

Klasický: jednovýběrový t-test

model: $X_1, \dots, X_n$ náh. výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, μ a σ^2 neznámé parametry

$H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 je známé)

$H_1: \mu \neq \mu_0$ (případně $\mu > \mu_0$, $\mu < \mu_0$)

dá se použít i v případě 2 závislých náhodných výběrů (párový t-test)

$Y_1, \dots, Y_n$ náh. výběr, $Z_1, \dots, Z_n$ náh. výběr } závislé

$EY_i = \mu_1$, $EZ_i = \mu_2$

$H_0: \mu_1 \neq \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$X_i := Z_i - Y_i$ a předpokládáme, že $X_1, \dots, X_n$ je náh. výběr z $N(\mu, \sigma^2)$ a testujeme $H_0: \mu = 0$ proti $H_1: \mu \neq 0$ (použijeme jednovýběrový t-test).

zobecněný model:

$X_1, \dots, X_n$ je náh. výběr ze spojitého rozdělení s distr. fcí F a hustotou f, která je symetrická kolem mediánu Δ.

$H_0: \Delta = \Delta_0$ (Δ_0 známé)

$H_1: \Delta \neq \Delta_0$ (příp. $\Delta > \Delta_0$, $\Delta < \Delta_0$)

Poznámky

- je-li F distr. fce normálního rozdělení (klasický model).
- předpoklad symetrie rozdělení!

Konstrukce pořadových testů

Nejprve opět předpokládejme, že známe distr. fci F, respektive hustotu f. Budeme hledat „optimální" pořadový test.

Poznámka

Pořadí jsou invariantní vůči posunutí (nedokáží rozlišit parametr polohy), proto testová statistika musí být založena na „jiných" pořadích.

Utvoříme rozdíly: $X_1 - \Delta_0, X_2 - \Delta_0, \dots, X_n - \Delta_0$ a uvažujeme jejich absolutní hodnoty $\underbrace{|X_1 - \Delta_0|}_{R_1^+}, \underbrace{|X_2 - \Delta_0|}_{R_2^+}, \dots, \underbrace{|X_n - \Delta_0|}_{R_n^+}$. Určíme jejich pořadí $R_1^+, \dots, R_n^+$

Definujme testovou statistiku $S_n^{+f} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(X_i - \Delta_0) \cdot a_n^+(R_i^+, f)$. Tento test je lokálně nejsilnější pořadový test H_0 proti H_1.

$a_n^+(i, f)$ je funkce pořadí $\{1, 2, \dots, n\}$ závislá na hustotě f (skóry)

$a_n^+(i, f) = E\,\varphi^+(U_{(i)}, f)$, kde $U_{(1)} \le U_{(2)} \le \dots \le U_{(n)}$ je uspořádaný náh. výběr z $Rs(0,1)$ o rozsahu n

$$\varphi^+(u, f) = \varphi\left(\frac{u+1}{2}, f\right), \quad \varphi(u, f) = -\frac{f'(F^{-1}(u))}{f(F^{-1}(u))}, \quad 0 < u < 1$$

Skóry $a_n^+(i, f)$ je často obtížné spočítat přesně, proto se používají tzv. přibližné skóry $\tilde{a}_n^+(i, f) = \varphi^+(E\,U_{(i)}, f) = \varphi^+\left(\frac{i}{n+1}, f\right)$ a přibližná testová statistika

$\tilde{S}_n^{+f} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(X_i - \Delta_0) \cdot \tilde{a}_n^+(R_i^+, f)$. Ta je asymptoticky ekvivalentní s S_n^{+f}.

Příklady

a) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$, $x \in \mathbb{R}$ hustota logistického rozdělení

$$\varphi(u,f) = 2u-1 \quad , \varphi^+(u,f) = \varphi\left(\frac{u+1}{2}, f\right) = u+1-1 = u \quad , \tilde{a}_n^+(i,f) = \varphi^+\left(\frac{i}{n+1}, f\right) = \frac{i}{n+1}$$

$$\tilde{S}_n^{+f} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(X_i - \Delta_0) \cdot \frac{R_i^+}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(X_i - \Delta_0) \cdot R_i^+ \ \dots$$ Wilcoxonův test

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ hustota normálního rozdělení

$$\varphi(u,f) = \Phi^{-1}(u) \quad , \varphi^+(u,f) = \varphi\left(\frac{u+1}{2}, f\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right), \quad \tilde{a}_n^+(i,f) = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{2(n+1)} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\tilde{S}_n^{+f} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(X_i - \Delta_0) \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{R_i^+}{2(n+1)} + \frac{1}{2}\right) \dots$$ van der Waerdenův test

c) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ hustota Laplaceova rozdělení

$$\varphi(u,f) = \operatorname{sign}\left(u - \frac{1}{2}\right) \quad , \varphi^+(u,f) = \varphi\left(\frac{u+1}{2}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{u}{2}\right) = 1, \ 0<u<1 \quad \tilde{a}_n^+(i,f) = 1$$

$$\tilde{S}_n^{+f} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(X_i - \Delta_0) \ \dots$$ znaménkový test

V praxi ale hustotu f neznáme. Zvolíme proto funkci $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ neklesající, nekonstantní a integrovatelnou se čtvercem.

Označme $\varphi^+(u) = \varphi\left(\frac{u+1}{2}\right)$, $a_n^+(i) = \varphi^+\left(\frac{i}{n+1}\right)$ a testovou statistiku $S_n^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}(X_i - \Delta_0)\, a_n^+(R_i^+) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}(X_i - \Delta_0)\, \varphi^+\left(\frac{R_i^+}{n+1}\right)$.

Odvodíme přesné rozdělení testové statistiky za platnosti H_0.

Hodnota S_n^+ závisí na rozdělení znamének $+, -$ u pořadí $1, 2, \dots, n$.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c|c}
1 & + & - & + & + & - & + & + & - \\
2 & + & + & - & + & - & - & + & - \\
3 & + & + & + & + & + & - & + & - \\
 & + & + & + & + & + & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + & \vdots \\
n & + & + & + & - & + & + \cdots & - \; - \; - \; - & - \\
\hline
 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{1} & \multicolumn{3}{c|}{2} & & n
\end{array}$$

celkem $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ možností, jak znaménka rozmístit.

Každá má stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{2^n}$.

Pro každou z nich spočítáme hodnotu S_n^+ $\longrightarrow$ pravděpodobnostní funkce testové statistiky S_n^+.

Pro n velké obtížné spočítat $\longrightarrow$ asymptotická aproximace.

<u>Poznámka</u>

Za platnosti H_0 platí $ES_n^+ = 0$.

$$ES_n^+ = E \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}(X_i - \Delta_0) \cdot a_n^+(R_i^+) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{E\,\mathrm{sign}(X_i - \Delta_0) \cdot a_n^+(R_i^+)}^{\text{vzájemně nezávislé n.v.}} = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{E\,\mathrm{sign}(X_i - \Delta_0)}^{=0} \cdot E a_n^+(R_i^+) = 0.$$

Věta

Za platnosti H_0 má testová statistika S_n^+ (případně $S_n^{+\delta}$, $\tilde{S}_n^{+\delta}$) asymptoticky normální rozdělení $N(0, DS_n^+)$ při $n \to \infty$.

Poznámka

Stejně jako u dvouvýběrových testů můžeme aproximovat $DS_n^+ \approx n \cdot \int_0^1 [\varphi^+(u)]^2 \, du$.

$$DS_n^+ = \sum_{i=1}^{n} [a_n^+(i)]^2.$$

Příklady

a) Wilcoxonův test

$$S_n^+ = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(X_i - \Delta_0) \cdot R_i^+$$

definujme $W^+ = \sum_{i: X_i - \Delta_0 > 0} R_i^+$ a $W^- = \sum_{i: X_i - \Delta_0 < 0} R_i^+$, $W^+ + W^- = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow W^- = \frac{n(n+1)}{2} - W^+$

$$S_n^+ = \frac{1}{n+1}(W^+ - W^-) = \frac{1}{n+1}\left(2W^+ - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{2}{n+1} \cdot W^+ - \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow S_n^+ \approx N\left(0, \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}\right)$$

$$DS_n^+ = \sum_{i=1}^{n} [a_n^+(i)]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n+1}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)^2} = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}.$$

$$\int_0^1 [\varphi^+(u)]^2 du = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}, \text{ tedy } DS_n^+ \approx \frac{n}{3}.$$

b) van der Waerdenův test

$$\left.\begin{aligned} S_n^+ &= \sum_{i=1}^n \operatorname{sign}(X_i - \Delta_0) \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{R_i^+}{2(n+1)} + \frac{1}{2}\right) \\ DS_n^+ &= \sum_{i=1}^n \left[\Phi^{-1}\left(\frac{i}{2(n+1)} + \frac{1}{2}\right)\right]^2 \end{aligned}\right\} S_n^+ \approx N(0, DS_n^+)$$

$$\int_0^1 [\varphi^+(u)]^2 du = \int_0^1 \left[\Phi^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right)\right]^2 du = \int_0^\infty x^2 \cdot 2 \cdot \varphi(x) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \text{ tedy } DS_n^+ \approx n.$$

$x = \Phi^{-1}\left(\frac{u+1}{2}\right)$

$u = 2\Phi(x) - 1$

$du = 2\varphi(x)dx$

c) znaménkový test

$$S_n^+ = \sum_{i=1}^n \operatorname{sign}(X_i - \Delta_0)$$

označme $Y = \sum_{i: X_i - \Delta_0 > 0} 1$ ... počet kladných rozdílů $X_i - \Delta_0$

$$Z = \sum_{i:\, X_i - \Delta_0 < 0} 1 \quad \ldots \text{ počet záporných rozdílů } X_i - \Delta_0$$

$$\left.\begin{array}{l} S_n^+ = Y - Z \\ Y + Z = n \end{array}\right\} \; S_n^+ = 2Y - n$$

Za platnosti H_0 má n.v. Y přesně binomické rozdělení $Bi\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

$$DS_n^+ = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n \quad \text{, tedy } S_n^+ \approx N(0, n).$$

<u>Poznámka</u>

Tento test se dá použít i pro náh. výběry z nesymetrického rozdělení (S_n^+ závisí jen na počtu kladných rozdílů, ne jejich pořadí).