



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY



Geometrická azimutální zobrazení v kartografii

Bakalářská práce

Dana Pohanková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.

Brno 2014

Bibliografický záznam

Autor:	Bc. Dana Pohanková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Geometrická azimutální zobrazení v kartografii
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
Akademický rok:	2013/2014
Počet stran:	46 + 9
Klíčová slova:	azimutální projekce; matematická kartografie; geometrické zobrazení; rovnoběžné promítání

Bibliographic Entry

Author: Bc. Dana Pohanková
Faculty of Science, Masaryk University
Department of Mathematics and Statistics

Title of Thesis: Geometrical azimuthal projections in cartography

Degree Programme: Mathematics

Field of Study: Mathematics with a view to Education

Supervisor: prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.

Academic Year: 2013/2014

Number of Pages: 46 + 9

Keywords: azimuthal projection; mathematical cartography; geometrical projection; parallel projection

Abstrakt

Tato bakalářská práce se věnuje popisu geometrických azimutálních zobrazení, konkrétně ortografické, stereografické a gnómonické projekci, které spadají pod širokou kategorii kartografických zobrazení. V první kapitole jsou uvedeny obecné informace o kartografických zobrazeních a ve druhé už se podrobně zabýváme výše jmenovanými projekcemi, jejich vlastnostmi a způsoby konstrukcí. Získané poznatky jsou poté uplatňovány ve třetí kapitole, která poskytuje čtenáři návody k řešení příkladů uvedených v příloze.

Abstract

This bachelor thesis deals with description of geometric azimuthal projections, particularly orthographic, stereographic and gnomonic ones that are part of wide category of cartographic projections. General information about cartographic projections is presented in the first part and then the projections mentioned above, their characteristics and constructions are described in detail. The reader should be able to use the acquired knowledge in solving the problems presented in the appendix. All of these problems are also solved in the last chapter of this thesis.



Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Dana Pohanková**

Studijní program - obor: **Matematika - Matematika se zaměřením na vzdělávání**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Geometrická azimutální zobrazení v kartografii

Geometrical azimuthal projections in cartography

Oficiální zadání: Student popíše základní geometrická azimutální zobrazení (ortografická, stereometrická a gnómonická projekce) používaná v kartografii a text doplní o řešené úlohy.

Literatura: Doporučená literatura

KRAEMER, Emil. Promítání rovnoběžné. 1. vyd. Praha: SPN, 1991. 460 s.,

PYŠEK, Jiří. Matematická kartografie :třída jednoduchých zobrazení. Vyd. 1. Plzeň: Západočeská univerzita, 1995. 232 s. ISBN 80-7043-165-2.,

SRNKA, Erhart. Matematická kartografie [Srnska, 1986]. 1. vyd. Brno: Vojenská akademie, 1986. 302 s.,

URBAN, Alois. Deskriptivní geometrie. 1 [Urban, 1965]. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. 365 s.

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.

Datum zadání bakalářské práce: říjen 2013

V Brně dne 31.10.2013

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
Ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Souhlasím se zadáním (datum, podpis): 8. 11. 2013

Podpis studenta

Podpis vedoucího

Obsah

Úvod	vii
Kapitola 1. Kartografická zobrazení	1
1.1 Souřadnicové soustavy	2
1.1.1 Zeměpisné souřadnice	2
1.1.2 Kartografické souřadnice	2
1.1.3 Rovinné souřadnice	3
1.2 Klasifikace kartografických zobrazení	3
1.2.1 Klasifikace podle tvaru zobrazovacích rovnic	4
1.2.2 Klasifikace podle druhu zobrazovací roviny	5
1.2.3 Klasifikace podle polohy konstrukční osy	5
1.2.4 Klasifikace podle vlastností zkreslení	5
1.3 Azimutální projekce	6
1.3.1 Gnómonická projekce	7
1.3.2 Stereografická projekce	8
1.3.3 Ortografická projekce	9
Kapitola 2. Geometrická azimutální zobrazení	11
2.1 Základní pojmy	11
2.2 Soustavy souřadnic	12
2.3 Ortografická projekce	14
2.3.1 Rovnoběžné promítání	14
2.3.2 Ortografická projekce v pólové poloze	16
2.3.3 Ortografická projekce v rovníkové poloze	16
2.3.4 Ortografická projekce v obecné poloze	17
2.3.5 Obraz ortodromy v ortografické projekci	18
2.4 Stereografická projekce	19
2.4.1 Středové promítání	20
2.4.2 Kruhá inverze	21
2.4.3 Stereografická projekce v pólové poloze	23
2.4.4 Stereografická projekce v rovníkové poloze	23
2.4.5 Stereografická projekce v obecné poloze	25
2.4.6 Obraz ortodromy ve stereografické projekci	26
2.5 Gnómonická projekce	27

2.5.1 Středové promítání	27
2.5.2 Gnómonická projekce v pólové poloze	28
2.5.3 Gnómonická projekce v rovníkové poloze	29
2.5.4 Gnómonická projekce v obecné poloze	30
Kapitola 3. Řešené příklady	32
Závěr	45
Seznam použité literatury	46

Úvod

Jak už název této práce napovídá, její obsah je zaměřen na popis geometrických azimutálních zobrazení, která jsou používána v kartografii.

První kapitola pojednává obecně o předmětu studia vědecké disciplíny matematická kartografie. Základním problémem, který matematická kartografie řeší, je otázka, jak zobrazit zemský povrch co nejvěrněji s minimálním zkreslením do roviny – tedy na mapu. Řešení tohoto problému nabízí mnoho různých kartografických zobrazení a právě v první kapitole jsou tato zobrazení definována, jsou zde stručně popsány jejich základní vlastnosti a jejich dělení.

Mezi zmíněná zobrazení patří geometrické azimutální projekce, konkrétně gnómonická, stereografická a ortografická, při kterých promítáme povrch koule na její tečnou rovinu. U každé z těchto projekcí jsou posléze ve druhé kapitole popsány její základní vlastnosti a dále je uveden postup pro provádění nejdůležitějších konstrukcí, tedy konstrukcí poledníků, rovnoběžek a geodetických čar. V praxi se využívají různé typy projekcí v závislosti na konkrétních požadavcích. Například ortografická projekce bývá využívána pro zobrazení celého světa ve dvou polokoulích nebo také pro zobrazování nebeských těles, protože nejlépe odpovídá našemu pohledu na ně, zatímco gnómonická projekce je výhodná díky tomu, že zobrazuje geodetické čáry na úsečky. Ve třetí kapitole je celá práce doplněna o řešení několika příkladů, jejichž zadání se nachází v příloze. Uvedené příklady mohou čtenáři posloužit k procvičení daného tématu a také by měly poukázat na některé zajímavé problémy, které matematická kartografie řeší.

Práce není primárně určena jen pro ty, kteří se zabývají deskriptivní geometrií. Proto je zcela záměrně v celém textu patrná snaha vyhnout se složitějším pojmům právě z tohoto oboru. Obsah této práce by měl sloužit kartografům zabývajícím se matematickou kartografií, kteří si chtějí rozšířit znalosti, případně studentům matematických oborů, které toto téma zajímá.

Geometrické nákresy byly vytvořeny v programu GeoGebra, mapy zpracované v prostředí ArcMap programu ArcGIS 10.2 a celá práce byla vysázena ve formátu \LaTeX .

Kapitola 1

Kartografická zobrazení

Teorií kartografických zobrazení se v kartografii zabývá disciplína zvaná matematická kartografie. Matematická kartografie studuje způsoby zobrazení povrchu referenční plochy do roviny a dále se zabývá zkršením rovinného obrazu referenčních ploch [5, strana 15]. V této kapitole jsou uvedeny základní principy tvorby kartografických zobrazení a jejich dělení, jak jsou uváděny v kartografických publikacích. Protože se jedná o kartografické práce, nejsou uvedené definice vždy úplně jednoznačné a i vyjadřování bývá nejasné¹. Celá tato kapitola vychází z poznatků uvedených v těchto publikacích: [5], [2], [6].

Referenční plochy jsou přesně matematicky nebo fyzikálně definované plochy, kterými je nahrazován zemský povrch a na kterých je také definována souřadnicová soustava. Stejně tak v zobrazovací rovině je definována určitá souřadnicová soustava a pomocí zobrazovacích rovnic jsou popsány vztahy mezi referenční plochou a rovinou.

Nejpřesnější referenční plocha používaná u kartografických zobrazení je plocha referenčního elipsoidu, který je přesně matematicky určen kterýmikoli dvěma z následujících parametrů: velikost hlavní poloosy a , excentricita e , druhá excentricita e' nebo zploštění f . Mezi jednotlivými parametry platí vztahy (1.1):

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (1.1a)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad (1.1b)$$

$$f = \frac{a - b}{a}. \quad (1.1c)$$

Parametry jsou voleny tak, aby se elipsoid co nejlépe přimyká k zemskému povrchu v zobrazované části. Dodnes bylo odvozeno několik referenčních elipsoidů, z nichž se můžeme nejčastěji setkat s Besselovým, Krasovkého nebo WGS84 elipsoidem. Rozdíly mezi délkou malé a velké poloosy jsou ve všech případech asi 22,5 km.

Pro mapy malých měřítek, například mapy celých kontinentů nebo přímo mapy světa, je zemský povrch nahrazován referenční kulovou plochou. Poloměr referenční koule je opět volený nejvhodněji pro dané zobrazované území; v případě zobrazování rozsáhlých oblastí nebo celé Země se používá poloměr $R = 6371$ km. Tato hodnota je odvozená z požadavku

¹například zaměňování pojmů kulová plocha a koule

přibližné rovnosti jak objemu, tak povrchu elipsoidu a koule. Naopak v případě zobrazení velice malých území, která na sebe nemusí nijak navazovat a kde je možné zanedbat zakřivení zemského povrchu, se používá jako referenční plocha přímo rovina.

1.1 Souřadnicové soustavy

1.1.1 Zeměpisné souřadnice

Pro lokalizaci bodů na zemském povrchu nebo referenční ploše (elipsoidické, kulové) se používá zeměpisných souřadnic skládajících se ze zeměpisné šířky a délky.

Zeměpisná šířka je definovaná jako úhel, který svírá normála n referenční plochy v lokalizovaném bodě s rovinou zemského rovníku. Na elipsoidu ji označujeme φ a na kouli U . Zeměpisná šířka dosahuje na severní polokouli kladných hodnot od 0° do $+90^\circ$ a na jižní polokouli záporných hodnot od 0° do -90° . Hodnoty na severní a jižní polokouli je možné také psát všechny kladně a rozlišovat mezi nimi označením s. š. (severní šířky) nebo j. š. (jižní šířky).

Zeměpisná délka je dána úhlem, který svírá rovina určená zemskou osou (pomyslná přímka procházející severním a jižním pólem) a lokalizovaným bodem s rovinou určenou zemskou osou procházející zvoleným základním bodem (dnes výhradně Greenwich v Anglii). Na elipsoidu ji označujeme λ a na kouli V . Zeměpisnou délku měříme od zvolené základní roviny k východu a nabývá hodnot od 0° do 360° . Opět ale existuje i další možnost značení, a to hodnotami od 0° do 180° zvlášť na východní a na západní polokouli s označením v. d. (východní délky) a z. d. (západní délky).

Místa na referenční ploše s konstantní zeměpisnou šířkou nazýváme rovnoběžky. Místa se stejnou zeměpisnou délkou se nazývají poledníky (meridiány). Zvláštními případy rovnoběžek jsou rovník pro $\varphi = 0^\circ$, resp. $U = 0^\circ$, a póly pro $\lambda = \pm 90^\circ$, resp. $U = \pm 90^\circ$. Zemské poledníky a rovnoběžky souhrnně nazýváme zeměpisnou sítí.

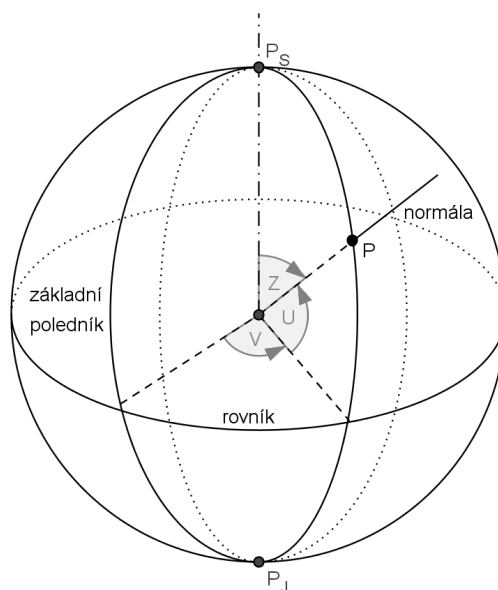
1.1.2 Kartografické souřadnice

Na referenční kouli dále definujeme soustavu kartografických souřadnic, které jsou definovány stejně jako zeměpisné souřadnice, jen jsou vztaženy ke kartografickému pólu K (zvolený bod zeměpisné sítě). Souřadnice jsou potom tvořeny kartografickou šířkou \check{S} a kartografickou délkou D . Kartografické rovnoběžky a kartografické poledníky jsou definovány obdobně jako v zeměpisných souřadnicích. Zeměpisný poledník, který prochází kartografickým pólem, je i kartografickým poledníkem a bývá používán jako základní kartografický poledník. Vztahy mezi zeměpisnými a kartografickými souřadnicemi jsou odvozeny pomocí sférické trigonometrie následovně:

$$\sin \check{S} = \sin U \sin U_k + \cos U \cos U_k \cos(V - V_k), \quad (1.2a)$$

$$\sin D = \frac{\cos U}{\cos \check{S}} \sin(V - V_k). \quad (1.2b)$$

kde U_k a V_k jsou zeměpisné souřadnice kartografického pólu K .



Obrázek 1.1: Zeměpisné souřadnice na referenční kouli

Pro potřeby kartografických zobrazení nahrazujeme občas zeměpisnou nebo kartografickou šířku na referenční kouli zenitovým úhlem Z , pro který platí $Z = 90^\circ - U$, resp. $Z = 90^\circ - \check{S}$.

1.1.3 Rovinné souřadnice

V zobrazovací rovině definujeme dva druhy rovinných souřadnic. Pravoúhlá souřadnicová soustava je klasicky určena počátkem a souřadnicovými osami x a y . V případě azimutálních a kuželových zobrazení se ale v rovině používají spíše polární souřadnice ρ a ε . Počátek této soustavy je volen buď přímo v počátku pravoúhlé soustavy souřadnic, nebo jinde na ose x . V případě totožných počátků pak platí mezi soustavami převodní vztahy (1.3):

$$x = \rho \cos \varepsilon, \quad (1.3a)$$

$$y = \rho \sin \varepsilon. \quad (1.3b)$$

1.2 Klasifikace kartografických zobrazení

Talhofer [6, strana 22] uvádí, že kartografická zobrazení mohou být definována geometrickou nebo matematickou cestou. Definování geometrickou cestou spočívá v matematickém popisu perspektivní projekce referenčních těles na plochy rozvinutelné do roviny a jsou to právě ta zobrazení, na která se tato práce zaměřuje. Zobrazení definovaná matematickou cestou jsou odvozovaná z podmínek zadaných matematickými vztahy (např. podmínky minimalizace některých typů zkreslení). Obecně jsou ale zobrazení v obou kategoriích určena matematickými vztahy, tudíž toto dělení není úplně relevantní.

I u dalšího dělení nejsou vždy jednotlivé třídy zobrazení definovány jednoznačně, protože někdy mohou být některá zobrazení zařazena do více kategorií. Dalšími obecně uznávanými děleními zobrazení jsou dělení podle tvaru zobrazovacích rovnic, dělení podle druhu zobrazovací roviny, dělení podle polohy konstrukční osy a dělení podle vlastností zkreslení.

1.2.1 Klasifikace podle tvaru zobrazovacích rovnic

Tato klasifikace dělí kartografická zobrazení na jednoduchá, nepravá a obecná. U jednoduchých zobrazení je každá z rovinných souřadnic vyjádřena jako funkce jedné proměnné (jedné souřadnice z referenční plochy). K popisu rovnic budeme dále používat zeměpisné souřadnice na kouli U a V , ale rovnice a dělení platí i pro zeměpisné souřadnice na elipsoidu nebo kartografické souřadnice. Jak vypadají zobrazovací rovnice jednoduchých zobrazení, je uvedeno v (1.4).

$$x = f(U) \qquad y = g(V), \qquad (1.4a)$$

$$\rho = f'(U) \qquad \varepsilon = g'(V). \qquad (1.4b)$$

Z tvaru rovnic jednoduchých zobrazení je vidět, že rovnoběžky se vždy zobrazí buď na rovnoběžky s osou y (v případě pravoúhlých souřadnic), nebo na soustředné kružnice o poloměru ρ (u polárních souřadnic). Poledníky se zobrazí na přímky, které jsou rovnoběžné s osou x (v pravoúhlých souřadnicích) nebo vycházejí z jednoho bodu (u polárních souřadnic). Zobrazení zachovávají ortogonálnost zeměpisných rovnoběžek a poledníků. Kartografické projekce bývají někdy řazeny právě mezi jednoduchá zobrazení, protože mají stejný tvar zobrazovacích rovnic [6, strana 23–25].

Nepravá zobrazení mají tvar zobrazovacích rovnic takový, že jedna rovinná souřadnice je funkcí jedné proměnné, ale druhá souřadnice je funkcí obou proměnných, viz (1.5).

$$x = f(U) \qquad y = g(U, V), \qquad (1.5a)$$

$$\rho = f'(U) \qquad \varepsilon = g'(U, V). \qquad (1.5b)$$

Podle tvaru rovnic vidíme, že rovnoběžky se opět zobrazí na přímky nebo kružnice. Poledníky se pak podle konkrétního zobrazení zobrazí na složitější křivky. Tato zobrazení se nejčastěji používají pro mapy celého světa na jednom mapovém listě. Příkladem nepravého sinusoidálního zobrazení (poledníky jsou zobrazeny jako části sinusoid) je zobrazení Eckert IV, které můžete vidět na obrázku 1.2.

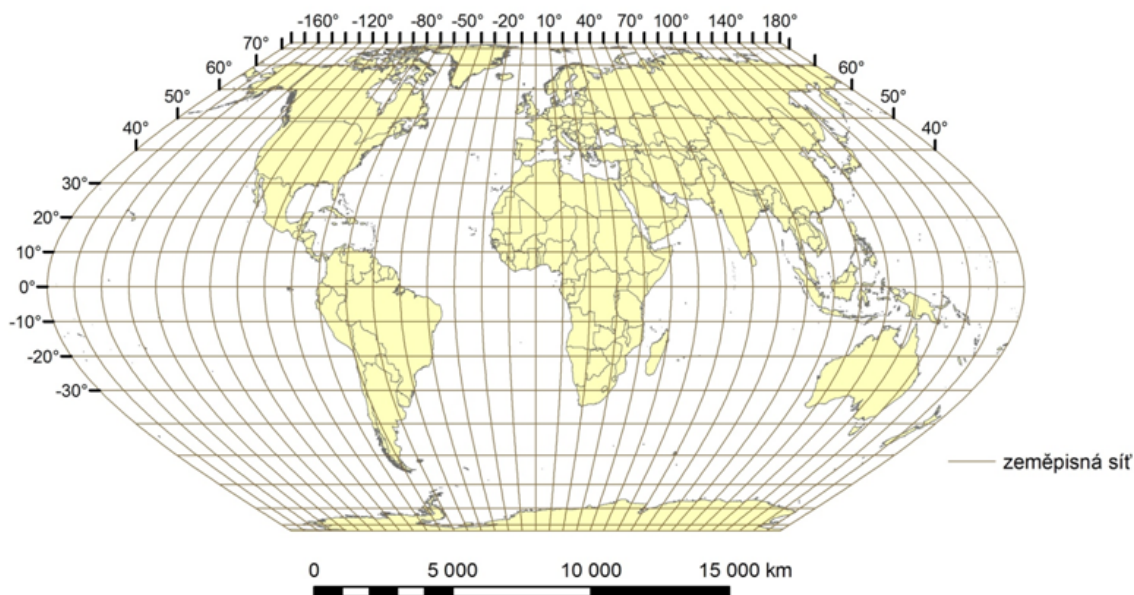
Poslední třídou jsou zobrazení obecná, používaná pro mapy větších měřítek s vyšší požadovanou přesností. Jak je vidět z tvaru zobrazovacích rovnic (1.6), jsou obě souřadnice funkcí obou proměnných, a proto mohou jak poledníky, tak rovnoběžky být zobrazeny na různé křivky. Tato zobrazení se používají například pro různá státní mapová díla (např. zobrazení S–JTSK pro ČR).

$$x = f(U, V) \qquad y = g(U, V), \qquad (1.6a)$$

$$\rho = f(U, V) \qquad \varepsilon = g(U, V). \qquad (1.6b)$$

1.2.2 Klasifikace podle druhu zobrazovací roviny

Podle druhu zobrazovací roviny dělíme kartografická zobrazení také do tří skupin: na válcová, kuželová a azimutální. Toto dělení je založeno na geometrické představě promítání referenční plochy na plochu rozvinutelnou do roviny (válcová nebo kuželová plocha, rovina). Obecně se toto dělení uvádí jen pro jednoduchá zobrazení, i když je používáno i pro nepravá zobrazení, která jsou poté označována jako pseudoválcová, pseudokónická a pseudoazimutální.



Obrázek 1.2: Nepravé sinusoidální zobrazení Eckert IV

1.2.3 Klasifikace podle polohy konstrukční osy

Konstrukční osou kartografického zobrazení rozumíme osu válce, osu kužele nebo normálu k zobrazované rovině. Na základě polohy této osy vzhledem k referenční ploše dělíme zobrazení opět do tří skupin. V pólové (normální) poloze je konstrukční osa totožná s osou zemské rotace, v příčné (rovníkové) poloze leží konstrukční osa v rovině rovníku a v obecné (šikmé) poloze není konstrukční osa ani v jedné výše zmíněné poloze. Při odvozování příčných a obecných zobrazení se zeměpisné souřadnice nahrazují kartografickými.

1.2.4 Klasifikace podle vlastností zkreslení

Při každém kartografickém zobrazení dochází k určitému zkreslení. Rozlišujeme tři druhy zkreslení, ke kterým dochází: délkové zkreslení m , plošné zkreslení m_{pl} a úhlové zkreslení $\Delta\omega$. Definována jsou následovně:

$$m = \frac{dS}{ds}, \quad (1.7a)$$

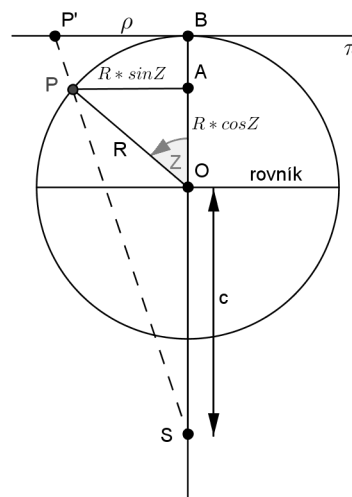
$$m_{pl} = \frac{dP}{dp}, \quad (1.7b)$$

$$\Delta\omega = \omega' - \omega, \quad (1.7c)$$

kde ds je délkový element čáry na referenční ploše,
 dS je odpovídající délkový element po zobrazení do roviny,
 dp je element plochy na referenční ploše,
 dP je odpovídající element plochy po zobrazení do roviny,
 ω je úhel na referenční ploše,
 ω' je odpovídající úhel po zobrazení do roviny.

Podle toho, co je na zobrazené mapě nezkresleno, dělíme zobrazení opět do tří kategorií: ekvidistantní (nezkreslené délky), ekvivalentní (nezkreslené plochy) a konformní (nezkreslené úhly). Co se týká ekvidistantních zobrazení, není možné docílit zobrazení, které by zachovávalo všechny délky, a proto tato zobrazení délkově nezkreslují pouze určitou soustavu čar. Téměř výhradně se jedná o poledníky a rovnoběžky, a proto se ještě zvlášť rozlišuje délkové zkreslení v polednicích m_p a v rovnoběžkách m_r .

1.3 Azimutální projekce



Obrázek 1.3: Princip azimutální projekce

Ze zobrazení definovaných geometrickou cestou mají v kartografii nějaké uplatnění pouze azimutální projekce. Ty vznikají promítáním povrchu referenční koule z pevně zvoleného bodu S na rovinu π kolmou ke spojnici středu promítání se středem koule O . Pokud označíme zobrazovaný bod P a jeho obraz P' , pak z podobnosti trojúhelníků SAP a SBP' na obrázku 1.3 vyplývá rovnost (1.8).

$$\frac{\rho}{R \sin Z} = \frac{c + R}{c + R \cos Z}. \quad (1.8)$$

Z tohoto vztahu lze následně odvodit první zobrazovací rovnici (1.9) pro azimutální projekci:

$$\rho = \frac{R \sin Z (c + R)}{c + R \cos Z}. \quad (1.9)$$

Druhá zobrazovací rovnice (1.10) je stejná pro všechna azimutální zobrazení. Vyplývá z požadavku na konstantní vzdálenosti mezi obrazy poledníků:

$$\varepsilon = V. \quad (1.10)$$

Jednotlivé azimutální projekce se liší volbou konstanty c . Rozlišujeme tři základní typy azimutálních projekcí: gnómonickou, stereografickou a ortografickou. Z definovaných rovnic zkreslení (1.7) jsou vyjádřeny konkrétní rovnice týkající se všech azimutálních zobrazení (včetně projekcí) následovně:

$$m_p = \frac{d\rho}{R dZ}, \quad (1.11a)$$

$$m_r = \frac{\rho}{R \sin Z}, \quad (1.11b)$$

$$m_{pl} = m_r m_p, \quad (1.11c)$$

$$\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p}. \quad (1.11d)$$

1.3.1 Gnómonická projekce

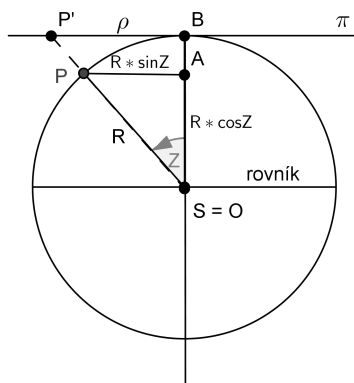
Gnómonická projekce je azimutální projekce, při které promítáme na rovinu π ze středu koule O (viz obrázek 1.4). V tomto případě platí $c = 0$. Při dosazení této hodnoty do zobrazovacích rovnic (1.9), (1.10) získáme zobrazovací rovnice gnómonické azimutální projekce (1.12) a následně také můžeme podle (1.11) spočítat velikost zkreslení (1.13).

Protože spojnice zobrazovaného a zobrazeného bodu prochází vždy středem koule, zobrazují se v gnómonické projekci vždy ortodromy² jako přímky. Protože všechny poledníky a rovník jsou ortodromy, zobrazí se také na přímky.

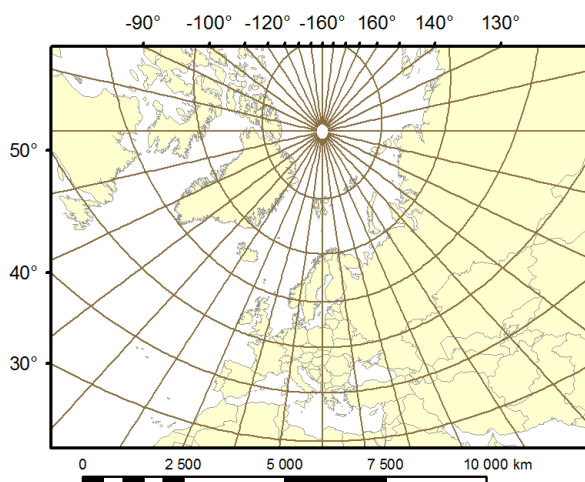
$$\rho = R \operatorname{tg} Z, \quad (1.12a)$$

$$\varepsilon = V. \quad (1.12b)$$

²ortodromy na kouli jsou kružnice vzniklé jako průsečky rovin procházejících jejím středem. Nejkratší spojnice dvou bodů na kulové ploše kopíruje vždy část ortodromy procházející těmito body.



Obrázek 1.4: Princip gnómonické azimutální projekce



Obrázek 1.5: Gnómonická projekce s kartografickým pólem $\varphi = 50^\circ$ a $\lambda = 20^\circ$

$$m_p = \frac{1}{\cos^2 Z}, \quad (1.13a)$$

$$m_r = \frac{1}{\cos Z}, \quad (1.13b)$$

$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^3 Z}, \quad (1.13c)$$

$$\frac{\Delta\omega}{2} = \text{tg}^2 \frac{Z}{2}. \quad (1.13d)$$

$$(1.13e)$$

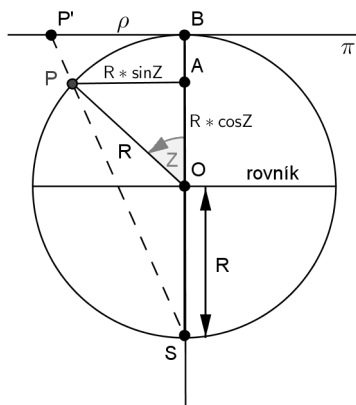
1.3.2 Stereografická projekce

Stejně jako u gnómonické projekce se odvodí zobrazovací rovnice (1.14) a rovnice zkreslení (1.15) i u stereografické projekce (viz obrázek 1.6). V tomto případě leží střed promítání v protilehlém bodu referenční koule. Pro konstantu c tedy platí $c = R$.

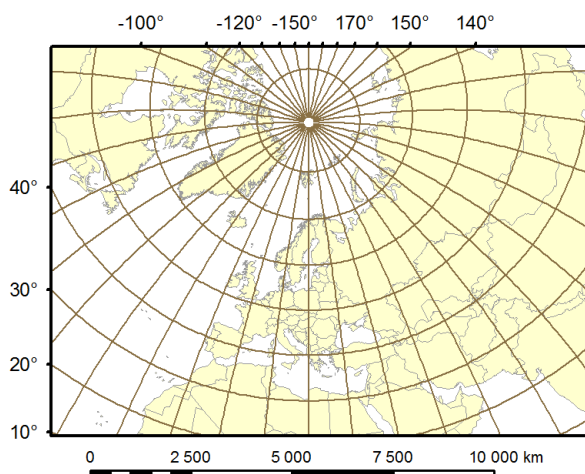
Jak vidíme z (1.15c), ve stereografické projekci nejsou zkresleny úhly, a proto se jedná o konformní zobrazení. V případě azimutálních zobrazení definovaných matematickou cestou dojdeme při podmínce konformity zobrazení ke zcela stejným rovnicím.

$$\rho = 2R \text{tg} \frac{Z}{2}, \quad (1.14a)$$

$$\varepsilon = V. \quad (1.14b)$$



Obrázek 1.6: Princip stereografické azimutální projekce



Obrázek 1.7: Stereografická projekce s kartografickým pólem $\varphi = 50^\circ$ a $\lambda = 20^\circ$

$$m_p = m_r = \frac{1}{\cos^2 \frac{Z}{2}}, \quad (1.15a)$$

$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^4 \frac{Z}{2}}, \quad (1.15b)$$

$$\Delta\omega = 0. \quad (1.15c)$$

1.3.3 Ortografická projekce

V případě ortografické projekce leží střed promítání v nekonečnu a dochází tedy ke kolmému promítání (viz obrázek 1.8). Platí $c = \infty$, z čehož se opět odvodí konkrétní zobrazovací rovnice (1.16) a rovnice zkreslení (1.17).

Z rovnice (1.17b) vyplývá, že se jedná o zobrazení ekvidistantní v rovnoběžkách a opět by se díky této podmínce dalo odvodit i matematickou cestou. I z toho je zřejmé, že u ortografické projekce není možné zobrazit povrch celé koule, ale jen polokoule.

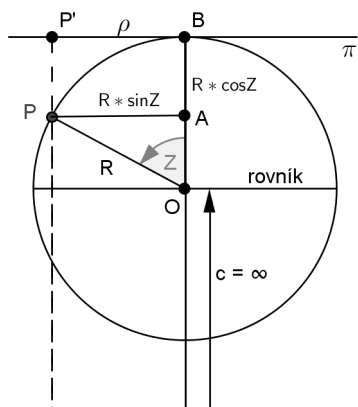
$$\rho = R \sin Z, \quad (1.16a)$$

$$\varepsilon = V. \quad (1.16b)$$

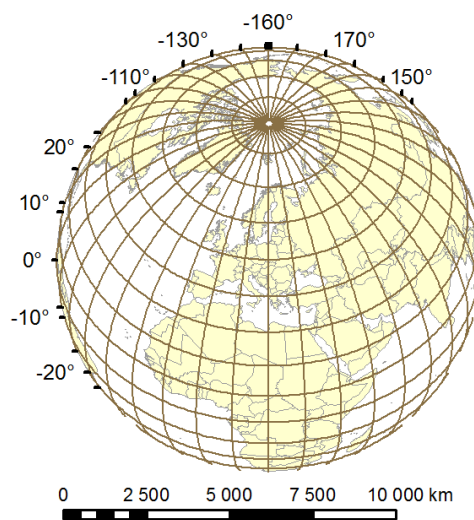
$$m_p = m_{pl} = \cos Z, \quad (1.17a)$$

$$m_r = 1, \quad (1.17b)$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2}. \quad (1.17c)$$



Obrázek 1.8: Princip ortografické azimutální projekce



Obrázek 1.9: Ortografická projekce s kartografickým pólem $\varphi = 50^\circ$ a $\lambda = 20^\circ$

Kapitola 2

Geometrická azimutální zobrazení

V této kapitole se zabýváme třemi speciálními typy zobrazování euklidovského prostoru \mathcal{E}_3 do rozšířené eukleidovské roviny (Möbiovy roviny) \mathcal{M}_2 rozšířené o nevlastní body (kvůli stereografické a gnomonické projekci). Jedná se o kartografické azimutální projekce, které jsou představeny v podkapitole 1.3. Konkrétně jsou to tedy zobrazení kulové plochy do tečné roviny a proto nejdříve začneme vymezením některých důležitých pojmů. Zároveň se ale u čtenáře předpokládá určitá znalost geometrie a zobrazení a proto se nebudeme zabývat základními pojmy jako například kružnice, elipsa nebo samodružné body zobrazení. Při konstrukcích je dále také potřebná znalost základních konstrukcí všech kuželoseček. Při zjišťování poznatků k popisovaným projekcím bylo čerpáno zejména z publikací Zobrazovací metody – promítání rovnoběžné [3] od E. Kraemera, Deskriptivní geometrie [7] od A. Urbana a Deskriptivní geometrie od R. Pisky [4].

2.1 Základní pojmy

Definice 2.1. Kulovou plochou (resp. koulí) rozumíme množinu všech bodů prostoru \mathcal{E}_3 , z nichž každý má od daného bodu S danou vzdálenost $r > 0$ (resp. $v \leq r$; $0 < r \in \mathbb{R}$). Bod S nazýváme **střed** kulové plochy (resp. koule), číslo r **poloměr** a číslo $2r$ **průměr** kulové plochy (resp. koule). Kružnici se středem S a poloměrem r , která vznikne jako průnik kulové plochy a roviny procházející jejím středem S , nazveme **hlavní kružnicí kulové plochy**.

Poznámka 2.1. Označení průměr používáme také pro každou přímku procházející středem S kulové plochy (resp. koule) a pro úsečku procházející středem S , ohraničenou průsečíky s kulovou plochou. Kulová plocha κ je jednoznačně určena středem S a poloměrem r ; zapisujeme $\kappa(S, r)$.

Věta 2.1 ⁽¹⁾. *Nechť $\kappa(S, r)$ je kulová plocha a ρ rovina, která má od středu S vzdálenost v . Potom platí:*

- *Je-li $v > r$, nemá rovina ρ s kulovou plochou κ žádný společný bod.*
- *Je-li $v = r$, mají rovina ρ a kulová plocha κ právě jeden společný bod T .*

¹ tvrzení uvádí například Kraemer v [3, str. 45]

- Je-li $v < r$, mají rovina ρ a kulová plocha κ společnou kružnici, jejíž střed je průsečík roviny ρ s přímkou $k \perp \rho$; $S \in k$.

Poznámka 2.2. Pokud ve třetím případě rovina ρ neprochází středem kulové plochy S , pak vznikne kružnice k o průměru $q < r$. Tuto kružnici nazýváme **vedlejší kružnicí kulové plochy**.

Definice 2.2. Přímkou t , která má s kulovou plochou κ společný jediný bod T , nazýváme **tečnou** této plochy. Rovinu τ , která má s kulovou plochou jediný společný bod T , nazýváme **tečnou rovinou** kulové plochy. Bod T pak nazýváme **bod dotyku** tečny t a kulové plochy, resp. tečné roviny τ a kulové plochy.

Věta 2.2. Nechť T je libovolný bod kulové plochy $\kappa(S, r)$. Potom platí:

- Tečna t plochy κ , která s ní má dotkový bod T , je kolmá k přímce ST
- V bodě T má plocha κ právě jednu tečnou rovinu τ a ta je kolmá k přímce ST . Každá přímka t , která leží v rovině τ a prochází bodem T , je tečnou plochy κ v bodě T a naopak každá tečna t kulové plochy κ s bodem dotyku T leží v tečné rovině τ .

Definice 2.3. Kulovou plochu můžeme také definovat jako plochu vytvořenou otáčením kružnice k okolo jejího průměru o , který poté nazýváme **osou otáčení**. Pokud jeden průmět pevně zvolíme za osu, nazveme jeho průsečíky s kulovou plochou **póly** kulové plochy. Každý další bod $A \in k$ opisuje při otáčení kolem osy o kružnici, kterou nazýváme **rovnoběžková kružnice (rovnoběžka)**. Řezem kulové plochy rovinou procházející osou o je hlavní kružnice, která se nazývá **meridián (poledník)** kulové plochy.

Definice 2.4. Nejkratší spojnici dvou bodů kulové plochy náležející kulové ploše označujeme jako **ortodromu**. Jedná se o kratší část hlavní kružnice určené těmito dvěma body.

Poznámka 2.3. Ortodroma je konkrétnější pojmenování pro tzv. **geodetickou čáru**, která označuje nejkratší spojnici dvou bodů na dané ploše.

2.2 Soustavy souřadnic

Protože se tato práce zabývá zobrazeními používanými v kartografii, představuje kulová plocha, kterou zobrazujeme, zemský povrch a budeme ji označovat **zemská kulová plocha** $\Gamma(O, R)$, kde R je poloměr Země.

Při azimutálních geometrických projekcích potřebujeme zobrazovat body kulové plochy do její tečné roviny. Protože se jedná o zobrazení prostoru do roviny, je možné použít kartézskou soustavu souřadnic, která bude mít střed ve středu kulové plochy. Protože nebudeme zobrazovat všechny body prostoru, ale pouze body kulové plochy Γ , zavedeme pro ně zeměpisné souřadnice φ a λ .

Definice 2.5. Nechť $\Gamma(O, R)$ je zemská kulová plocha a nechť existuje kartézská soustava souřadnic s počátkem v bodě O a $M[x, y, z] \in \Gamma$ je bod. Uspořádanou dvojici čísel

$(\varphi, \lambda); \varphi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ a $\lambda \in (-\pi, \pi)$ splňující podmínky:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \varphi \cos \lambda, \\y &= R \cos \varphi \sin \lambda, \\z &= R \sin \varphi.\end{aligned}\tag{2.1}$$

nazveme **zeměpisné souřadnice** bodu M na kulové ploše $\Gamma(O, R)$. Číslo φ nazveme **zeměpisnou šířkou** a číslo λ **zeměpisnou délkou**.

Poznámka 2.4. V kapitole 1 byly zeměpisné souřadnice na referenční kulové ploše označovány U a V , ale protože v této kapitole pracujeme pouze se souřadnicemi na referenční kouli a vůbec se nezabýváme referenčním elipsoidem, je výhodnější označovat zeměpisné souřadnice φ a λ , protože se jedná o běžně používaná označení pro zeměpisnou šířku a délkou.

Poznámka 2.5. Považujme zemskou kulovou plochu $\Gamma(O, R)$ za rotační plochu, která vznikne rotací kolem osy z . Pak jsou jednotlivé rovnoběžkové kružnice jsou množinami bodů s konstantní zeměpisnou šířkou φ a označují se r_φ . Množiny bodů s konstantní zeměpisnou délkou λ jsou půlkružnice (protože zeměpisná délka je definovaná v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$) jednotlivých poledníků, nazýváme je také poledníky a značí se p_λ . Poledník p_0 nazýváme **základní (nultý) poledník** a rovnoběžku r_0 nazýváme **rovník**. Dále v této práci budeme pojmem poledník vždy myslet pouze půlkružnici, a ne celou kružnici, jak bylo definováno dříve. Osu otáčení této plochy nazýváme **zemskou osou**, póly nazýváme **zemské póly** a rozlišíme je označením na severní pól P_S pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a jižní pól P_J pro $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Intervalové omezení zeměpisné šířky a zeměpisné délky v jejich definici nám zaručuje, že každý poledník a rovnoběžka se protínají právě v jednom bodě, který je jimi jednoznačně určen. Zároveň je možné každý bod kulové plochy zapsat v zeměpisných souřadnicích podle rovnoběžky a poledníku procházejícími tímto bodem. Tento zápis ale nemusí být jednoznačný, protože zemskými póly prochází všechny poledníky.

Poznámka 2.6. Z praktického hlediska je v případě azimutálních projekcí místo zeměpisné šířky někdy používán **zenitový úhel** Z , který definujeme následovně:

$$Z = \frac{\pi}{2} - \varphi\tag{2.2}$$

Poznámka 2.7. Pro body v zobrazovací rovině π můžeme opět zavést kartézskou soustavu souřadnic, a to s počátkem v bodě dotyku $P = P'$. Ve speciálním případě, kdy bodem dotyku prochází kladná poloosa z kartézské soustavy souřadnic kulové plochy je výhodné zvolit osu x v zobrazovací rovině jako kolmý průmět osy x kartézských souřadnic kulové plochy, a stejně postupovat u osy y .

Při azimutálních zobrazeních je ale opět výhodnější pracovat se soustavu polárních souřadnic (ρ, ε) s počátkem v bodě dotyku P roviny π s kulovou plochou Γ . Mezi těmito souřadnicovými soustavami pak platí vztahy (2.3).

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varepsilon, \\y &= \rho \sin \varepsilon.\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.3 Ortografická projekce

Ortografická projekce je definovaná jako zobrazení kulové plochy do roviny a řadí se mezi rovnoběžná kolmá promítání.

Definice 2.6. Nechť $\Gamma(O, R)$ je zemská kulová plocha a π její tečná rovina. Zobrazení $\Gamma \rightarrow \pi$, které každému bodu $A \in \Gamma$ přiřadí jeho kolmý průmět A' na rovinu π , nazýváme **ortografická projekce**.

Poznámka 2.8. V případě, že bodem dotyku zemské kulové plochy a zobrazovací roviny je zemský pól, mluvíme o ortografické projekci v **pólové poloze**. Pokud se zobrazovací rovina dotýká zemské kulové plochy na rovníkové kružnici, mluvíme o ortografické projekci v **rovníkové poloze**. Ve všech ostatních případech řekneme, že se jedná o **obecnou polohu** ortografické projekce.

Poznámka 2.9. V případě, že u pólové polohy ortografické projekce definujeme v zobrazovací rovině soustavu souřadnic podle poznámky 2.7, zobrazí se bod A o prostorových kartézských souřadnicích $[x, y, z]$ v ortografické projekci na bod $A' = [x, y]$. Pokud vyjádříme souřadnice x a y v zeměpisných a polárních souřadnicích podle vztahů (2.1) a (2.3), dostaneme tyto rovnice:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \varphi \cos \lambda = \rho \cos \varepsilon, \\y &= R \cos \varphi \sin \lambda = \rho \sin \varepsilon,\end{aligned}\tag{2.4}$$

z nichž následně úpravami odvodíme zobrazovací rovnice:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \lambda, \\ \rho &= R \cos \varphi = R \sin Z,\end{aligned}\tag{2.5}$$

kteří odpovídají rovnicím (1.16) uvedeným v první kapitole.

Při konstrukci ortografické projekce se zaměříme hlavně na zobrazování poledníků a rovnoběžek, případně dalších hlavních a vedlejších kružnic a jejich částí. Každá kružnice $k \in \Gamma$ určuje rovinu σ , ve které leží, a proto lze takové zobrazovací úlohy převést na úlohy o rovnoběžném kolmém promítání z σ do π . V následující části proto budeme využívat vlastností rovnoběžného kolmého promítání.

2.3.1 Rovnoběžné promítání

Rovnoběžné promítání je jeden z typů obecného promítání, kde je střed promítání nevlastním bodem.

Definice 2.7. Nechť je dán pevný bod S a pevná rovina π ; $S \notin \pi$. Říkáme, že **promítáme** bod A z bodu S do roviny π , jestliže sestrojíme průsečík A' přímky SA s rovinou π . Bod S nazýváme **střed promítání**, rovinu π **průmětna** a průsečík A' **průmět** bodu A .

Definice 2.8. Jestliže je střed promítání nevlastní bod, říkáme, že se jedná o **rovnoběžné promítání** a směr s určený nevlastním středem se nazývá **směr promítání**. V případě, že je tento směr kolmý k průmětně, promítání se nazývá **kolmé** nebo také pravouhlé či ortogonální.

Věta 2.3. *Rovnoběžným průmětem roviny σ , která je různoběžná se směrem promítání, je průmětna π . Rovnoběžným průmětem roviny, která je rovnoběžná se směrem promítání, je přímka.*

Důkaz. Každým bodem B průmětny π můžeme vést přímku p patřící směru promítání, která musí protínat zobrazovanou rovinu σ v nějakém bodě A , protože tato rovina je různoběžná se směrem promítání. Zároveň není možné, aby se některý bod roviny σ zobrazil jinak než do průmětny π . Průmětem roviny je tedy celá průmětna. Je-li rovina σ rovnoběžná se směrem promítání, pak každá promítací přímka p bodu $A \in \sigma$ leží přímo v rovině σ a protíná průmětnu v průsečnici $r = \sigma \cap \pi$. Zároveň každý bod A' přímky r je obrazem všech bodů přímky ($p \ni A$ patřící směru promítání). Průmětem roviny σ je tedy přímka splývající s průsečnicí $r = \sigma \cap \pi$. \square

Věta 2.4. *Budiž σ rovina rovnoběžná s průmětnou π . Potom rovnoběžné promítání roviny σ do průmětny π je shodným zobrazením roviny σ na rovinu π .*

Důkaz. Podle věty 2.3 je průmětem roviny σ průmětna π . Zvolíme si nyní libovolné dva body $A, B \in \sigma$, jejichž rovnoběžné průměty jsou $A', B' \in \pi$. Protože přímka AB je rovnoběžná s průmětnou π a protože jsou rovnoběžné také přímky AA' a BB' , je obrazec $ABB'A'$ rovnoběžníkem, a úsečky AB a $A'B'$ jsou tudíž shodné. Rovnoběžné promítání roviny σ na rovinu π je tedy shodným zobrazením. \square

Poznámka 2.10. Vzhledem k tomu, že poslední dvě uvedené věty platí pro jakékoliv rovnoběžné promítání, budou platit i pro kolmé rovnoběžné promítání. Z věty 2.3 už tedy víme, že ortografickým průmětem roviny kolmé k průmětně je přímka, a proto je obrazem kružnice v této rovině úsečka. Naopak obrazem kružnice v rovině rovnoběžné s průmětnou π je podle věty 2.4 kružnice shodná se zobrazovanou kružnicí. Následují dvě důležité věty. První z nich říká, že kolmým průmětem jakékoliv další kružnice bude elipsa, a z druhé se dozvíme, že průmětem celé kulové plochy bude kruh. Důkazy těchto vět zde nejsou uvedeny, ale najdete je například v [7, str. 134–135].

Věta 2.5. *Pravouhlým průmětem kružnice $k(S, r)$, jejíž rovina σ svírá s průmětnou π kosý úhel α , je elipsa, jejíž střed je průmět S' středu S kružnice k . Hlavní osa této elipsy leží na průmětu přímky, která leží v rovině σ prochází středem S a je rovnoběžná s průsečnicí rovin σ a π . Délka hlavní poloosy je rovna $2r$. Vedlejší osa leží na průmětu přímky roviny σ procházející středem S , kolmé k průsečnici rovin σ a π . Délka vedlejší poloosy je rovna $r \cos \alpha$.*

Věta 2.6. *Pravouhlým průmětem kulové plochy je kruh, jehož středem je průmět středu kulové plochy a jehož poloměr je rovný poloměru kulové plochy.*

Věta 2.7 (Pelzova²). *Při rovnoběžném promítání vyplní ohniska elips, které jsou průměty řezů kulové plochy soustavou rovnoběžných rovin, kružnici soustřednou s obrysem průmětu kulové plochy.*

²jedná se o úpravu obecné Pelzovy věty, jejíž důkaz je uveden například zde: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/109269/CasPestMatFys_036-1907-1_4.pdf

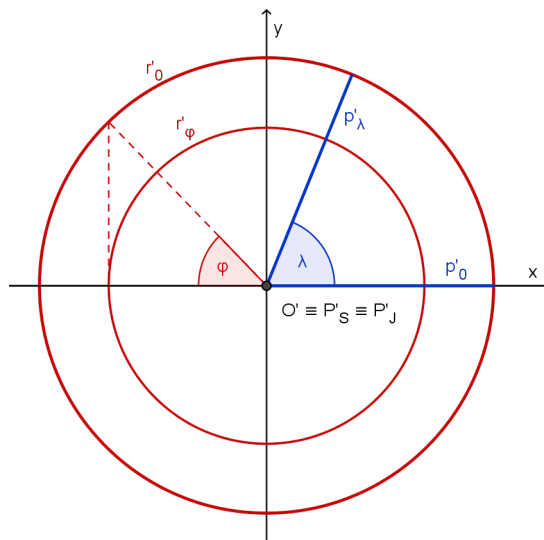
Definice 2.9. Necht' je směr rovnoběžného promítání orientován, a tím je dáno uspořádání bodů na každé přímce příslušící tomuto směru. Je-li na promítací přímce dán jediný bod, říkáme, že je **viditelný**. Jsou-li na stejné promítací přímce dva různé body A, B , pak A je **viditelný** právě tehdy, když je v daném uspořádání před bodem B ; bod B je pak **neviditelný**.

Poznámka 2.11. Vzhledem k tomu, že v ortografické projekci zobrazujeme celou kulovou plochu, dochází k tomu, že ve výsledném obraze jsou většinou zobrazeny dva body na sobě v případech, kdy promítací přímka protne kulovou plochu ve dvou bodech. Právě proto se do výsledné projekce zakreslují pouze viditelné útvary a neviditelné se nezakreslují vůbec nebo se zakreslují tečkovaně. Ve všech případech uvedených v této práci budeme směr promítání orientovat od promítací roviny směrem ke kulové ploše.

Praktický postup zobrazování rovnoběžek a poledníků zemské kulové plochy v ortografické projekci je dobré rozdělit podle toho, v jaké poloze je zobrazovací rovina. Nejjednodušší konstrukce nastává při ortografické projekci v pólové poloze.

2.3.2 Ortografická projekce v pólové poloze

Při ortografické projekci v pólové poloze se podle poznámky 2.10 zobrazí všechny rovnoběžky na shodné kružnice a poledníky se zobrazí na části přímek: úsečky o délce R . Přesná konstrukce poledníků a rovnoběžek je na obrázku 2.1. Poledník p_λ zobrazíme na úsečku vycházející ze středu O' , která svírá s obrazem základního poledníku p_0 úhel λ . Vhodné je zvolit souřadnicový systém tak, aby se základní poledník zobrazil na osu x .

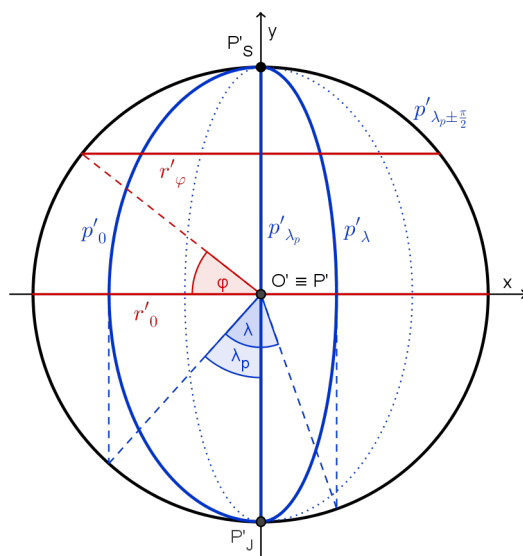


Obrázek 2.1: Ortografická projekce v pólové poloze (červeně je konstrukce rovnoběžek a modře konstrukce poledníků)

2.3.3 Ortografická projekce v rovníkové poloze

V případě ortografické projekce v rovníkové poloze se zobrazovací rovina dotýká kulové plochy v bodě $P(0, \lambda_p)$. Všechny rovnoběžkové kružnice leží v rovnoběžných rovinách

kolmých k průmětně, a proto se podle věty 2.3 zobrazí na rovnoběžné úsečky o délce jejich průměru. Poledníky p_{λ_p} a $p_{\lambda_p+\pi}$ ležící v rovině kolmé k průmětně se zobrazí také na úsečku a poledníky $p_{\lambda_p+\frac{\pi}{2}}$ a $p_{\lambda_p-\frac{\pi}{2}}$ v rovině rovnoběžné s průmětnou se zobrazí na kružnici o poloměru R . Všechny zbývající poledníky leží v rovinách různoběžných s průmětnou a jejich obrazem jsou tedy podle věty 2.5 části (poloviny) elips (viz obrázek 2.2). Všechny elipsy mají střed v bodě O' , hlavní osy všech elips představuje úsečka p'_{λ_p} , vedlejší poloosy leží na úsečce r'_0 a jejich délka je $R \cos(\lambda - \lambda_p)$.



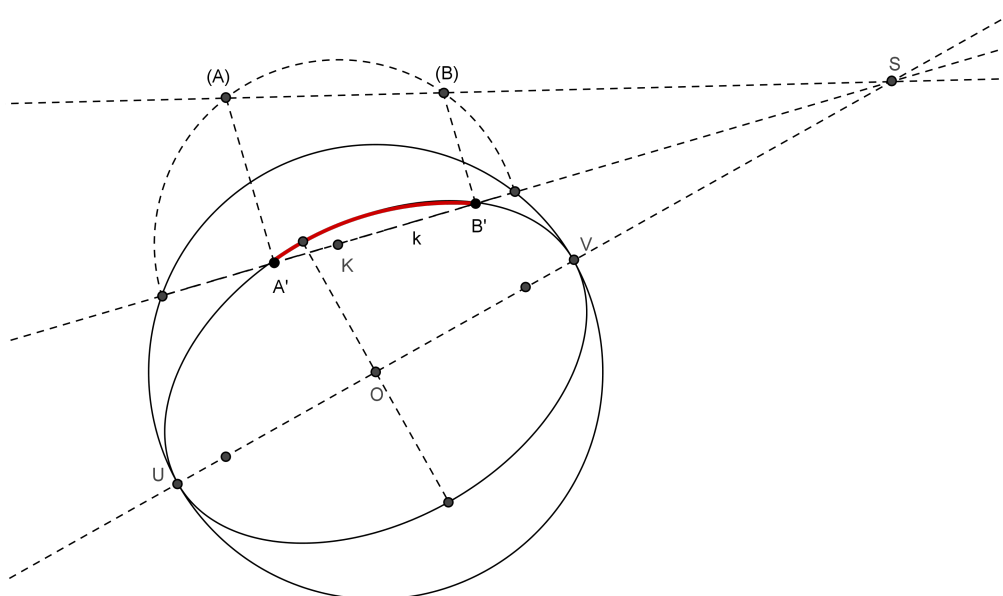
Obrázek 2.2: Ortografická projekce v rovníkové poloze (červeně je konstrukce rovnoběžek a modře konstrukce poledníků)

2.3.4 Ortografická projekce v obecné poloze

Při ortografické projekci v obecné poloze se zobrazovací rovina dotýká kulové plochy v libovolném bodu $P(\varphi_p, \lambda_p)$. Poledníky p_{λ_p} (procházející bodem P) a $p_{\lambda_p+\pi}$ se opět zobrazí na úsečku. Všechny rovnoběžkové kružnice se zobrazí podle věty 2.5 na elipsy, a protože jsou kolmé k rovinám poledníků, budou hlavní osy těchto elips kolmé k přímce dané obrazem poledníku p_{λ_p} .

Rovníkové kružnice se zobrazí na elipsu se středem v bodě S' a hlavní osou o délce R . Vedlejší poloosa rovníku bude mít délku $R \cos Z_p = R \sin \varphi_p$ (jak je znázorněno na obrázku 2.3). Ohnisky E, F této elipsy prochází kružnice $f(O', e)$, na které podle věty 2.7 leží ohniska všech obrazů rovnoběžek. Jejich průsečíky s přímkou určenou obrazem poledníku p_{λ_p} jsou obrazy zemských pólů P_S a P_J . Vedlejší vrcholy obrazu rovnoběžky r_φ najdeme na přímce obsahující p'_{λ_p} , a to díky tomu, že jejich vzdálenosti od bodu O' jsou $\sin(\varphi_p + \varphi)$ a $\sin(\pi + \varphi_p - \varphi)$ (jak je vidět z obrázku 2.3). Vedlejšími vrcholy a ohnisky ležícími na kružnici f už je elipsa r'_φ jednoznačně určena.

Poledníky se zobrazí na části elips se středem v bodě O' . Každý poledník prochází body P_S a P_J . Když máme obraz rovníku a poledníku p_{λ_p} , můžeme snadno promítnout průsečík R_0 nultého poledníku s rovníkem podle úhlu λ_p (znázorněno na obrázku 2.4). Podle



Obrázek 2.5: Sestrojení obrazu ortodromy v ortografické projekci

rovnice:

$$\rho \cos \varepsilon = \frac{2R^2 \cos \varphi \cos \lambda}{R + R \sin \varphi}, \quad (2.7)$$

$$\rho \sin \varepsilon = \frac{2R^2 \cos \varphi \sin \lambda}{R + R \sin \varphi}, \quad (2.8)$$

ze kterých úpravami odvodíme rovnice:

$$\varepsilon = \lambda, \quad (2.9)$$

$$\rho = 2R \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad (2.10)$$

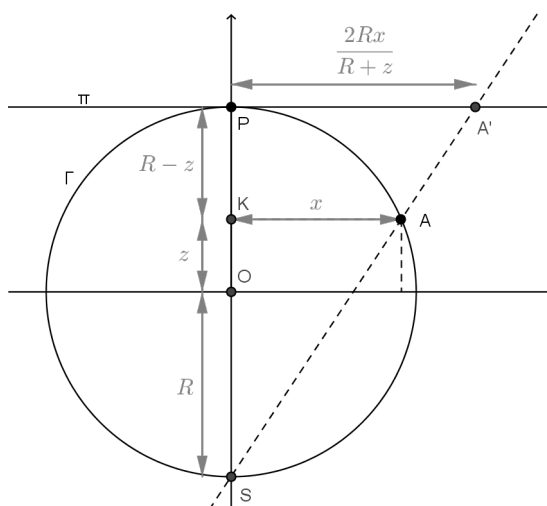
které po úpravě s použitím vzorců pro goniometrické funkce s polovičním argumentem můžeme upravit na tvar uvedený v první kapitole (1.14).

Poznámka 2.14. Stereografická projekce bývá někdy definovaná i jako projekce na rovinu procházející středem kulové plochy (rovnoběžnou s původně zadanou průmětnou).

2.4.1 Středové promítání

Stereografická i gnómonická projekce jsou zvláštními případy středového promítání, proto je dobré uvést několik vlastností tohoto způsobu promítání; některé se týkají pouze stereografické projekce.

Definice 2.11. Jestliže je u promítání střed S promítání vlastní bod, promítání se nazývá **středové promítání**. Průmět bodu při středovém promítání se nazývá **středový průmět**. Rovinu procházející středem promítání, která je rovnoběžná s průmětnou, nazýváme **středovou rovinou**.



Obrázek 2.6: souřadnicové vyjádření stereografické projekce

Věta 2.8. *Středovým průmětem roviny σ procházející středem promítání S , která je různoběžná s průmětnou π , je přímka.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definice středového promítání. □

Věta 2.9 ⁽⁴⁾. *Středovým průmětem bodu středové roviny je nevlastní bod, středovým průmětem každého jiného bodu je vlastní bod.*

Poznámka 2.15. Z věty 2.9 je zřejmé, že při stereografické projekci, kdy promítáme pouze body kulové plochy, je střed promítání S jediným bodem, který se zobrazí na bod nevlastní.

Věta 2.10. *Středovým průmětem kružnice ležící v rovině $\sigma \parallel \pi; S \notin \sigma$, jejíž střed leží na přímce SS' , je opět kružnice.*

Důkaz. Tvrzení přímo vyplývá z definice středového promítání. □

Věta 2.11. *Stereografickým průmětem kružnice $k \subset \Gamma(O, R)$ je opět kružnice, jejímž středem je středový průmět vrcholu tečného kuželu kulové plochy dotýkajícího se této plochy právě v kružnici k .*

Věta 2.12. *Stereografická projekce zachovává velikosti úhlů.*

Poznámka 2.16. Důkazy posledních dvou vět jsou uvedeny například v [4, str. 411-413].

2.4.2 Kruhová inverze

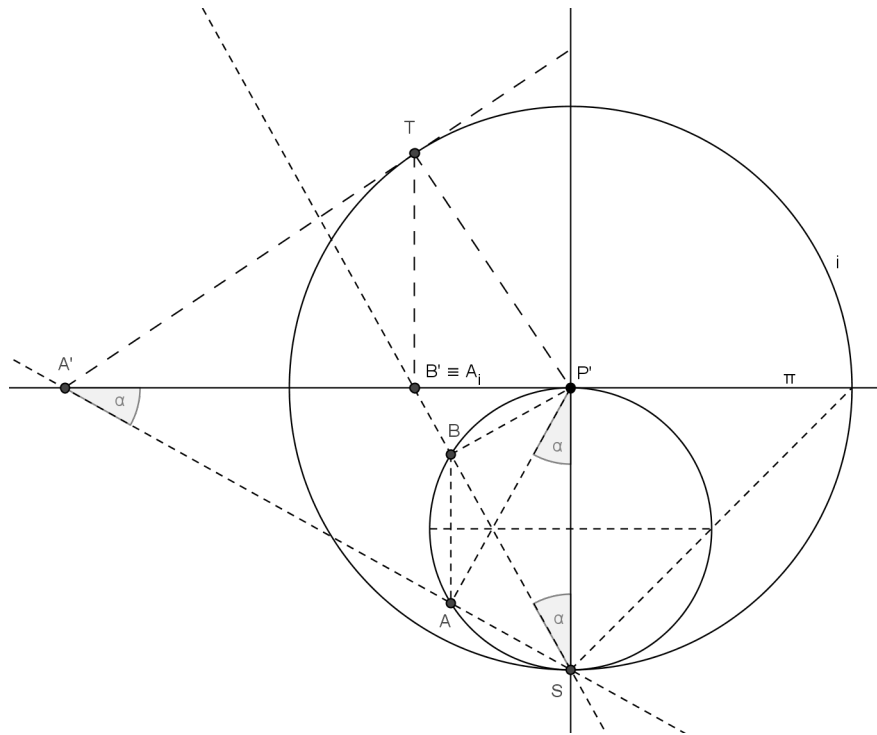
Poznámka 2.17. Při promítání stereografickou projekcí dochází u bodů souměrných podle roviny ω (rovina procházející středem kulové plochy O a rovnoběžná s průmětnou π) k zobrazení nazývanému kruhová inverze vzhledem k obrazu kružnice i , která je průnikem kulové plochy Γ s rovinou ω . Následující část se bude zabývat tímto vztahem.

⁴tvrzení uvádí například Urban v [7, str. 76]

Definice 2.12. Nechť je dána kružnice $i(S, r)$. Uvažujme zobrazení $Inv(i)$ v Möbiově rovině M_2 , které je určeno následovně:

- obrazem bodu S je nevlastní bod,
- obrazem nevlastního bodu je bod S ,
- obrazem vlastního bodu $X \neq S$ je bod X' takový, že leží na polopřímce SX a současně platí: $|SX'| \cdot |SX| = r^2$.

Takto definované zobrazení nazýváme **kruhová inverze**.



Obrázek 2.7: Vztah mezi stereografickou projekcí a kruhovou inverzí

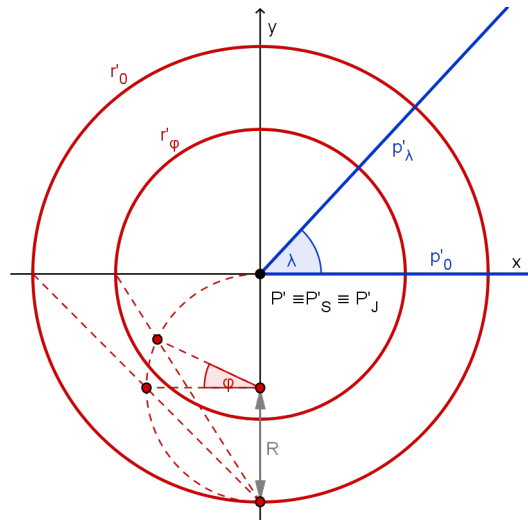
Věta 2.13. Nechť $\Gamma(O, R)$ je zemská kulová plocha, π je promítací rovina a body $A, B \in \Gamma$, jejichž stereografické průměty jsou body A' a B' , jsou body souměrné podle roviny ω , která prochází středem kulové plochy O a je rovnoběžná s průmětnou π . Pak je obrazem bodu A' v kruhové inverzi $Inv(i')$ podle kružnice i' takové, že $i \in \Gamma \cap \omega$, bod B' .

Důkaz. Jak stereografický průmět bodu B , tak obraz bodu A' v kruhové inverzi leží na polopřímce $P'A'$. Stereografický průmět bodu B jsme označili B' a obraz bodu A' v určené kruhové inverzi označme A_i . Stačí tedy dokázat, že platí rovnost $|B'P'| = |A_iP'|$ (viz obrázek 2.7).

Přímo z definice kruhové inverze plyne: $|A_iP'| = \frac{R^2}{|A'P'|}$. Trojúhelníky $A'P'S$ a $SP'B'$ jsou podobné, protože oba jsou pravouhlé a $\alpha = |\angle SA'P'| = 90^\circ - |\angle P'SA'| = 90^\circ - |\angle BP'S| = |\angle P'SB'|$ ($\angle SBP'$ je pravý úhel jakožto úhel nad průměrem SP' Thaletovy kružnice). Z podobnosti těchto trojúhelníků plyne, že $\frac{|SP'|}{|A'P'|} = \frac{|B'P'|}{|SP'|} \Rightarrow |B'P'| = \frac{|SP'| \cdot |SP'|}{|A'P'|} = \frac{R^2}{|A'P'|}$. Čímž jsme dokázali, že $|B'P'| = |A_iP'|$. \square

Poznámka 2.18. V případě používání stereografické projekce je tedy možné využívat vlastností kruhové inverze. Obdobný vztah jako výše popsany platí i v obecnější podobě, a proto se dá aplikovat také na stereografickou projekci zmíněnou v poznámce 2.14.

2.4.3 Stereografická projekce v pólové poloze



Obrázek 2.8: Stereografická projekce v pólové poloze (červeně je konstrukce rovnoběžek a modře konstrukce poledníků)

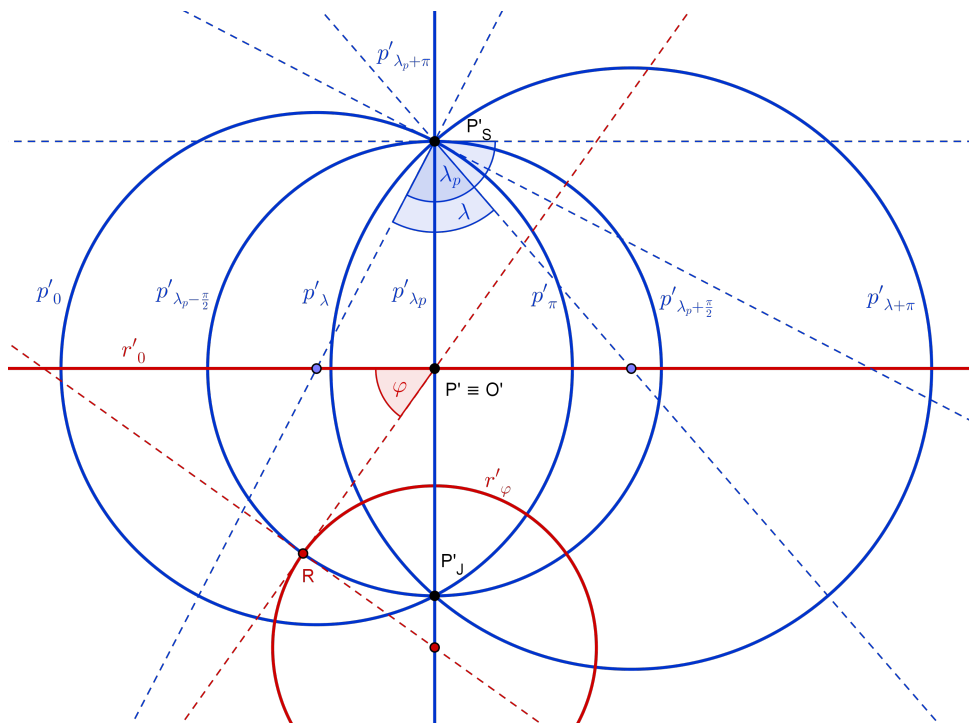
V případě pólové polohy je bod dotyku zobrazovací roviny π jedním z pólů kulové plochy a díky tomu je střed promítání S v protilehlém pólu. Středem promítání proto prochází všechny poledníky a v důsledku věty 2.8 se zobrazí na polopřímky vycházející z bodu P' . Obraz poledníku p_λ svírá s polopřímkou p'_0 úhel λ .

Všechny rovnoběžky leží v rovinách rovnoběžných s průmětnou a jejich obrazy budou soustředné kružnice se středem v bodě P' , jejichž průměry zjistíme díky pomocné kružnici o poloměru R sklopením roviny základního poledníku do průmětny (jak je vidět na obrázku 2.8). Rovňková kružnice se v této projekci zobrazí na kružnici o poloměru $2R$. Pokud je středem promítání jižní pól, pak se všechny rovnoběžky z jižní polokoule zobrazí na kružnice s větším poloměrem než $2R$ a naopak rovnoběžky ze severní polokoule se zobrazí na kružnice s poloměrem menším než $2R$.

2.4.4 Stereografická projekce v rovníkové poloze

V případě stereografické projekce v rovníkové poloze, kde je bodem dotyku bod $P(0, \lambda_p)$, prochází středem promítání poledník p_{λ_p} , $p_{\lambda_p+\pi}$ a rovník r_0 , které se zobrazí na kolmé přímky procházející bodem P' . Na části kružnice se středem v bodě P' a poloměrem $2R$ se tentokrát zobrazí poledníky $p_{\lambda_p+\frac{\pi}{2}}$ a $p_{\lambda_p-\frac{\pi}{2}}$. Obrazy dalších poledníků budou půlkružnice a obrazy rovnoběžek budou kružnice (podle věty 2.11).

Obrazy poledníků budou procházet obrazy pólů P'_S a P'_J , a proto středy kružnic, jichž budou součástí, musí ležet na ose úsečky $P_S P_J$, tedy na přímce r'_0 . Podle věty 2.12 musí



Obrázek 2.9: stereografická projekce v rovníkové poloze (červeně je konstrukce rovnoběžek a modře konstrukce poledníků)

obraz základního poledníku p_0 s obrazem poledníku p_{λ_p} svírat v bodech P'_S a P'_J úhel λ_p . Tento úhel tedy budou v daných bodech svírat také jejich normály; průsečík normály kružnice p'_0 s přímkou r'_0 je tedy střed hledané kružnice p'_0 . Každý další poledník p_λ najdeme stejným způsobem díky skutečnosti, že jeho tečna v bodě P'_S bude s tečnou p'_0 svírat úhel λ .

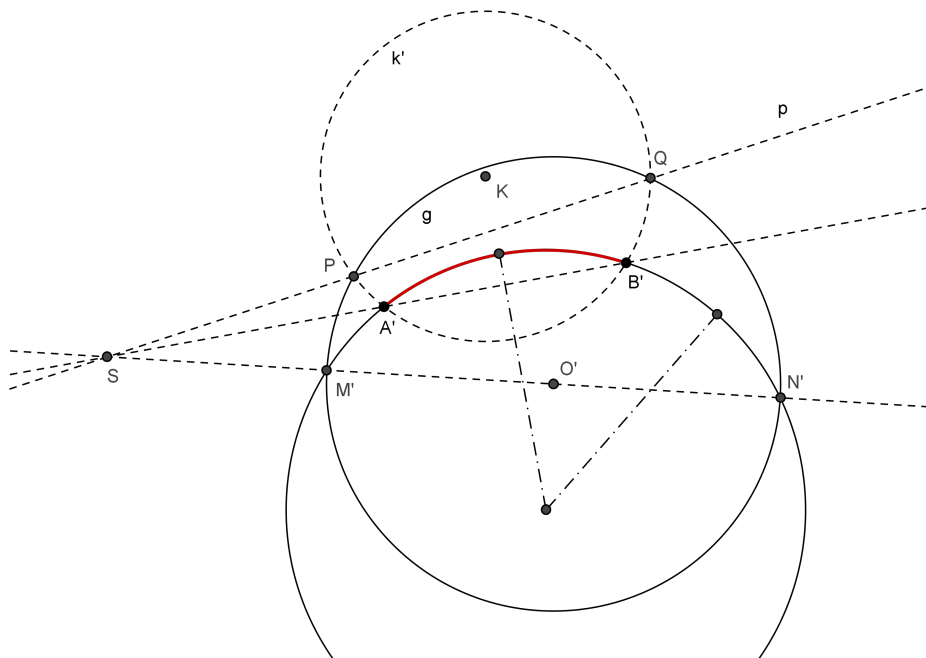
Rovníkové kružnice mají střed na přímce $S_P S_J$, proto jejich obrazy budou mít také střed na přímce $S' P S' J$. Dalším bodem rovnoběžky r_φ , který můžeme najít, je bod R , ve kterém tato rovnoběžka protíná poledník $p_{\lambda_p + \frac{\pi}{2}}$ nebo $p_{\lambda_p - \frac{\pi}{2}}$. Protože $R \in r_\varphi$, spojnice $R' P'$ svírá s přímkou r'_0 úhel φ a zároveň musí být tečnou kružnice r'_φ v bodě R' , protože všechny rovnoběžky a poledníky jsou na sebe kolmé. Střed tedy opět najdeme jako průsečík normály k přímce $R' P'$ v bodě R' s přímkou $P'_S P'_J$.

nebo kterékoliv další rovnoběžky s poledníky p_{λ_p} a $p_{\lambda_p+\pi}$. Díky tomu, že máme tyto dva promítnuté body rovnoběžky, už lehce najdeme její střed, který leží na přímce $P'_S P'_J$. Při stereografickém promítání v obecné poloze postupujeme celkově velice podobně jako při promítání v rovníkové poloze.

2.4.6 Obraz ortodromy ve stereografické projekci

Ve stereografické projekci se hlavní kružnice zobrazí na kružnice, a proto i obraz ortodromy mezi body A a B bude částí kružnice h' , která prochází body A' a B' . Řešíme tedy úlohu, kdy máme zadané body A' , B' a kružnici g , která vznikne jako průmět průniku kulové plochy a roviny ω (rovina rovnoběžná s průmětnou obsahující střed kulové plochy O) a hledáme obraz ortodromy mezi zadanými body.

Uvažujme libovolnou kružnici k' procházející body A' a B' , která je obrazem kružnice $k \ni A, B$, přičemž rovina $\sigma \supset k$ protíná průmětnu v průsečnici p určené průsečíky P, Q kružnic k' a g (obě kružnice leží v průmětně). Přímka $A'B'$ protíná průsečnici p v bodě S , kterým musí procházet i přímka AB . V rovině hlavní kružnice h obsahující body A a B leží celá přímka AB , a tedy i bod S . Hlavní kružnice h také musí protínat vzor kružnice g v protilehlých bodech M, N , a proto bude její obraz procházet obrazy těchto bodů. Tyto body najdeme jako průsečíky přímky SO' s kružnicí g . Tím dostáváme obraz hlavní kružnice h procházející body A', B', M' a N' , přičemž obraz ortodromy leží na kratší části této kružnice mezi body A' a B' (viz obrázek 2.11).



Obrázek 2.11: Sestrojení obrazu ortodromy ve stereografické projekci

2.5 Gnómonická projekce

Definice 2.13. Nechť $\Gamma(O, R)$ je zemská kulová plocha a π její tečná rovina s bodem dotyku P . Zobrazení $\Gamma \rightarrow \pi$, které každému bodu $A \in \Gamma$ přiřadí bod $A' \in \pi$ tak, že A' je průsečík přímky OA s rovinou π , se nazývá **gnómonická projekce**.

Poznámka 2.19. Gnómonickou projekci opět rozlišujeme podle polohy zobrazovací roviny na projekci v pólové, rovníkové a obecné poloze, obdobně jako ortografickou projekci podle poznámky 2.8.

Poznámka 2.20. Je dobré si uvědomit, že v gnómonické projekci se stejně jako v ortografické projekci zobrazují vždy dva body kulové plochy na jeden bod. Jedná se o protilehlé body, tedy ty, které jsou středově souměrné podle středu kulové plochy O , a proto leží na stejné promítací přímce. Z toho také vyplývá, že každý poledník p_λ se zobrazí na stejný útvar jako poledník $p_{\lambda+\pi}$ a každá rovnoběžka r_φ se zobrazí na stejný útvar jako rovnoběžka $r_{-\varphi}$.

Poznámka 2.21. Souřadnicové vyjádření gnómonické projekce v pólové poloze se odvozuje velice podobně jako v případě stereografické projekce. Jak je vidět na obrázku 2.12, z podobnosti trojúhelníků OKA a OPA' vyplývá, že pro souřadnici x' bodu A' na zobrazovací rovině platí:

$$x' = \frac{Rx}{z}. \quad (2.11)$$

Obměnou opět získáme podobný vztah i pro souřadnici y' . Po dosazení z vztahů (2.1) za souřadnice x, y, z a z vztahů (2.3) za souřadnice x, y , dostaneme tyto rovnice:

$$\rho \cos \varepsilon = \frac{R^2 \cos \varphi \cos \lambda}{R \sin \varphi}, \quad (2.12)$$

$$\rho \sin \varepsilon = \frac{R^2 \cos \varphi \sin \lambda}{R \sin \varphi}, \quad (2.13)$$

ze kterých úpravami odvodíme rovnice:

$$\varepsilon = \lambda \quad (2.14)$$

$$\rho = R \cotg \varphi = R \operatorname{tg} Z, \quad (2.15)$$

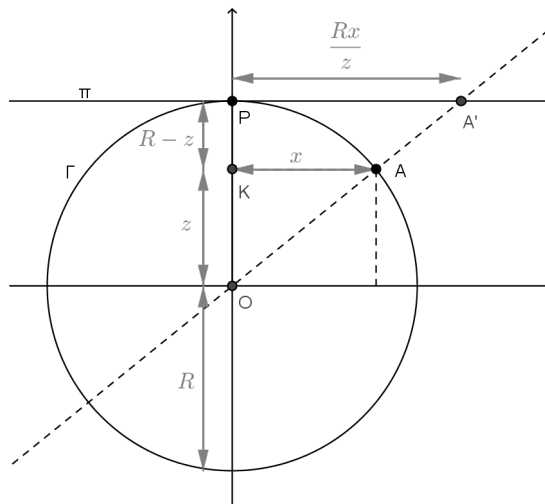
které už odpovídají vzorcům uvedeným v první kapitole (1.12).

2.5.1 Středové promítání

Stejně jako stereografická projekce se i gnómonická projekce řadí do středových promítání, a proto pro ni platí obecné věty uvedené už v části 2.4.1.

Věta 2.14. *Všechny hlavní kružnice kulové plochy se v gnómonické projekci zobrazí na přímky.*

Důkaz. Středem každé hlavní kružnice je střed kulové plochy, rovina kružnice tedy prochází středem promítání a z věty 2.8 vyplývá, že se zobrazí na přímku. \square



Obrázek 2.12: Souřadnicové vyjádření gnómonické projekce

Poznámka 2.22. V předchozí větě je pro nás důležitý poznatek, že v gnómonické projekci se na přímku zobrazí všechny poledníky i rovník. Každý poledník se zobrazí vždy na stejnou přímku jako poledník, který ho doplňuje do kružnice (podle poznámky 2.20), ale při jejich sestrojování je potřeba vědět, že jen jedna polopřímka vycházející z obrazu pólů $P'_S = P'_J$ je viditelná.

Zároveň ortodromy, které jsou částmi hlavních kružnic, se zobrazí na části přímek, čehož se u této projekce často využívá, protože při ní lze jednoduše sestrojit nejkratší spojnice dvou bodů.

Poznámka 2.23. V případě gnómonické projekce je průnikem středové roviny s kulovou plochou hlavní kružnice (v pólové poloze přímo rovník), jejíž všechny body se podle věty 2.9 zobrazí na nevlastní body.

Věta 2.15. *Gnómonickým průmětem kružnice, která neleží ve středové rovině, je:*

- *elipsa, pokud nemá se středovou rovinou žádný společný bod,*
- *hyperbola, pokud má se středovou rovinou dva společné body, nebo*
- *parabola, pokud má se středovou rovinou jeden společný bod.*

Důkaz této věty opět uvádět nebudeme, ale jedná se o úpravu tvrzení uvedeného v textu [4, str. 299–300] pomocí poznatků z [4, str. 419–420].

2.5.2 Gnómonická projekce v pólové poloze

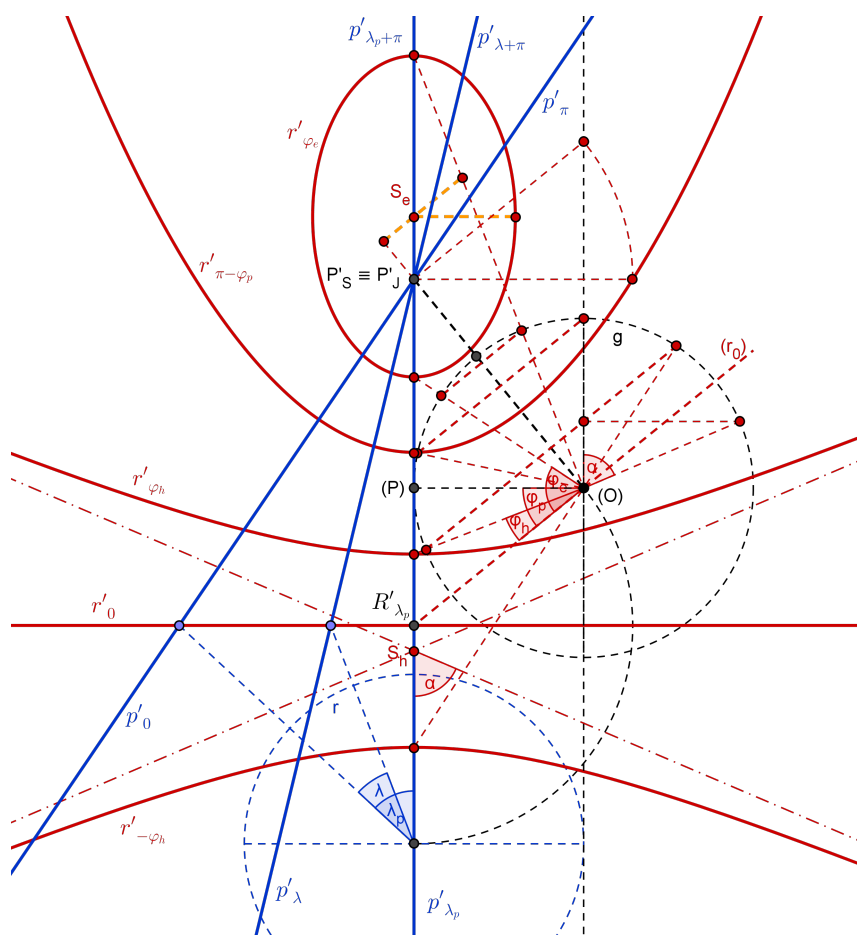
Poledníky se v gnómonické projekci vždy zobrazí na přímky a v případě pólové polohy jsou všechny roviny poledníků kolmé k zobrazovací rovině, a proto mezi nimi zůstanou zachovány úhly. Všechny poledníky budou procházet obrazy zemských pólů, které splynou s obrazem středu promítání O' .

Protože rovnoběžky jsou kružnice ležící v rovinách rovnoběžných s průmětnou se středy na přímce OP , zobrazí se podle věty 2.10 opět na kružnice se středem v bodě $O' = P'$.

kolmé k zemské ose, která obsahuje střed elipsy (délka vedlejší poloosy je na obrázku 2.15 zobrazena čárkovaně oranžovou barvou). Na základě zjištěné délky vedlejších poloos najdeme polohu zbývajících vrcholů a elipsa r'_{φ_e} je jednoznačně určena.

Rovnoběžky $p_{\pm\frac{\pi}{2}-\varphi_p}$ mají se středovou rovinou společný jediný bod, který se zobrazí na nevlastní bod, a obě rovnoběžky se pak zobrazí na shodnou parabolu. Její vrchol sestrojíme stejně jako vrcholy elips (viz výše). Další bod paraboly najdeme například jako průmět průsečíku zobrazované rovnoběžky s poledníkem $p_{\frac{\pi}{2}+\varphi_p}$. Protože už známe osu, vrchol a bod ležící na parabole, můžeme ji sestrojit tzv. příčkovou konstrukcí paraboly⁵.

Zbývající rovnoběžky, tedy ty, které jsou určeny zeměpisnou šířkou $|\varphi_h| < \frac{\pi}{2} - \varphi_p$, se zobrazí na hyperboly. Jejich vrcholy a středy sestrojíme stejně jako vrcholy a středy elips a parabol výše. Průsečíky rovnoběžky r_{φ_h} se středovou rovinou se zobrazí na nevlastní body a určují tedy směr asymptot. Protože tyto směry svírají s poledníkem p_{λ_p} úhel α (viz obrázek 2.15), budou tento úhel svírat i asymptoty s přímkou p'_{λ_p} . S narysovanými asymptotami a vrcholy už je možné hledanou hyperbolu r'_{φ_h} sestrojit.



Obrázek 2.15: Gnómonická projekce v obecné poloze (červeně je konstrukce rovnoběžek a modře konstrukce poledníků)

⁵postup při příčkové konstrukci paraboly je uveden například zde: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/vera.setmanukova.dp/?page=konstrukceP&pkonstrukce=1>

Kapitola 3

Řešené příklady

Poznatky ohledně geometrických azimutálních projekcí uvedené v kapitole 2 by nyní měl čtenář být schopný využít k řešení několika příkladů uvedených v příloze této práce. Práce však neobsahuje jen zadání příkladů, ale v této kapitole jsou uvedena i jejich jednotlivá řešení.

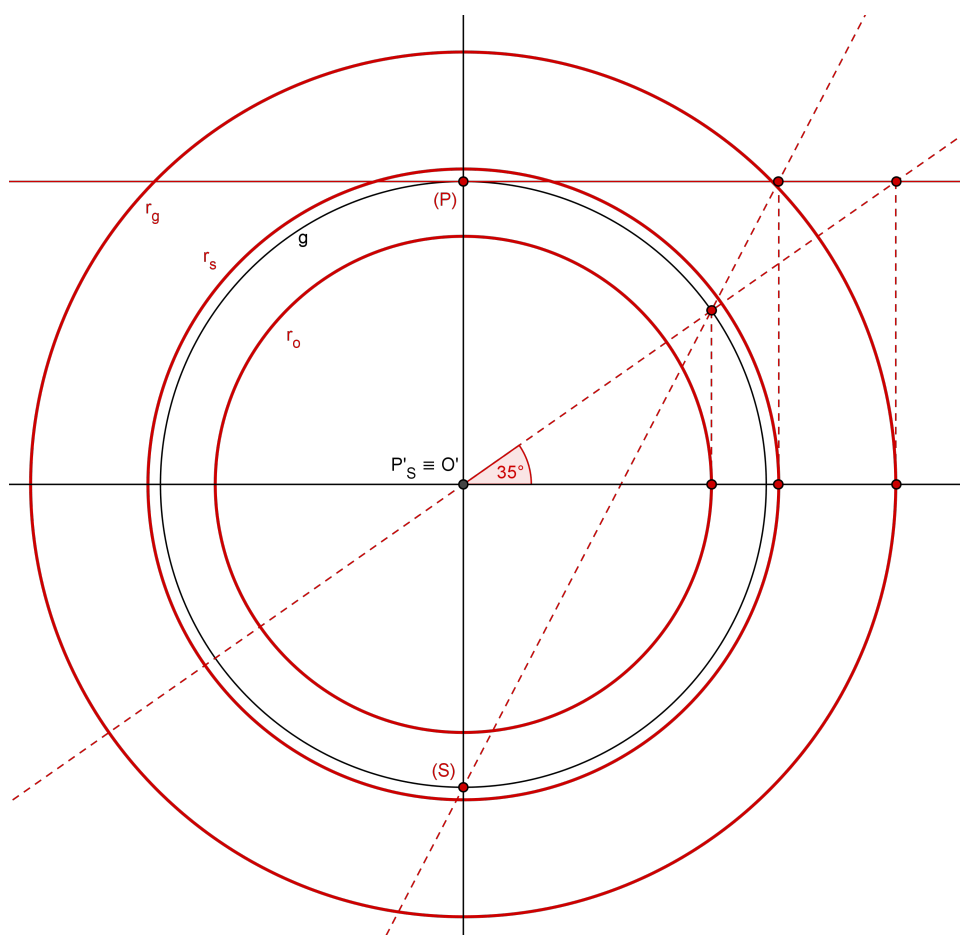
Většina příkladů využívá konstrukcí, které jsou podrobně popsány v kapitole 2. Jedná se o sestrojování obrazů rovnoběžek, poledníků a ortodrom ve zkoumaných projekcích. Zároveň je ale uvedeno i několik dalších příkladů, například zjišťování, o jaké zobrazení se jedná, což souvisí s využitím získaných znalostí z oblasti kartografie při analýze neznámých map.

Některé příklady jsou přímo zakreslovány do map a k některým je alespoň uvedena velmi jednoduchá mapa obsahující řešení, aby byl výsledek názornější. V řešeních je opět použita červená barva pro konstrukci rovnoběžek a modrá pro konstrukci poledníků (některé části konstrukce jsou samozřejmě využívány pro oboje, i když jsou zakresleny jen jednou barvou). U příkladů, kde se nejedná o zobrazování poledníků a rovnoběžek, jsou všechny konstrukce zakreslovány modře a výsledek červeně.

Příklad 1

Zadání: Sestrojte obraz rovnoběžky r_{35° v ortografické, stereografické i gnómonické projekci, jestliže máte zadanou kružnici g o poloměru R .

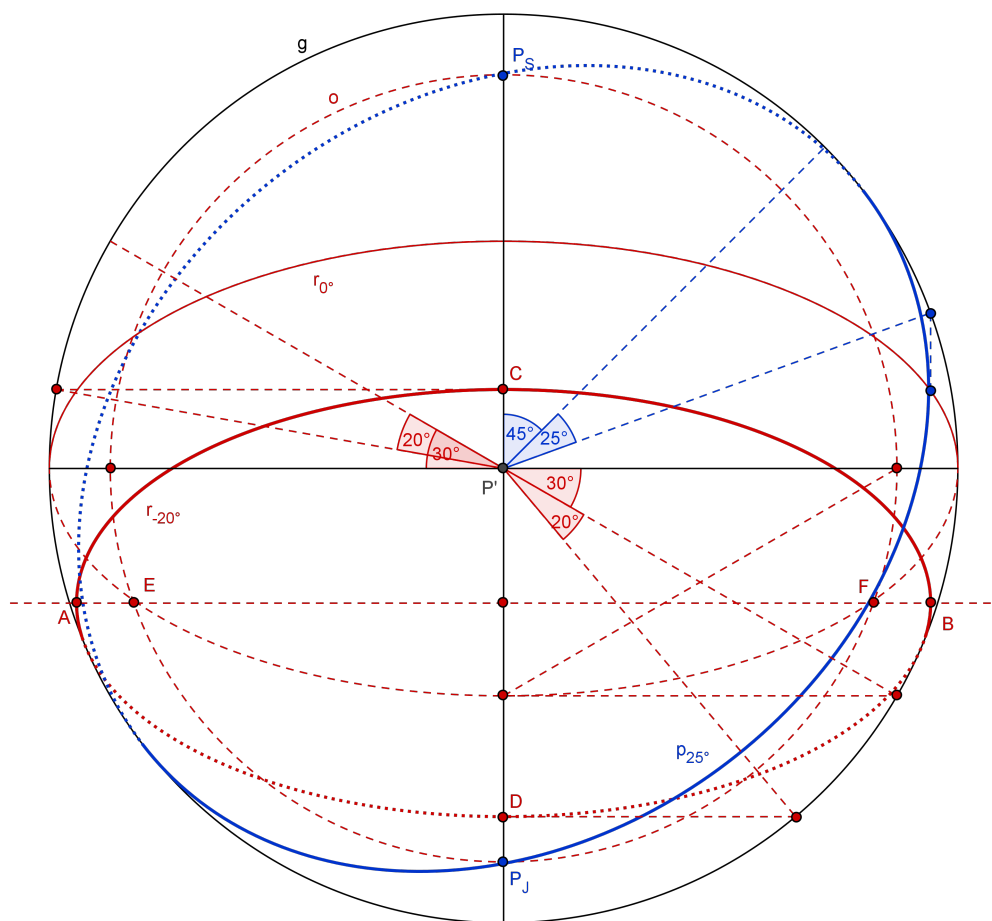
Řešení: Popis potřebných konstrukcí pro řešení tohoto příkladu je uveden v částech [2.3.2](#), [2.4.3](#) a [2.5.2](#).



Příklad 2

Zadání: V ortografické projekci s bodem dotyku $P(-30^\circ, -45^\circ)$ sestrojte obraz rovnoběžky r_{-20° a poledníku p_{25° na zadané kružnici g o poloměru R .

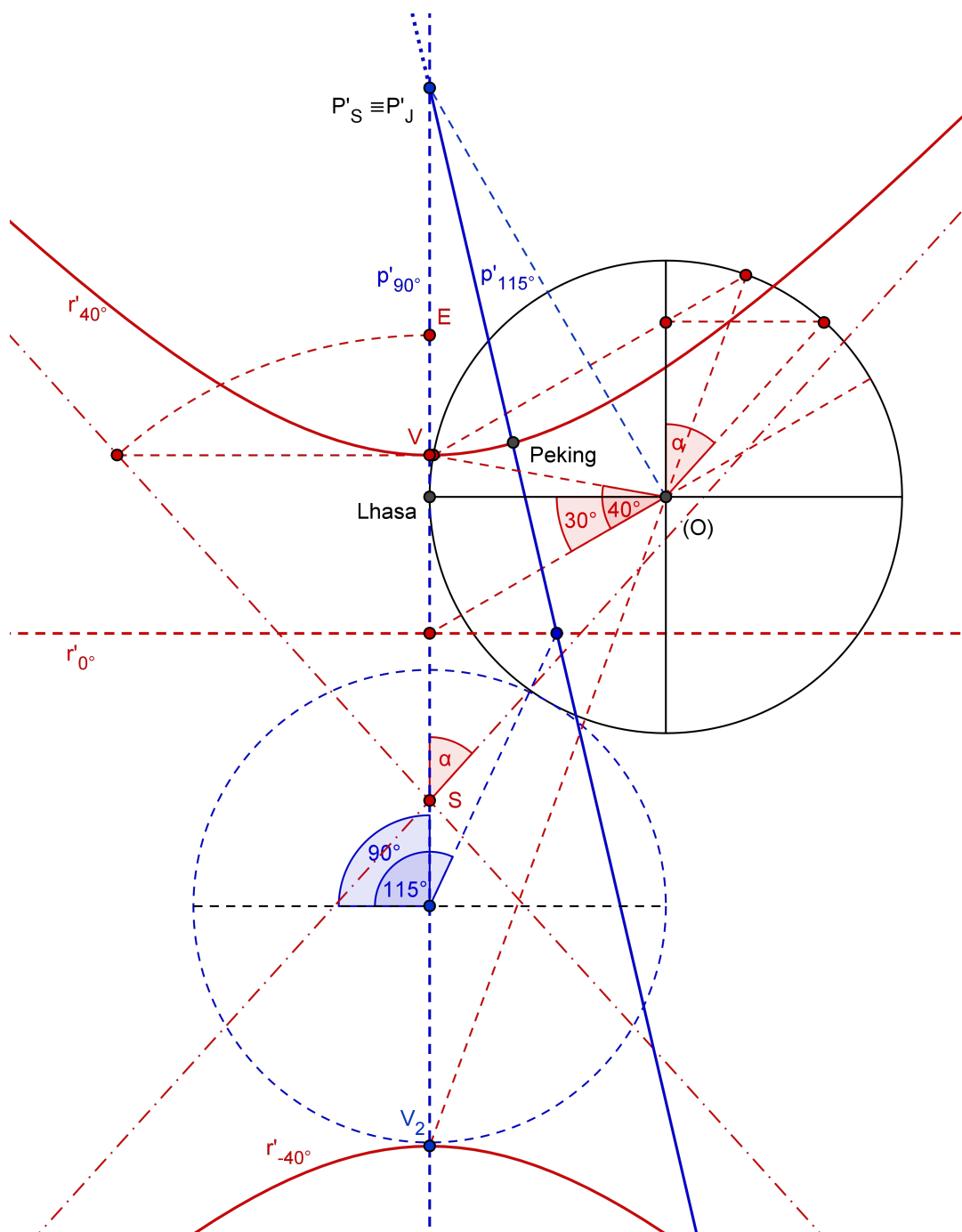
Řešení: Postup řešení, podle kterého se u tohoto příkladu postupuje, je popsán v části [2.3.4](#).



Příklad 4

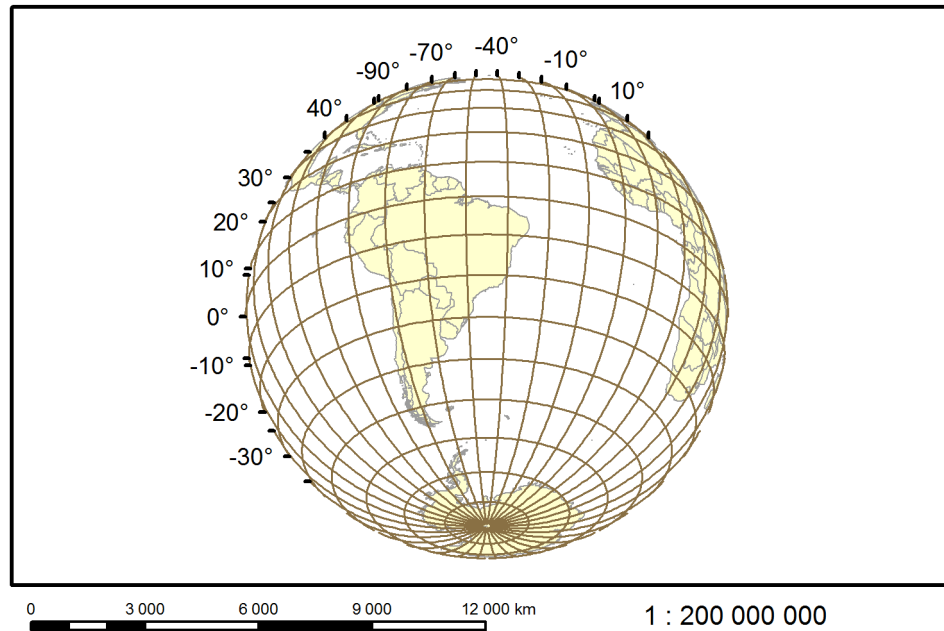
Zadání: V gnómonické projekci s bodem dotyku ve Lhase ($30^\circ, 90^\circ$) sestrojte na mapě Asie obraz rovnoběžky a poledníku procházejících Pekingem ($40^\circ, 115^\circ$), jestliže máte zadanou kružnici g o poloměru R .

Řešení: K řešení dojdeme podle konstrukce uvedené v části 2.5.4.

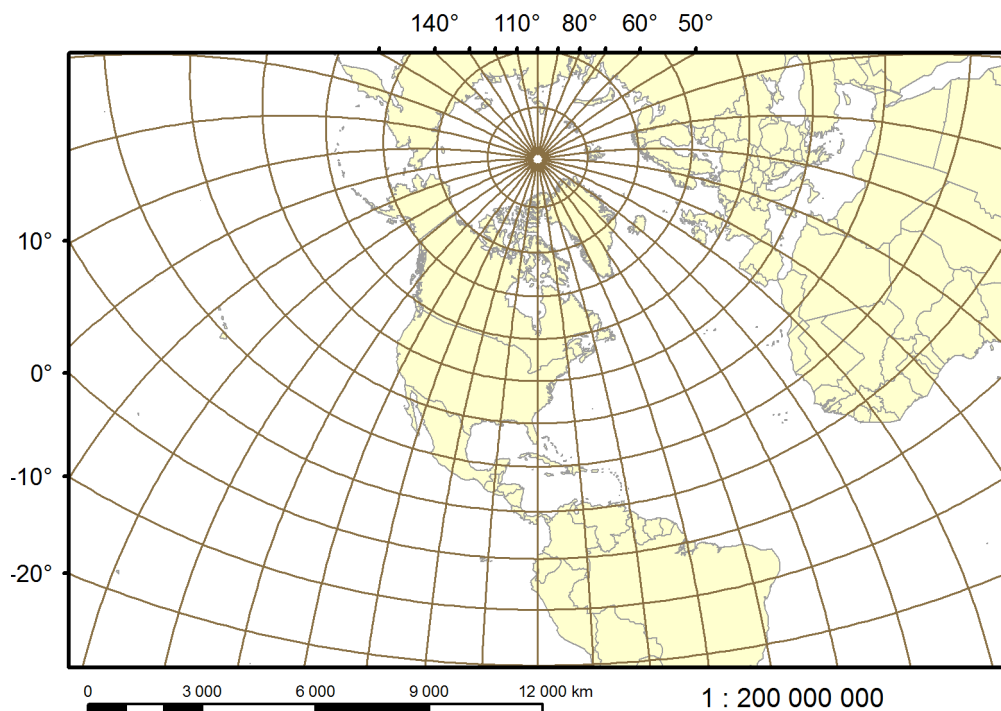


Mapy s územím zobrazovaným v příkladech 2–4

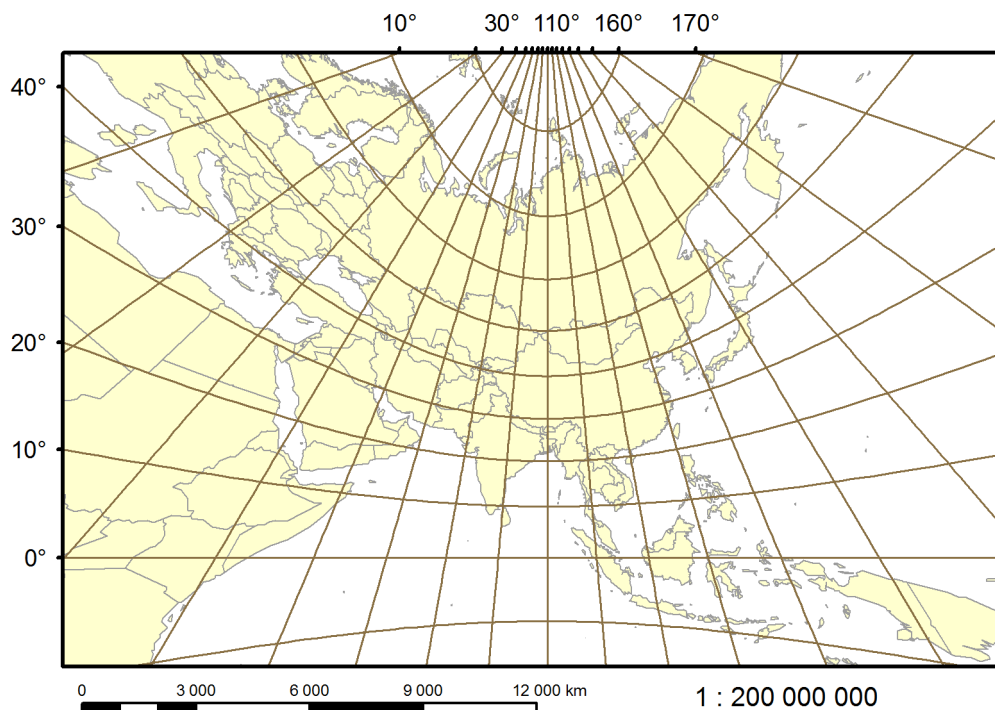
Mapa z příkladu 2 (Ortografická projekce pro $P = (30^\circ, 90^\circ)$)



Mapa z příkladu 3 (Stereografická projekce pro $P = (40^\circ, -80^\circ)$)



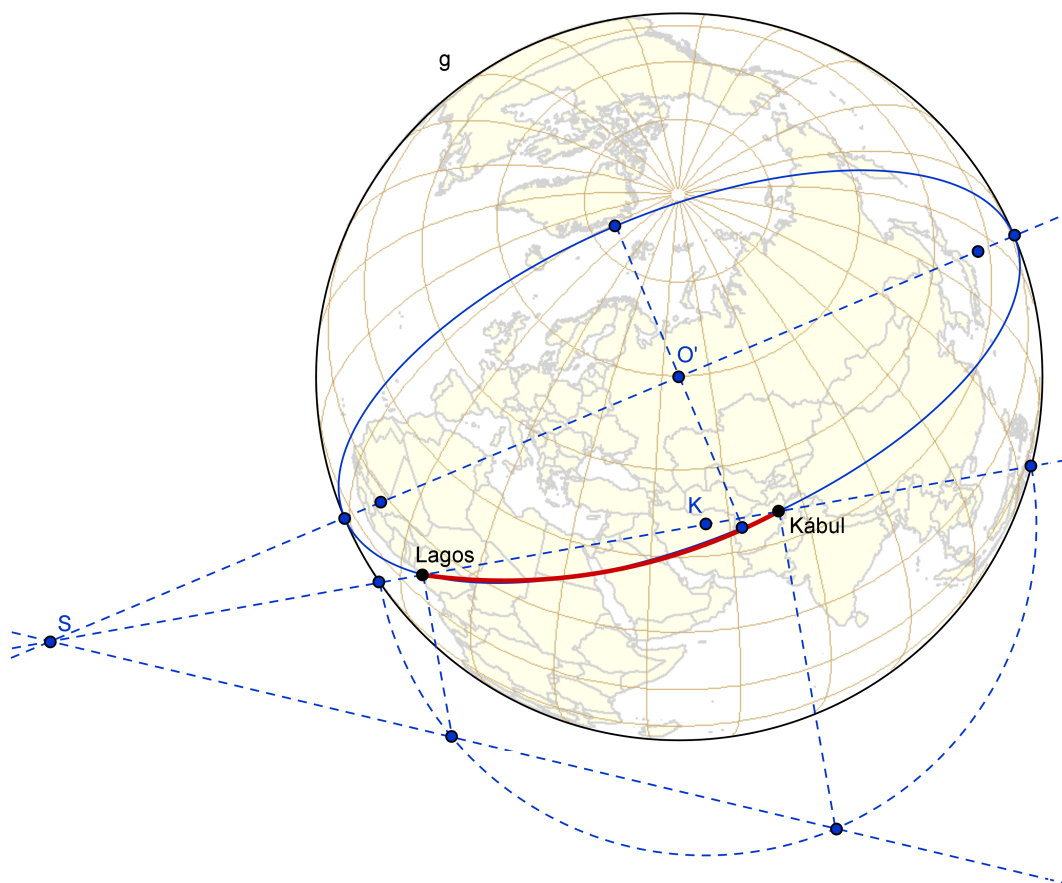
Mapa z příkladu 4 (Gnómonická projekce pro $P = (30^\circ, 90^\circ)$)



Příklad 5

Zadání: Na mapě, která je v ortografické projekci, sestrojte obraz ortodromy spojující města Lagos a Kábul, která na ní máte vyznačena i s obrysovou kružnicí g .

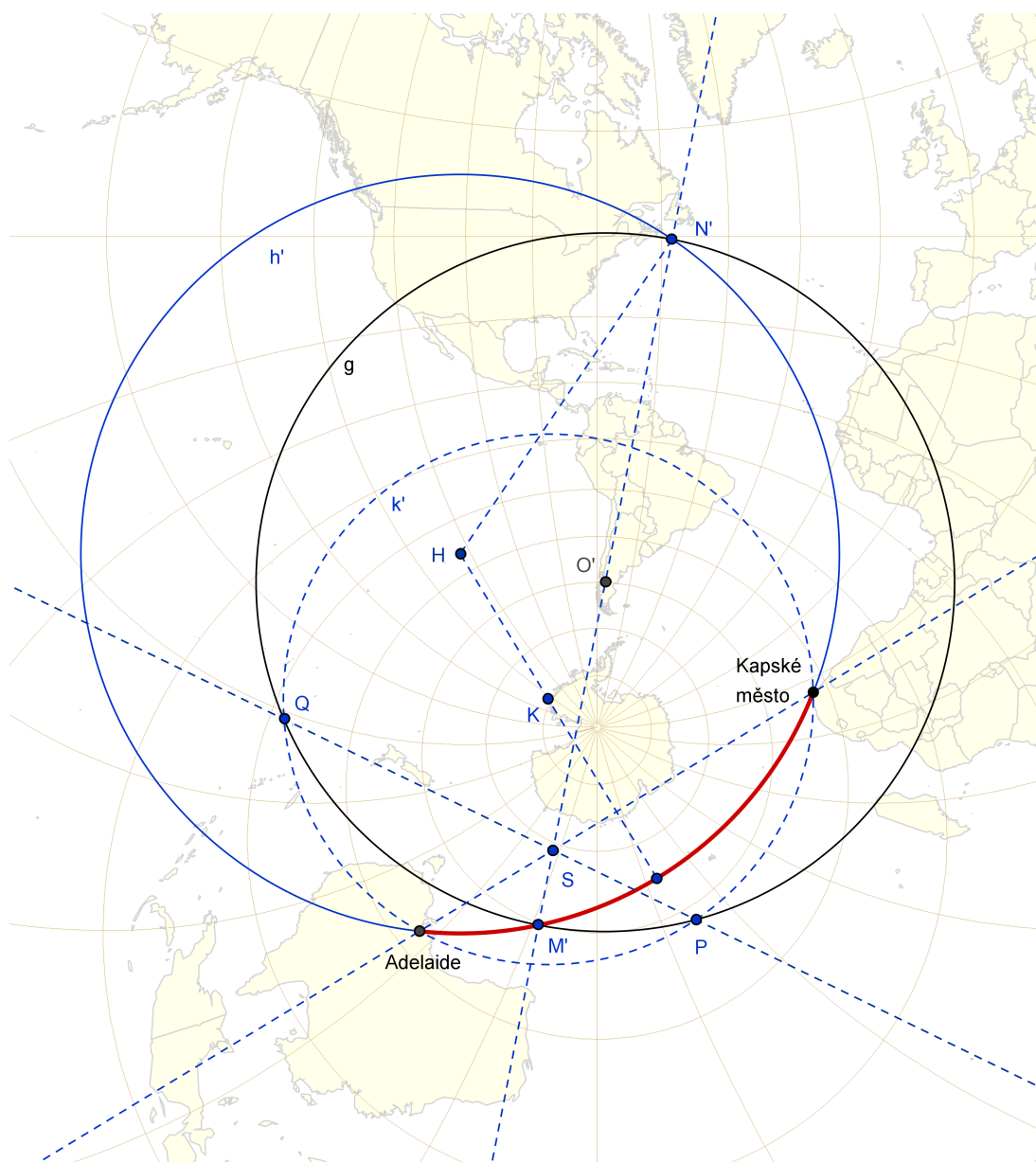
Řešení: K řešení dojdeme pomocí konstrukce popsané v části [2.3.5](#)



Příklad 6

Zadání: Na mapě, která je ve stereografické projekci, narýsujte obraz ortodromy spojující Kapské město a Adelaide, přičemž tato dvě města v ní máte vyznačena i s obrysovou kružnicí g .

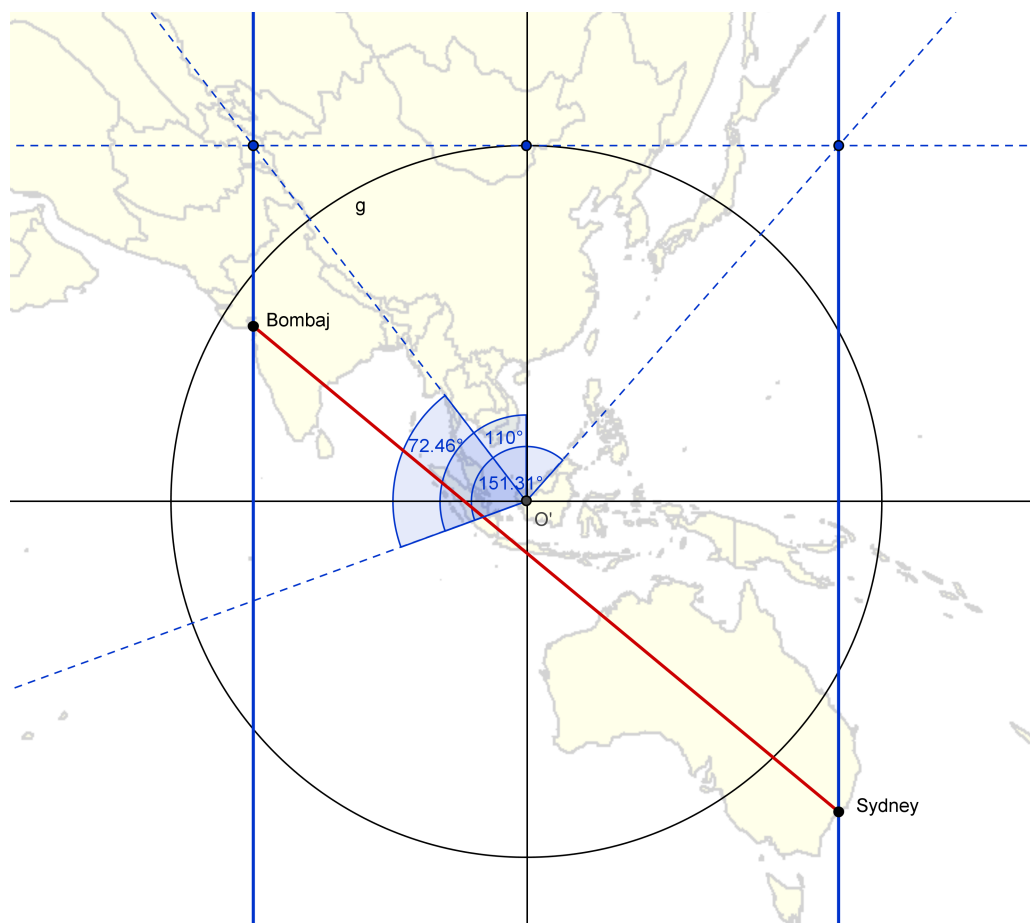
Řešení: K řešení dojdeme pomocí konstrukce popsané v části [2.4.6](#)



Příklad 7

Zadání: V gnómonické projekci s bodem dotyku v bodě $P(110^\circ, 0^\circ)$ sestrojte poledníky procházející městy Sydney a Bombaj a narýsujte jejich zeměpisnou délku. Dále sestrojte obraz ortodromy mezi těmito městy.

Řešení: Konstrukce poledníků, stejně jako zjištění jejich zeměpisné délky, probíhá na stejném principu jako konstrukce popsaná v 2.5.3. Podle naměřených úhlů zjistíme, že Sydney leží zhruba na poledníku 151° a Bombaj má zeměpisnou délku asi 73° . Ortodroma se v gnómonické projekci zobrazuje na úsečku, proto stačí daná města spojit úsečkou (v řešení vyznačeno červeně).

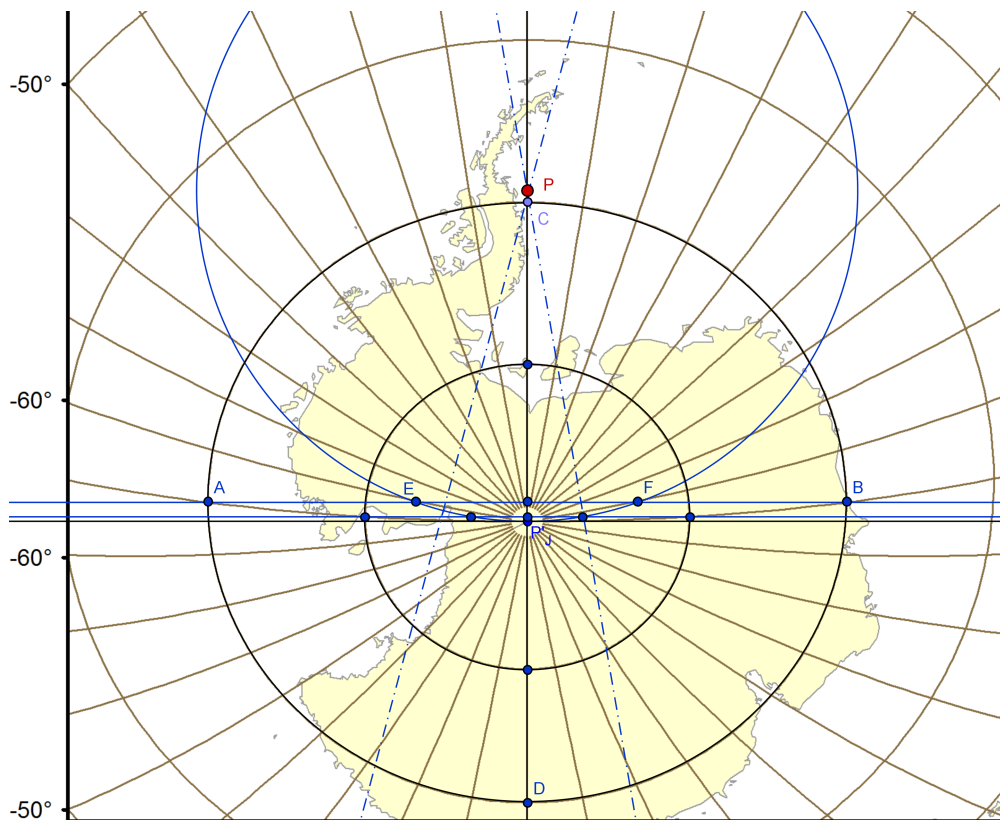


Příklad 8

Zadání: Z níže zobrazené mapy se zeměpisnou sítí zjistěte, jakým typem geometrické azimutální projekce je zobrazena a také jaké jsou souřadnice bodu dotyku zemské plochy s tečnou rovinou.

Řešení: O jaké zobrazení se jedná, je možné zjistit na základě toho, jak je na mapě zobrazena síť poledníků a rovnoběžek. Na této mapě vidíme jediný poledník zobrazený na přímku, proto můžeme vyloučit, že by se jednalo o gnómonickou projekci nebo jinou projekci v pólové poloze. Rovník také není zobrazen na přímku, a tak je jasné, že se nejedná ani o rovníkovou polohu zobrazení. Mezi ortografickou a stereografickou projekcí můžeme rozhodnout tak, že se podíváme, jestli jsou zobrazené poledníky a rovnoběžky částmi kružnic, nebo elips. Nebo také podle toho, zda projekce zachovává úhly, což vidíme (minimálně v horní části mapy je to dobře vidět), že pravda není, protože všechny poledníky a rovnoběžky by spolu tím pádem měly svírat pravý úhel.

Jedná se tedy o ortografickou projekci v obecné poloze, kde bod dotyku leží někde na poledníku p_{-60° . Bohužel není k dispozici krajní část mapy, kde by byla vidět obrysová kružnice a ze které bychom střed mapy zjistili snadno. Díky tomu, že ale máme na mapě obrazy některých celých rovnoběžek, můžeme s pomocí vrcholů najít jejich ohniska (vedlejší vrcholy určíme jako průsečíky elipsy s obrazem poledníku p_{-60° , pomocí nich určíme střed a obdobným způsobem hlavní vrcholy). Pak nejlépe z polohy ohnisek E, F elipsy $ABCD$, která je obrazem rovnoběžky r_{70° určíme střed jimi procházející kružnice, která zároveň prochází obrazem jižního pólu P'_j . Její střed je pak podle věty 2.7 shodný se středem obrysově kružnice, a jedná se tedy o hledaný bod dotyku.



Příklad 9

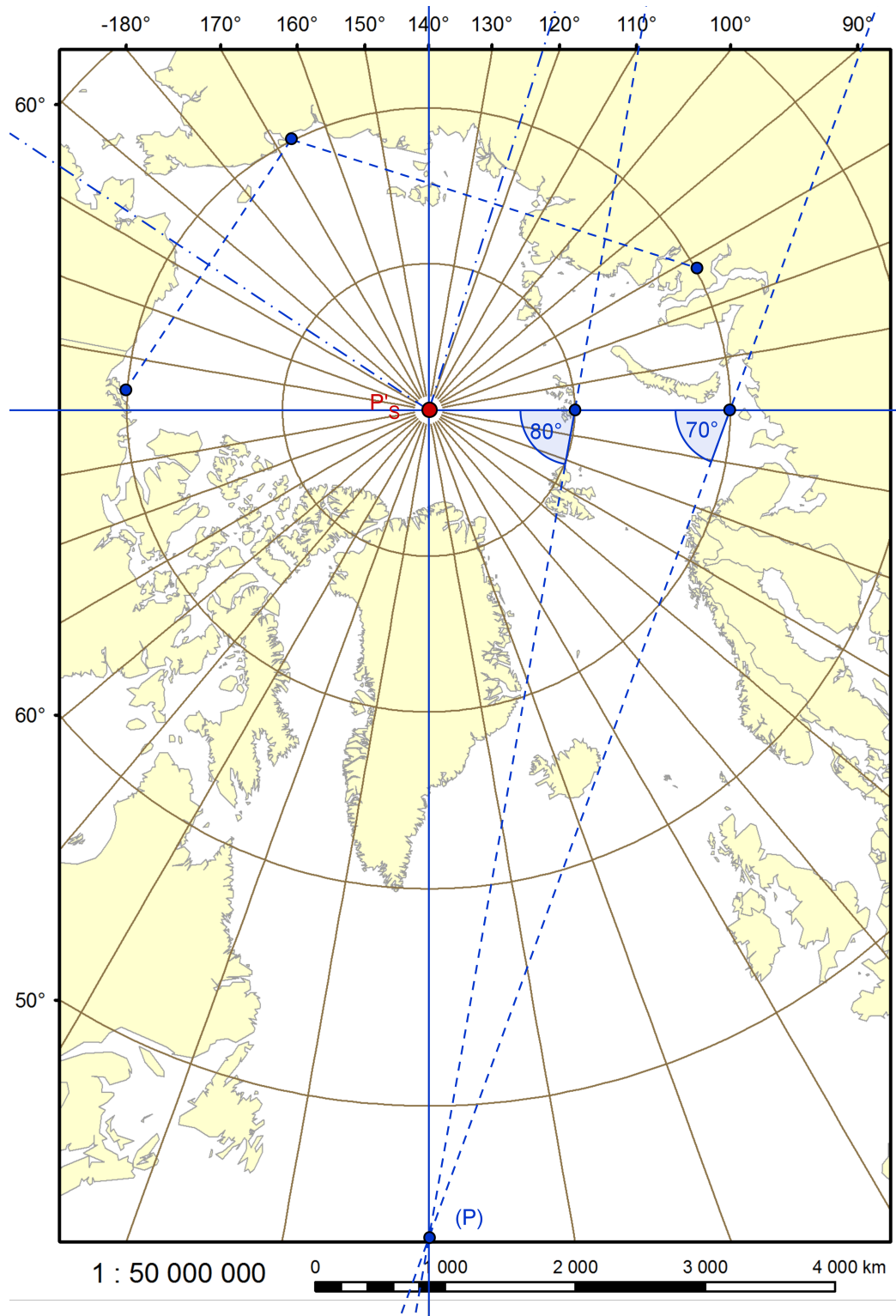
Zadání: Z níže zobrazené mapy se zeměpisnou sítí zjistěte, jakým typem geometrické azimutální projekce je zobrazena a také jaké jsou souřadnice bodu dotyku zemské plochy s tečnou rovinou.

Řešení: Ze zobrazené zeměpisné sítě na mapě vidíme, že rovník je zobrazený na přímku a z poledníků není přímkově vykreslený žádný, i když můžeme předpokládat, že na přímku se zobrazí také některý poledník mezi 40° a 50° zeměpisné délky, který je obklopený opačně prohnutými poledníkovými obrazy. O gnómonickou projekci se jistě nejedná, protože poledníky jsou zobrazeny jako prohnuté křivky, proto je zřejmé, že mapa bude sestrojena některou projekcí v rovníkové poloze. Protože v ortografické by opět vzdálenosti mezi rovnoběžkami musely směrem od rovníku narůstat, jedná se v tomto případě o projekci stereografickou. Bod dotyku se bude nacházet na rovníku mezi poledníky p_{40° a p_{50° , nejspíše na poledníku p_{45° . Tuto domněnku potvrdí fakt, že jsou obrazy ostatních poledníků podle jeho obrazu osově souměrné. Řešení neobsahuje žádnou konstrukci a proto zde ani není uvedeno.

Příklad 10

Zadání: Z níže zobrazené mapy se zeměpisnou sítí zjistěte, jakým typem geometrické azimutální projekce je zobrazena a také jaké jsou souřadnice bodu dotyku zemské plochy s tečnou rovinou.

Řešení: Na zkoumané mapě vidíme, že se všechny poledníky zobrazily na přímkou, což znamená buď, že se jedná o gnómonickou projekci, nebo o kteroukoliv v pólové poloze. Jednoduchou konstrukcí např. pro obraz rovnoběžky r_{70° si ověříme, že obrazy rovnoběžek tvoří soustavu soustředných kružnic a proto se jedná o některou projekci v pólové poloze, s bodem dotyku v obrazu severního pólu. Že se nejedná o ortogonální projekci je jasné z toho, že na mapě se rozestupy mezi rovnoběžkami směrem od pólu zvětšují, zatímco v ortografické projekci je tomu naopak. Mezi gnómonickou a stereografickou projekcí můžeme rozhodnout tím, že zjistíme, jestli průsečíky rovnoběžek s určitým poledníkem jsou promítány pod stejným úhlem, který svírají s rovinou rovníku – pak by se jednalo o gnómonickou projekci. Tuto skutečnost jsme také dokázaly tím, že promítací paprsky vedené z obrazů zmíněných průsečíků pod stejným úhlem, jaká je zeměpisná šířka rovnoběžek se protínají v jednom bodě (viz obrázek níže).



Závěr

Matematická kartografie je jedním z oborů, kde najde své uplatnění jinak často pouze teoretická geometrie a matematika. Právě proto byla tato práce zaměřena na použití těchto teoretických znalostí při geometrických azimutálních projekcích. V první kapitole byly uvedeny základní pojmy se kterými se matematická kartografie setkává, včetně nejdůležitějších charakteristik a dělení kartografických zobrazení podle toho, jak jsou udávána odbornými kartografy.

Druhá kapitola už se zaměřila na samotné geometrické azimutální projekce a popisují se v ní jak jejich vztahy s obecně definovanými geometrickými zobrazeními, tak jejich charakteristické vlastnosti. Na základě těchto vlastností je pak pro každou projekci uveden postup konstrukce obrazů jejích rovnoběžek a poledníků a také geodetických čar. Ty určují nejkratší spojnici dvou míst na mapě a tak je výhodné jejich konstrukci znát pro zvolení co nejkratší trasy na zemském povrchu.

Jak je možné využít znalosti z prvních dvou kapitol ukazuje poslední část práce, která řeší několik konstrukčních příkladů zaměřených na geometrické azimutální projekce. Samotná zadání příkladů jsou také uvedena na volných listech v příloze této práce. Příkladů v této práci není velké množství, ale zato byly vytvořeny příklady různorodé a pokud možno zajímavé, aby demonstrovaly praktické využití matematické kartografie.

Jak teoretická, tak praktická část této práce by se dala ještě rozšířit o další zajímavé vlastnosti zkoumaných projekcí, a příkladů, které by jich využívaly, ale z důvodu rozumného rozsahu už nejsou dál rozebírány. Myslím, že by moje práce mohla sloužit jako doplňkový učební materiál kartografům zajímavajících se o matematickou kartografii, případně zájemcům o tento obor z řad studentů matematických oborů.

Seznam použité literatury

- [1] FINDA, Jaromír. *Kartografická zobrazení* [online]. 2006 [cit. 2014-05-29]. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Josef Janyška. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/52064/prif_m/
- [2] HOJOVEC, V. a kol. *Kartografie*, Praha: Geodetický a kartografický podnik, 1987.
- [3] KRAEMER, E. *Promítání rovnoběžné*, 1. vyd. Praha: SPN, 1991. 460 s.
- [4] PISKA, R., MEDEK, V. *Deskriptivní geometrie 1*, 2. vyd. Praha: SNTL, 1972. 429 s.
- [5] SRNKA, E. *Matematická kartografie*, Brno: VAAZ, 1986.
- [6] TALHOFER, V. *Základy matematické kartografie*, Brno: UO, 2007. ISBN 978-80-7231-297-9.
- [7] URBAN, A. *Deskriptivní geometrie*, Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. 365 s.

