Poissonův proces

– je základním nástrojem pro stochastické modelování v pojistné matematice

– Diskrétní (čítací) proces ve spojitém čase

– Příklad Markovského řetězce ve spojitém čase

– typická aplikace: počet pojistných nároků do času t.

Základní vlastnosti Poissonova procesu

Definice 7.1. *Poissonův proces* s intenzitou $\lambda > 0$ je proces $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ nabývající hodnoty v $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ takový, že

1. $N(0) = 0$ a pro $s < t$ je $N(s) \leq N(t)$.
2. $\mathrm{P}(N(t+h) = n + m | N(t) = n) =$
$$\begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{pro } m = 1 \\ o(h) & \text{pro } m > 1\,. \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{pro } m = 0 \end{cases}$$
3. Je-li $s < t$, pak počet $N(t) - N(s)$ událostí v intervalech $[s, t]$ je nezávislý na $N(s)$, t.j. počtu událostí v $[0, s]$.

– $N(t) \ldots$ počet příchodů, událostí, emisí do času t.

– N je tzv. čítací proces.

Zajímá nás rozložení $N(t)$.

Věta: $N(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt, tedy

$$\mathrm{P}(N(t) = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Důkaz: Podmíníme $N(t+h)$ hodnotou $N(t)$:

$$\mathrm{P}(N(t+h)=j) = \sum_i \mathrm{P}(N(t)=i)\,\mathrm{P}(N(t+h)=j|N(t)=i)$$
$$= \sum_i \mathrm{P}(N(t)=i)\,\mathrm{P}((j-i) \text{ přích. v } (t, t+h))$$
$$= \mathrm{P}(N(t)=j-1)\,\mathrm{P}(1 \text{ příchod}) + \mathrm{P}(N(t)=j)\,\mathrm{P}(\text{žádný přích.}) + o(h).$$

Tedy $p_j(t) = \mathrm{P}(N(t)=j)$ splňuje

$$p_j(t+h) = \lambda h p_{j-1}(t) + (1-\lambda h)\cdot p_j(t) + o(h) \qquad \text{pro } j \neq 0$$
$$p_0(t+h) = (1-\lambda h)\cdot p_0(t) + o(h).$$

V první rovnici odečteme $p_j(t)$, vydělíme h a necháme $h \to 0$. Pak

$$p_j'(t) = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t) \text{ pro } j \neq 0 \tag{1}$$

a podobně z 2.rovnice

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t).$$

Okrajové podmínky jsou

$$p_j(0) = \delta_{j0} = \begin{cases} 1 & \text{pro } j = 0 \\ 0 & \text{pro } j \neq 0. \end{cases}$$

To je systém diferenčně-diferenciálních rovnic pro $p_j(t)$.

Řešení najdeme pomocí generujících funkcí (v proměnné s a s parametrem t).

Definujeme

$$G(s,t) = \sum_{0}^{\infty} p_j(t) s^j = E(s^{N(t)}).$$

Rovnici 1 vynásobíme s^j a sečteme přes j. Dostaneme

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \lambda(s-1)G$$

s okrajovou podmínkou $G(s,0) = 1$. Řešení je zřejmě

$$G(s,t) = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)t} = \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} s^j$$

Uvedeme si ještě důležitou alternativní definici.

Definice 7.2. Nechť $T_0, T_1, \dots$ jsou dány vztahem

$$T_0 = 0, \;\; T_n = \inf\{t : N(t) = n\}.$$

Pak T_n se nazývá čas n-tého příchodu.

Definice 7.3. Definujeme časy mezi příchody (*Inter-arrival times*) jako náhodné veličiny

$$X_n = T_n - T_{n-1}.$$

Ze znalosti $N(t)$ umíme najít hodnoty X_n.

Naopak z X_n lze zrekonstruovat $N(t)$ pomocí

$$T_n = \sum_1^n X_i; \quad N(t) = \max\{n; T_n \leq t\}.$$

Věta 7.4. *Náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé a mají exponenciální rozdělení s parametrem λ.*

Připomenutí: Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda > 0$, jestliže její distribuční funkce je

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \quad x \geq 0 \tag{2}$$

Uvažujme Bernoulliho pokusy v časech $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$ a nechť W je čas čekání na 1.úspěch. Pak

$$\mathrm{P}(W > k\delta) = (1 - p)^k$$

Zvolme t pevně. Do času t jsme udělali přibližně $k = \frac{t}{\delta}$ pokusů.

Nechť $\delta \to 0$. Abychom dostali netriviální limitu, musí také $p \to 0$.

Nechť $\frac{p}{\delta} \to \lambda$. Pak

$$\mathrm{P}(W > t) = \mathrm{P}\left(W > \left(\frac{t}{\delta}\right) \cdot \delta\right) \cong (1 - \lambda\delta)^{\frac{t}{\delta}} \to \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Důkaz: Nejdříve uvažujeme X_1:

$$\mathrm{P}(X_1 > t) = \mathrm{P}(N(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Dále podmíníme X_2 hodnotou X_1,

$$\mathrm{P}(X_2 > t | X_1 = t_1) = \mathrm{P}(\text{žádný příchod v } [t_1, t_1 + t] | X_1 = t_1).$$

Událost $\{X_1 = t_1\}$ se vztahuje k intervalu $[0, t_1]$, zatímco událost "žádný příchod v $[t_1, t_1 + t]$ "k času $> t_1$.

Z definice Poissonova procesu jsou nezávislé, tedy

$$\mathrm{P}(X_2 > t | X_1 = t_1) = \mathrm{P}(\text{žádný příchod v } [t_1, t_1 + t]) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Tedy X_2 je nezávislá na X_1 a má stejné rozdělení. Tvrzení dále plyne indukcí přes n.

Složený Poissonův proces

Definice 7.5. Stochastický proces $S(t)$ se nazývá složený Poissonův proces, jestliže jej lze zapsat ve tvaru

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{3}$$

kde $N(t)$ je Poissonův proces a X_i jsou IID náhodné veličiny, nezávislé na procesu $N(t)$

Moment generující funkce

Definice 7.6. *Moment generující funkce* náhodné veličiny X je definována vztahem

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

pro $t \geq 0$.

Je-li X spojitá náhodná veličina s hustotou f, pak

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx.$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$E\left(X^k\right) = M^{(k)}(0).$$

Opravdu, derivujme integrál podle parametru,

$$M'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x)\, dx,$$

tedy

$$M'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = E(X).$$

Analogicky k-násobným derivováním dostaneme

$$M^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{tx} f(x)\, dx.$$

Tedy

$$M^{(k)}(0) = E\left(X^k\right)$$

Budeme chtít spočítat moment generující funkci složeného Poissonova procesu. Z věty o celkovém očekávání dostaneme

$$M_{S(t)}(z) = E\left(e^{zS(t)}\right) = \exp(\lambda t(M_X(z) - 1)) \tag{4}$$

Derivováním moment generující funkce získáme pro momenty následující vztahy.

Věta 7.7. *Pro očekávání složeného Poissonova procesu platí*

$$E(S(t)) = \lambda t E(X_1) \tag{5}$$

a pro jeho rozptyl

$$Var(S(t)) = \lambda t E(X_1^2) \tag{6}$$

Cramér - Lundbergův model

Cramér - Lundbergův model je základním modelem v matematické teorii neživotního pojištění - teorii ruinování.

Předpoklady Cramér - Lundbergova modelu:

1. Pojistné nároky nastávají v časech $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$, což jsou časy příchodu homogenního Poissonova procesu $N(t)$
2. Pojistný nárok přicházející v i-tém čase T_i má velikost X_i. Posloupnost X_i tvoří nezávislé stejně rozdělené nezáporné náhodné veličiny

3. Posloupnosti T_i a X_i jsou navzájem nezávislé. Tedy i $N(t)$ a X_i jsou nezávislé.

Proces

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

který popisuje celkový pojistný nárok do času t se nazývá *složený Poissonův proces*.

Formulace modelu

U_t ... proces přebytku

$u = U_0$ ... počáteční přebytek (počáteční kapitál pojišťovny)

v čase t máme

$$U_t = U_0 + P_t - S_t$$

P_t ... proces vybraného pojistného do času t

S_t ... proces ztrát, vyplacená plnění do času t

N_t ... proces počtu nároků

Tedy

$$S_t = X_1 + \cdots + X_{N_t}$$

je proces celkového nároku v čase t

Podle předpokladů, S_t je složený Poissonův proces.

N_t je Poissonův proces s intenzitou λ.

X_j tedy jsou IID a nezávislé na N_t.

Pojistné vybíráme spojitě s mírou c. Tedy

$$P_t = ct.$$

Je

$$E(S_t) = E(N_t)E(X) = \lambda t \mu$$

kde $\mu = E(X)$. Chceme

$$P_t > E(S_t)$$

tedy vezmeme

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu$$

kde θ je bezpečnostní (riziková) přirážka.

Máme tedy

$$P_t = (1+\theta)E(S_1)t$$

Definice: pravděpodobnost přežití v nekonečném časovém horizontu je

$$\phi(u) = P(U_t \geq 0 \text{ pro } \forall t \geq 0 \mid U_0 = u)$$

a pravděpodobnost zruinování je

$$\psi(u) = 1 - \phi(u).$$

Definice: Nechť $t = \kappa$ je nejmenší kladné řešení rovnice

$$1 + (1 + \theta)\mu t = M_X(t),$$

kde $M_X(t) = E(e^{tX})$ je MGF n.v. X. Pak κ se nazývá Lundbergův exponent (adjustační koeficient)

Lundbergova nerovnost

Věta: Nechť κ je Lundbergův exponent. Pak pravděpodobnost zruinování splňuje

$$\psi(u) \leq e^{-\kappa u}$$

pro $u \geq 0$.