Diskrétní modely ve finanční matematice

– Budeme se věnovat 1-krokovým a vícekrokovým diskrétním modelům finančního trhu.

– Vícekrokový (binomický) model je založen na náhodné procházce.

1-krokový model

Uvažujeme jednu pevně zvolenou akcii, a předpokládejme, že

– v čase $t = 0$ je cena akcie S_0 známá hodnota,

– v čase $t = 1$ je cena akcie S_1 náhodná veličina (neznámá)

Hodnota $S_1(\omega)$ je funkcí tržního scénáře $\omega \in \Omega$, kde

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$$

je prostor tržních scénářů

Dále předpokládejme, že existuje bezrizikové aktivum, jehož hodnota

– v čase $t = 0$ je rovna 1

– v čase $t = 1$ je rovna e^r za všech tržních scénářů.

Hodnota r se nazývá bezriziková úroková míra.

Předpokládáme, že úroková míra je stejná jak pro půjčování, tak pro ukládání peněz.

Příklad 8.1. ***Forwardová smlouva*** (uzavřená v čase $t = 0$) je následující závazný kontrakt:

– V čase $t = 1$ koupí X od Y jednu akcii za cenu F.

Za uzavření smlouvy se neplatí.

– Jaká je "správná" cena F?

Věta 8.2. *Jestliže neexistuje arbitráž, pak jediná možná cena ve forwardové smlouvě je*

$$F = S_0 e^r.$$

Arbitráží je míněna možnost jak si bez rizika zajistit zisk "z ničeho". Přesnou definici si uvedeme za chvilku.

Důkaz: Dokážeme, že jak $F > S_0e^r$, tak $F < S_0e^r$ vede k arbitráži.

1) Nechť $F > S_0e^r$ (výhodné pro Y). Uvažujme následující strategii:

$t = 0$ ... Y si vypůjčí v bance S_0, koupí akcii a uzavře forwardovou smlouvu na prodej akcie.

$t = 1$ ... Y prodá akcii za F, do banky vrátí S_0e^r.

Zůstane mu bezrizikový zisk $F - S_0 e^r > 0$, strategie tedy dává arbitráž.

2) Nechť $F < S_0 e^r$ (výhodné pro X) Uvažujme teď tuto strategii:

$t = 0$ ... X prodá akcii na krátko (tedy vypůjčí si akcii – tzv. short-selling) za S_0, uloží výnos do banky a uzavře forwardovou smlouvu na koupi akcie.

$t = 1$ ... X dostane z banky $S_0 e^r$, koupí akcii za F a vrátí ji (tj. uzavře krátkou pozici). Zůstane mu $S_0 e^r - F > 0$, tj. bezrizikový zisk. Opět je to arbitráž.

Tedy pokud neexistuje arbitráž, pak $F = S_0 e^r$.

Příklad 8.3. ***Evropská call opce*** dává držiteli právo koupit akcii v čase $t = 1$ za cenu K (tzv. realizační cena opce). Kupec opce zaplatí v čase $t = 0$ za toto právo prodejci cenu V_0.

Jaká je férová cena V_0?

V čase $t = 0$ neznáme S_1. Držitel opce ji v čase $t = 1$ uplatní, je-li $K < S_1$ (jinak koupí akcii levněji na trhu). Tedy hodnota v čase $t = 1$ je

$$V_1 = (S_1 - K)_+ = \begin{cases} S_1 - K & \text{pokud } S_1 > K \\ 0 & \text{pokud } S_1 \leq K \end{cases}.$$

Jaká je hodnota V_0?

Předpokládejme, že existují dva možné tržní scénáře (ω_1, ω_2) a nechť pro $t = 1$ máme

$$S_1(\omega_1) = d_1$$

a

$$S_1(\omega_2) = d_2$$

Chceme určit V_0, za předpokladů

– $d_1 < K < d_2$

– $d_1 \leq S_0 e^r \leq d_2$

Uvažujme portfolio $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, kde x_1 je počet aktiv peněžního trhu (bezrizikových), x_2 je počet akcií a x_3 počet opcí.

Hodnota portfolia v čase $t = 1$ za scénáře ω_1 je

$$y_1 = x_1 e^r + x_2 d_1 + 0 x_3$$

Hodnota portfolia v čase $t = 1$ za scénáře ω_2 je

$$y_2 = x_1 e^r + x_2 d_2 + (d_2 - K) x_3$$

Zobrazení $T : (x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, které má nenulové jádro dimenze 1.

Tedy pro portfolio (0, 0, 1) existuje jednoznačné portfolio $(x_1, x_2, 0)$, které má stejnou hodnotu jako (0, 0, 1) v obou scénářích (tzv. replikující portfolio).

Hodnoty x_1 a x_2 najdeme řešením rovnic

$$x_1 e^r + x_2 d_1 = 0$$

pro $V_1(\omega_1)$ a

$$x_1 e^r + x_2 d_2 = d_2 - K$$

pro $V_1(\omega_2)$.

Řešením dostaneme:

$$x_1 = \frac{-d_1 e^{-r}\,(d_2 - K)}{d_2 - d_1}$$

a

$$x_2 = \frac{d_2 - K}{d_2 - d_1}.$$

Portfolio $(x_1, x_2, 0)$ má stejnou hodnotu jako $(0, 0, 1)$ v každém scénáři. Musí mít tedy stejnou hodnotu i v čase $t = 0$ (jinak by existovala arbitráž).

Tedy

$$V_0 = -e^{-r}\frac{d_1(d_2-K)}{d_2-d_1}1+\frac{d_2-K}{d_2-d_1}S_0 = (d_2-K)\left(\frac{e^rS_0-d_1}{d_2-d_1}\right)e^{-r}+0$$

$$= e^{-r}V_1(\omega_2)\,p + V_1(\omega_1)(1-p)\,,$$

kde $V_1(\omega_1) = 0$, e^{-r} je diskontní faktor a

$$p = \frac{e^rS_0-d_1}{d_2-d_1}$$

se nazývá "tržní" (risk-neutrální, rovnovážná) pravděpodobnost scénáře ω_2.

Tedy V_0 je diskontované očekávání hodnoty opce v čase $t = 1$ vzhledem k tržní pravděpodobnostní míře.

Základní věta APT

APT označuje arbitrážní teorii oceňování (Arbitrage Pricing Theory).

Uvažujme trh s K aktivy A^1, ..., A^K volně obchodovatelnými, kde A^1 je bezrizikové aktivum.

Cena podílu aktiva A^j v čase $t = 0$ je S_0^j (známá hodnota).

Dále máme tržní scénáře

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}.$$

Předpokládejme, že A^1 je bezrizikové, tj.

$$S_1^1(\omega_j) = e^r$$

pro všechna $j = 1, ..., N$, kde r je úroková míra.

$S_1^j(\omega_i)$ bude označovat hodnotu aktiva A^j v čase $t = 1$ za scénáře ω_i.

Jsou to tedy náhodné veličiny, tedy funkce na prostoru scénářů Ω.

Celkem dostáváme matici $N \times K$ s prvky $S_1^j(\omega_i)$.

Definice 8.4. ***Portfolio*** je vektor

$$\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_K) \in \mathbb{R}^K,$$

kde θ_j je počet podílů aktiva A^j v portfoliu.

Pro $\theta_j < 0$ je majitel v krátké pozici v aktivu A^j (o velikosti $|\theta_j|$).

V čase $t = 0$ je hodnota Θ rovna

$$V_0(\Theta) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_0^j.$$

Pro $t = 1$ závisí hodnota Θ na ω_i,

$$V_1(\Theta, \omega_i) = \sum_{j=1}^{K} \theta_j S_1^j(\omega_i).$$

Definice 8.5. ***Arbitráž*** je portfolio, které "získává peníze z ničeho", tj. formálně buď

$$V_0(\Theta) \leq 0 \quad \text{a} \quad V_1(\Theta, \omega_j) > 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$, nebo

$$V_0(\Theta) < 0 \quad \text{a} \quad V_1(\Theta, \omega_j) \geq 0$$

pro všechna $\omega_j \in \Omega$.

Definice 8.6. Pravděpodobnostní míra $\pi_i = \pi(\omega_i)$ na množině Ω všech scénářů je ***rovnovážná pravděpodobnostní míra*** (neboli risk-neutrální míra),

– jestliže pro všechna A^j je hodnota podílu v čase $t = 0$ rovna diskontovanému očekávání vzhledem k pravděpodobnostní míře π hodnoty podílu v čase $t = 1$.

– Tedy

$$S_0^j = e^{-r} \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) S_1^j(\omega_i)$$

pro všechna $j = 1, \ldots, K$, kde e^{-r} je diskontní faktor.

Věta 8.7. (***Základní věta APT***): *Rovnovážná pravěpodobnostní míra existuje právě tehdy, když neexistuje arbitráž.*