Oceňování finančních derivátů

Martin Kolář

Theta

Θ měří citlivost portfolia hodnoty opce (portfolia) na změnu

času, tedy

$$\Theta(\text{call}) = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Platí

$$\Theta(\text{call}) = -\frac{S_0 \cdot \Phi'(d_1) \cdot \sigma}{2\sqrt{T}} - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\Phi(d_2),$$

kde $\Phi'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{{d_1}^2}{2}}$.

Θ je jiný typ parametru než Δ, protože čas je deterministická proměnná, proti plynutí času se nemá smysl jistit. Θ se v praxi používá jako náhražka za Γ.

Gamma

Γ měří rychlost změny Δ vzhledem ke změně ceny S, tedy

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}.$$

Malé Γ znamená, že Δ se mění pomalu, není třeba tak často rebalancovat pro udržení Δ-neutrálního portfolia.

Velké Γ naopak říká, že Δ je citlivé na změny S. Je tedy nutné častější rebalancování.

Γ měří křivost grafu závislosti ceny opce na ceně podkladového aktiva. Pro Δ-neutrální portfolio platí přibližně:

$$\vartriangle\pi = \Theta \cdot \vartriangle t + \underbrace{\Delta \cdot \vartriangle S}_{=0} + \frac{1}{2}\Gamma \cdot (\vartriangle S)^2 + o(\vartriangle t).$$

Γ-neutrální portfolio:

Pozice v akcii má $\Gamma = 0$. Je třeba nástroj (např. opce), který má $\Gamma \neq 0$, tedy který závisí nelineárně na ceně akcie.

Je-li Γ_A gamma portfolia A a gamma opce je Γ_O, pak přidáním w_T počtu opcí do portfolia máme $\Gamma = \Gamma_A + w_T \Gamma_O$. Pro

$$w_T = \frac{-\Gamma_A}{\Gamma_O}$$

dostaneme $\Gamma = 0$, tedy Γ neutrální portfolio.

Přidáním opce se změní Δ portfolia, nebude tedy Δ-neutrální.

Proto musíme ještě změnit pozici v akciích. Tím se nezmění Γ-neutralita, protože Γ(akcie)=0.

Portfolio s $\Delta = 0$ a $\Gamma = 0$ je imunní i proti větším výkyvům ceny podkladové akcie.

Příklad: Uvažujeme Δ-neutrální portfolio s $\Gamma = -3000$. Δ a Γ opce jsou 0,62 a 1,5. Pak portfolio bude Γ-neutrální, jestliže přidáme dlouhou pozici v $\frac{3000}{1{,}5} = 2000$ call opcích. Tím se změní Δ portfolia z 0 na $2000 \cdot 0,62 = 1240$. Musíme ještě prodat 1240 akcií, abychom dostali portfolio, které je Δ-neutrální (a současně Γ-neutrální).

Přímým výpočtem dostaneme hodnotu Γ,

$$\Gamma(\text{call}) = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S_0} = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}.$$

Pro dlouhou pozici je $\Gamma > 0$.

Taylorův rozvoj hodnoty portfolia v parametrech

Připomeňme, že Taylorův polynom 2. stupně pro funkci 2

proměnných má tvar

$$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2$$

Označme

$\partial f = f(x,y) - f(x_0,y_0)$	...	přírůstek funkce
$\partial x = x - x_0$	...	přírůstek x
$\partial y = y - y_0$	...	přírůstek y

Pak máme

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial y}\partial y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\partial x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\partial y)^2$$

Nechť π je hodnota portfolia, kde r, σ bereme konstantní.

Uvažujeme tedy π jen jako funkci S a t. Dosazením dostaneme

$$\partial \pi \doteq \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial S}}_{=\Delta}\partial S + \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial t}}_{=\Theta}\partial t + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}}_{=\Gamma}(\partial S)^2 + \frac{\partial^2 \pi}{\partial t \partial S}\partial t \partial S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}(\partial t)^2$$

Tedy (po zanedbání členů vyššího řádu)

$$\partial\pi \doteq \Delta\partial S + \Theta\partial t + \frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2$$

Speciálně, pro Δ-neutrální portfolio máme

$$\partial\pi \doteq \Theta\partial t + \frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2,$$

Pokud je portfolio Δ i Γ neutrální, pak dostaneme

$$\partial\pi \doteq \Theta\partial t.$$

Vega

$\mathcal{V}$ měří citlivost na změnu volatility (vega není řecké písmeno, v matematicky orientované literatuře se původně používalo písmeno ν). Máme

$$\mathcal{V}(\text{call}) = \frac{\partial C}{\partial \sigma}.$$

Platí

$$\mathcal{V}(\text{call}) = S_0 \cdot \sqrt{T} \cdot \Phi'(d_1).$$

Velké vega znamená velkou citlivost portfolia na změny volatility. Pozice v akcii má vega rovno 0. Γ-neutrální portfolio má obvykle nenulové $\mathcal{V}$ a naopak.

K sestavení Γ i $\mathcal{V}$ neutrálního portfolia jsou potřeba nejméně dva různé deriváty na podkladovou akcii.

Příklad: Uvažujme Δ-neutrální portfolio A s

$$\Gamma(A) = -5000, \qquad \mathcal{V}(A) = \; - \; 8000.$$

Obchodovaná opce O má gamma $0,5$, vega $2,0$ a delta $0,6$.

Sestavte gamma neutrální portfolio.

Portfolio bude $\mathcal{V}$-neutrální pokud koupíme $8000/2 = 4000$

opcí.

To zvýší Δ na $4000 \cdot 0,6 = 2400$, tedy je třeba prodat 2400 akcií, aby bylo opět Δ-neutrální. Γ se změní na $-5000 + 4000 \cdot 0,5 = -3000$. Pro Γ a současně $\mathcal{V}$ neutrální portfolio musíme mít k dispozici ještě další opci.

Příklad: Nechť navíc další obchodovaná opce O_2 má gamma $0,8$, vega $1,2$ a delta $0,5$. Sestavte gamma i vega neutrální portfolio. Máme-li w_1 opcí O a w_2 opcí O_2 pak chceme:

$$\Gamma : -5000 + 0,5w_1 + 0,8w_2 = 0$$

$$\mathcal{V} : -8000 + 2,0w_1 + 1,2w_2 = 0$$

Odtud dostaneme:

$$w_1 = 400$$

$$w_2 = 6000$$

Tedy koupíme-li 400 opcí O a 6000 opcí O_2, pak portfolio bude Γ i $\mathcal{V}$ neutrální. Jeho Δ bude $400 \cdot 0,6 + 6000 \cdot 0,5 = 3240$. Tedy musíme ještě prodat 3240 akcií, aby bylo portfolio i Δ-neutrální.

Taylorův rozvoj v proměnných $S, \; t, \; \sigma$ bude mít tvar

$$\begin{aligned}\partial\pi \doteq& \frac{\partial\pi}{\partial S}\partial S + \frac{\partial\pi}{\partial t}\partial t + \frac{\partial\pi}{\partial\sigma}\partial\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\pi}{\partial S^2}(\partial S)^2\\ =&\Delta\partial S + \Theta\partial t + \mathcal{V}\partial\sigma + \frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2\end{aligned}$$

Rho

ρ měří změnu hodnoty opce (portfolia) v závislosti na změně úrokové míry.

$$\rho(\text{call}) = \frac{\partial C}{\partial r}$$

Přímým výpočtem dostaneme

$$\rho(\text{call}) = K \cdot T \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \Phi(d_2).$$

Vztah mezi Δ, Θ a Γ

Připomeňme si tvar Black-Scholesovy rovnice pro cenu derivátu f (například $f = C, P, \dots$):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f.$$

Pro hodnotu π portfolia derivátů (na jednu stejnou podkladovou akcii) tedy dostaneme

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial \pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} = r \cdot \pi.$$

Odtud

$$\Theta + r \cdot S \cdot \Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma = r \cdot \pi.$$

Pro Δ-neutrální portfolio máme

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma = r \cdot \pi.$$

Je-li Θ velké kladné, pak Γ je velké záporné a naopak. V Δ-neutrálním portfoliu lze tedy Θ použít jako náhražku Γ.

Příklad: Uvažujeme Δ-neutrální portfolio s $\Gamma = 700$. Δ a Γ opce jsou 0,35 a 2,1. Sestrojte Γ-neutrální portfolio).

Příklad: Investor vlastní Δ-neutrální portfolio které má $\Gamma(\pi) = 250$ a $\mathcal{V}(\pi) = -600$. Sestavte gamma i vega neutrální portfolio s využitím dvou opcí, z nichž první má gamma $0,3$, vega $1,0$ a delta $0,7$ a druhá opce má gamma $0,5$, vega $0,8$ a delta $0,3$.

Příklad: Dokažte, že platí vztah

$$S_0\Phi'(d_1) = Ke^{-rT}\Phi'(d_2)$$

Příklad: S využitím předchozího příkladu dokažte, že platí

$$\Delta_{call} = \Phi(d_1).$$

Příklad: Dokažte vztah pro Θ call opce,

$$\Theta_{call} = -rKe^{-rT}\Phi(d_2) - \frac{S_0\Phi'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}.$$

Příklad: Odvodte vztah pro Γ call opce,

Příklad: Odvodte vztah pro vega call opce,

Příklad: Vypočtete limitu Γ pro $S \to \infty$ a $S \to 0$.

Příklad: Dokažte, že cena call opce je rostoucí funkcí volatility.

Příklad: Odvodte vztahy pro parametry citlivosti vyšších řádů

- Speed, Vanna, Vomma.

Příklad: Pomocí vztahu pro Speed najděte hodnotu S pro

kterou je Gamma maximální.