MIN301 Matematika III - příklady počítané na cvičení (podzimní semestr 2021)

1 1. týden – úvod do funkcí více proměnných

Cvičení konané 14. 9. 2021.

Příklad 1.1: Rozmyslete si grafy následujících funkcí dvou proměnných:

(i) $f(x,y) = x - y$. [Rovina.]

(ii) $f(x,y) = x^2 + y^2$. [Rotační paraboloid.]

(iii) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. [Kužel.]

(iv) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$. [Graf vzniká pohybem přímky v $\mathbb{R}^3$.]

(v) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$. [Pravidelně zvlněná plocha.]

(vi) $f(x,y) = \sin(xy)$. [Zvlněná plocha, 'frekvence' vlnění se mění.]

(vii) $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$. [Zvlněná plocha, rozmyslete si limitní vývoj do nekonečna.]

Příklad 1.2: Určete maximální definiční obory následujících funkcí:

(i) $f(x,y) = \frac{xy}{y(x^3+x^2+x+1)}$.

(ii) $f(x,y) = \sqrt{\arcsin xy}$.

(iii) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(9-x^2-y^2)}$.

Příklad 1.3: Spočtěte následující limity nebo ukažte jejich neexistenci:

(i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. [Limita je 0.]

(ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$. [Limita neexistuje – rozmyslete si limity "po přímkách"směrem k počátku.]

(iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$. [Limita neexistuje, i když limity "po přímkách"směrem k počátku jsou stejné – použijte limitu po křivce $y = 1 - e^x$.]

(iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. [Limita neexistuje, což je pěkne vidět při přechodu na polární souřadnice.]

Příklad 1.4: Spočtěte parciální derivace následujících funkcí a pak požadované směrové derivace:

(i) Směrová derivace funkce $f(x, y) = x^3 + 4xy$ v bodě $[2, -1]$ ve směru vektoru $(1, 3)$.

(ii) Směrová derivace funkce $f(x, y, z) = \frac{\cos(x^2 y)}{z}$ v bodě $[1, 1, 2]$ ve směru vektoru $(1, 2, 3)$.

[Směrové derivace lze počítat dvěma způsoby - buď přimo z definice nebo pomocí parciálních derivací.]

2 2. týden – derivace vyšších řádů, Taylorův rozvoj a aplikace na průběch funkcí

Cvičení konané 21. 9. 2021.

Příklad 2.1: S využitím parciálních derivací vyjádřete diferenciál df funkce $\arctan(x^2 + y^2)$ v bodě $[1, -1]$ a vypočtěte pomocí něho směrovou derivaci pro směr $u = (1, 2)$.

Příklad 2.2: Určete parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y) = x^4 y + xy^2 + x + 2$ a pak Taylorův polynom druhého stupně této funkce v bodě $[1, 1]$.

Příklad 2.3: Určete lokální extrémy následujících funkcí:

(i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. [Stacionární body jsou $[0, 0]$ a $[1, 1]$, v prvním není extrém, ve druhém je lokální minimum.]

(ii) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, extrémy určete jen v prvním oktantu. [Jediný stacionární bod je $[1/2, 1, 1]$, je to minimium.]

(iii) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$. [(Vyjdou tři stacionární body $[0, 0]$, $[1, 1]$ a $[-1, -1]$; v prvním neumíme rozhodnout podle Hessiánu, další dva jsou minima. V počátku extrém nenastane – v jeho okolí jsou kladné i záporné hodnoty.]

3 3. týden – tečná rovina ke grafu, derivace složených funkcí, implicitně zadané funkce

Cvičení konané 5. 10. a 12. 10. 2021.

Příklad 3.1: Určete následující tečnu a tečnou rovinu:

(i) Na křivce $c(t) = (t^2 - 1, -2t^2 + 5t, t - 5)$ najděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou $\rho : 3x + y - z - 7 = 0$. [Nápověda: Směrový vektor tečny ke křivce $c(t)$ v bodě chceme mít kolmý k normálovému vektoru roviny ρ, takže skalární součin těchto dvou vektorů musí být roven 0.]

(ii) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$ v bodě $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, ?]$.

Příklad 3.2:

(i) Určete diferenciál zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, xyz)$ v bodě $[1, 2, 3]$ jako lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Dále určete diferenciál zobrazení $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G(s, t) = \frac{t}{s}$ v bodě $[14, 6]$ jako lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) Pomocí předchozího napište diferenciál funkce $\varphi(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ v bodě $[1, 2, 3]$.

Příklad 3.3: Určete první a druhou derivaci implicitně zadané funkce $y = f(x)$ splňující $x^2 + y^2 = 1$. Najděte její lokální extrémy.

Příklad 3.4: Určete derivaci implicitní funkce $y(x)$, pokud $xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0$. [$y' = \frac{2y-3x^2-y^2}{2xy-2x-6y}$.]

Příklad 3.5: Rozhodněte, zda křivka $x^3 - y^3 + 2xy = 0$ leží v okolí bodu $[1, -1]$ nad (nebo pod) svojí tečnou. Dále určete lokální extrémy příslušné funkce $y = y(x)$ v bodech, kde je tato funkce definovaná. [Křivku v okolí bodu $[1, -1]$ považujte za graf funkce $y(x)$ zadané implicitně a využijte hodnotu druhé derivace v daném bodě: $y''(1) = \frac{15}{9} > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.]

Příklad 3.6: Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě $[1, \sqrt{2}, 2]$ funkce $z = f(x, y)$ definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí $x^2+y^2+z^2-xz-\sqrt{2}yz = 1$. Dále určete lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ v bodech, kde je tato funkce definovaná.

Příklad 3.7: V okolí kterých bodů křivky $F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$ nelze vyjádřit y jako funkci $y = f(x)$? [Body, kde $F(x, y) = 0$ a $F_y(x, y) = 0$ jsou $[2, 2]$ a $[-2, -2]$. V nich vezměte implicitní funkci $x = x(y)$ a spočtěte její první a druhou derivaci a ukažte, že tečna křivky v těchto bodech je rovnoběžná s osou y a křivka leží vlevo nebo vpravo od této tečny. Namalujte si obrázek.]

4 4. týden – vázané extrémy, integrace ve více proměnných

Cvičení konané 12. 10. 2021.

Příklad 4.1: Najděte extrémy funkce $h(x,y) = x - y$ na elipse $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6 = 0$ v rovině $\mathbb{R}^2$. [Extrémy musí nastat ve stacionárních bodech, tyto musí mít vlastnost, že gradient h je násobkem gradientu F. Vyjdou body $[x,y]$ s $x = \pm 2$, $y = \mp 1$ – jedno minimum, jedno maximum. Tuto skutečnost dokážeme pomocí tvrzení, že spojitá funkce nabývá na uzavřené a omezené množině v $\mathbb{R}^n$ svého maxima a minima.]

Příklad 4.2: Najděte extrémy funkce $h(x,y,z) = x + 2y + 3z$ za podmínky $F(x,y,z = xyz = 36)$ a $x > 0$, $y > 0$ a $z > 0$. [Stacionární bod je $[6,3,2]$ a jde o minimum. To dokážeme například tak, že vypočteme x jako funkci (y,z) z $F(x,y,z) = 0$, dosadíme do h a spočteme Hessián modifikované funkce v bodě $[3,2]$.]

Příklad 4.3: Vypočtěte $\iint_{\langle 0,1\rangle \times \langle -1,2\rangle} (x^2 + 2xy)dx\,dy$. [Řešení: $\frac{5}{2}$.]

Příklad 4.4: Vypočtěte $\int_0^1 \int_{x^2}^x (2 - xy)dy\,dx$. [Řešení: $\frac{7}{24}$.]

Příklad 4.5: Vypočtěte $\int_3^4 \int_x^{2x} \frac{1}{x^2-3x+2} dy\,dx$. [Řešení: $3\ln 2 - \ln 3$, je třeba rozložit na parciální zlomky.]

Příklad 4.6: Zaměňte pořadí integrace $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} f(x,y)dy\,dx$. [Řešení: $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} f(x,y)dx\,dy$

Příklad 4.7: Spočtěte $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_y^{\sqrt{\pi/2}} y^2 \sin x^2 dx\,dy$. [Řešení: $\frac{1}{6}$, je třeba zaměnit pořadí integrace a pak použít substituci $t = x^2$.]

5 5. týden – integrace ve více proměnných, transformace souřadnic

Cvičení konané 19. 10. a 26. 10. 2021.

Příklad 5.1: Spočítejte $I = \iint_M 8y\,dxdy$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ xy \geq 1,\ x + y \leq \frac{5}{2}\}$. [Řešení : $\frac{9}{2}$.]

Příklad 5.2: Spočítejte $I = \iint_S xy^2\,dxdy$, kde S je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$. [Řešení : $\frac{1}{40}$.]

Příklad 5.3: Pomocí přechodu k polárním souřadnicím zjednodušte dvojný integrál $I = \iint_M f(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy$, kde M je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujících $x^2+y^2 \leq 1$. [Řešení: $2\pi \int_0^1 rf(r)dr$.]

Příklad 5.4: Spočítejte integrál $I = \iint_M \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2)}\,dxdy$, kde M je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ splňujících $1 \leq (x-1)^2+(y+1)^2 \leq 4$. [Řešení: $\frac{14}{3}\pi$.]

Příklad 5.5: Použitím vhodné transformace spočítejte integrál $I = \iint_A x^2y^2\,dxdy$, kde A je množina bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ ohraničená křivkami $xy = \frac{1}{2}$, $xy = 2$, $2y = x$ a $x = 2y$, přičemž $x, y \geq 0$. [Řešení: Vzhledem k omezením se nabízí transformace $u = xy$, $y = vx$, tj. $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ a $y = \sqrt{uv}$. Jacobián transformace je $\frac{1}{2v}$ a integrál je $I = \frac{63}{24}\ln 2$.]
Obsah plochy, hmotnost, těžiště jsou n8sledující integrály

- obsah plochy A je $\iint_A dxdy$,
- hmotná destička daná množinou A s hustotou $\rho(x,y)$ v bodě $[x,y]$ má hmotnost $M = \iint_A \rho(x,y)\,dxdy$,
- hmotná destička daná množinou A s hustotou $\rho(x,y)$ v bodě $[x,y]$ souřadnice těžiště $[x_0,y_0]$, kde $x_0 = \frac{1}{M} = \iint_A x\rho(x,y)\,dxdy$ a $y_0 = \frac{1}{M} = \iint_A y\rho(x,y)\,dxdy$.

Příklad 5.6: Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami $x = 0$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 8$ a $y = 4x$. [Řešení: $\frac{1}{2} + 2\ln 2$.]

Příklad 5.7: Hmotná destička ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky 1, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od jedné z odvěsen a v protějším vrcholu je rovna 2. Najděte těžiště destičky. [Řešení: $[\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{24}]$.]

Příklad 5.8: Určete souřadnice těžiště homogenní destičky ohraničené křivkami $y = x^2$ a $x + y = 2$. [Řešení: $[-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}]$.]

6 6. týden – aplikace vícenásobných integrálů, úvod do diferenciálních rovnic

Cvičení konané 26.10. a 2. 11. 2021.

Příklad 6.1: Určete objem tělesa v $\mathbb{R}^3$, které je ohraničeno částí kužele

$$x^2 + y^2 = (z-2)^2$$

a paraboloidem

$$x^2 + y^2 = 4 - z.$$

[Řešení: $\frac{5}{6}\pi$.]

Příklad 6.2: Řešte rovnici $(1+e^x)yy' = e^x$. Najděte obecné řešení a řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$. [Řešení: obecné řešení je $y = \pm\sqrt{2\ln\big(C_2(e^x+1)\big)}$, $C_2 > 0$ a partikulární řešení pro $y(0) = 1$ je $y = \sqrt{2\ln\big(\frac{\sqrt{e}}{2}(e^x+1)\big)}$ pro $x \geq \frac{2}{\sqrt{e}}$.]

Příklad 6.3: Řešte rovnici $y' = x - \frac{2y}{x^2-1}$ Najděte obecné řešení a řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = -1$ a pak řešení splňující počáteční podmínku $y(2) = 3$. [Řešení: obecné řešení je rovnice je $y = \big(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln|x+1| + D\big)\frac{x+1}{x-1}$, $D \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.]

Příklad 6.4: Řešte rovnici $xy' + y\ln x = y\ln y$. Zjistěte, ve které části roviny má rovnice smysl. Najděte obecné řešení a řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$. [Řešení: $y = xe^{-x+1}$.]

7 7. týden – lineární diferenciálních rovnice s konstatními koeficienty I.

Cvičení konané 9. 11. 2021.

Připomeňme, jak najít partikulárních řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Uvažme takovou rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = e^{\alpha x}\big(P_\ell(x)\cos(\beta x) + Q_k(x)\sin(\beta x)\big)$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ a na pravé straně $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P_\ell(x)$ je polynom stupně ℓ a $Q_k(x)$ je polynom stupně k. Pro tento typ pravé strany existuje partikulární řešení tvaru

$$y(x) = x^s e^{\alpha x}\big(R_r(x)\cos(\beta x) + T_r(x)\sin(\beta x)\big)$$

kde $R_r(x)$ a $T_r(x)$ jsou polynomy stupně $r := \max\{\ell, k\}$ a s je násobnost $\alpha + i\beta$ jakožto kořene charakteristického polynomu diferenciální rovnice.

Příklad 7.1: Najděte řešení rovnice $y'' = 2y' - y + 1$ splňující $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$. [Řešení: $-e^x + 2xe^x + 1$.]

Příklad 7.2: Najděte obecné řešení rovnic $y'' + 3y' + 2y = (x+1)e^{-3x}$ a $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$. [Řešení: $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (\frac{1}{2}x + \frac{5}{4})e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ a $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + xe^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.]

8 8. týden – lineární diferenciálních rovnice s konstatními koeficienty II.

Cvičení konané 9. 11. a 16. 11. 2021.

Příklad 8.1: Najděte všechna řešení rovnice $y'' + y' = x^2 - x + 6e^{2x}$. [Řešení: $C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.]

Příklad 8.2: Najděte všechna řešení rovnice $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x}\cos x$. [Řešení: $C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\cos x + \frac{3}{2}xe^{-x}\sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.]

Příklad 8.3: Najděte všechna řešení rovnice $y^{(5)} + y^{(3)} = x^2 - 1$. [Řešení: $C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\sin x + C_5\cos x + x^3(\frac{1}{60}x^2 - \frac{1}{2})$, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$.]

Příklad 8.4: Najděte všechna řešení rovnice $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 2$. [Řešení: nejprve použijte substituci $x = e^z$, čímž se původní rovnice převede na rovnici $\frac{d^2y}{dz^2} - 3\frac{dy}{dz} + 2y = e^{2z} + 2$ s neznámou funkcí $y = y(z)$.]

9 9. týden – soustavy diferenciálních rovnic s konstatními koeficienty

Cvičení konané 23. 11. 2021.

Příklad 9.1: Napište diferenciální rovnici popisující všechny

a) přímky

a) kružnice

v rovině $\mathbb{R}^2$.

Příklad 9.2: Řešte soustavu rovnic

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} y,$$

kde $y(x)$ je vektorová funkce se třemi složkami. [Řešení:

$$y(x) = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.3: Řešte soustavu rovnic

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y,$$

s počáteční podmínkou $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, kde $y(x)$ je vektorová funkce se dvěma složkami.

Příklad 9.4: Řešte soustavu rovnic

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} y,$$

kde $y(x)$ je vektorová funkce se třemi složkami.

Příklad 9.5: Řešte soustavu rovnic

$$y' = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -25 & -13 \end{pmatrix} y,$$

kde $y(x)$ je vektorová funkce se dvěma složkami.

10 10. týden – úvod do teorie grafů

Cvičení konané 30. 11. 2021.

Příklad 10.1: Rozmyslete si počty vrcholů, hran, stupně, skóre, matici apod. grafů K_6, $K_{4,5}$, C_7, P_6.

Příklad 10.2:

(a) Kolik existuje různých grafů na na n vrcholech? (Rozlišujeme pojmenování vrcholů, různé grafy mohou být izomorfní.)

(b) Mějme množinu vrcholů $V = V_1 \cup V_2$ s pevně zadaným rozdělením vrcholů na dvě podmnožiny $V = V_1 \cup V_2$. Kolik existuje různých bipartitních $G = (V, E)$, je-li $m = |V_1|$ a $n = |V_2|$? (Rozlišujeme pojmenování vrcholů, různé grafy mohou být izomorfní.)

[Řešení: $2^{\binom{n}{2}}$ a 2^{mn}.]

Příklad 10.3:

(a) Kolik existuje různých bipartitiních grafů na tříprvkové množině vrcholů při rozlišení vrcholů? A kolik jich bude navzájem neizomorfních?

(b) Který bipartitiní graf na n-prvkové množině vrcholů má nejvíce hran?

Příklad 10.4: Určete počet podgrafů grafu K_5. [Řešení: 1450]

Příklad 10.5: Určete, kolik existuje různých cest mezi pevně zvolenými vrcholy v grafu K_7. [Řešení: 326.]

Příklad 10.6: Určete, kolik existuje různých cyklů v grafu K_5. [Řešení: 37.]

Příklad 10.7: Kolik existuje sledů délky 4 mezi vrcholy 1 a 2 v grafu zadaném maticí sousednosti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

11 11. týden – grafy: 'friendship' graf, souvislost, Eulerovské tahy

Cvičení konané 7. 12. 2021.

Příklad 11.1: (Friendship theorem) Mějmě skupinu n osob takovou, že každá dvojice má mezi ostatními právě jednoho společného známého. Dokažte, že pak v této skupině existuje jedinec, který se zná se všemi ostatními.

Příklad 11.2:

(a) Kolik komponent má graf s deseti vrcholy stupně 5? Dokažte. [Řešení: jedna komponenta.]

(b) Kolik komponent může mít graf s deseti vrcholy stupně 2? Dokažte. [Řešení: jedna, dvě nebo tři komponenty.]

Příklad 11.3: Určete stupeň souvislosti bipartitiního grafu $K_{m,n}$. [Řešení: $\min\{m, n\}$.]

Příklad 11.4: Uvažme graf G, který vznikne z bipartitiního grafu $K_{3,3}$ odstraněním jedné hrany.

(a) Je možno graf G nakreslit jedním uzavřeným tahem? [Řešení: ne.]

(b) Je možno graf G nakreslit jedním otevřeným tahem? [Řešení: ne.]

(c) Je možno graf G nakreslit dvěma otevřenými tahy? [Řešení: ano.]

(d) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu G, aby jej bylo možno nakreslit jedním otevřeným tahem? [Řešení: 1 hranu.]

(e) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu G, aby jej bylo možno nakreslit jedním uzavřeným tahem? [Řešení: 2 hrany.]

Příklad 11.5: Uvažme ohodnocený graf zadaný maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} > 0$ udává dálku hrany i-tého do j-tého vrcholu. Pomocí Dijkstrova algoritmu určete délku nejkratších cest z prvního vrcholu do všech ostatních.

12 12. týden – algoritmy na hledání minimální kostry

Cvičení konané 5. 1. 2021.

13 13. týden – hledání maximálního toku v sítích, konzultace diferenciálních rovnic

Cvičení konané 12. 1. 2021.