

1. domácí úkol – MIN301 – podzim 2021 – odevzdat do **1.10.2021**

Spočtěte následující limity nebo ukažte, že limita neexistuje:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sin x \sin y}$.
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.
4. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{2x^3 + 3x(y-1)^2 + 4x(z-2)^2}{x^2 + 2(y-1)^2 + 3(z-2)^2}$.

Řešení:

1. Vynásobením čitatele i jmenovatele výrazem $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ a po následující úpravě zjistíme, že limita je rovna nule.
2. Když se k bodu $(0,0)$ blížíme po přímce (x, cx) , dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + (cx)^2)}{\sin x \sin(cx)} = \dots = \frac{1 + c^2}{c},$$

kde část \dots je aplikace L'Hospitalova pravidla a využití známé limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tedy limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sin x \sin y}$ neexistuje.

3. Když se k bodu $(0,0)$ blížíme po přímce (x, cx) , je limita nulová. Když se ale budeme blížit po parabole (x, x^2) , dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Limita tedy neexistuje.

4. Platí $2x^2 + 3(y-1)^2 + 4(z-2)^2 \leq 2(x^2 + 2(y-1)^2 + 3(z-2)^2)$, tj.

$$0 \leq \frac{2x^2 + 3(y-1)^2 + 4(z-2)^2}{x^2 + 2(y-1)^2 + 3(z-2)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{2x^3 + 3(y-1)^3 + 4(z-2)^3}{x^2 + 2(y-1)^2 + 3(z-2)^2} &= \\ &= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} x \cdot \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{2x^2 + 3(y-1)^2 + 4(z-2)^2}{x^2 + 2(y-1)^2 + 3(z-2)^2} = 0. \end{aligned}$$