

# Matematická analýza 1

## Pojem funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

13.9.2021

# Funkce

## Definice

Nechť jsou dány neprázdné množiny  $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$ . Předpis  $f$ , který každému  $x \in D$  přiřazuje právě jedno  $y \in H$ , nazýváme *funkcí* jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

Množina  $D$  se nazývá *definiční obor* funkce  $f$  a značí se  $D(f)$ , množina  $H$  se nazývá *obor hodnot* funkce  $f$  a značí se  $H(f)$ .

Co je na tom špatně?

# Zobrazení je základ

## Definice

*Kartézským součinem*  $A \times B$  dvou množin  $A$  a  $B$  rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic  $(x, y)$ , kde  $x \in A$  a  $y \in B$  jsou libovolné prvky.

*Binární relací* rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu  $A \times B$ . V případě, že  $A = B$ , používáme název *binární relace na množině*  $A$ .

## Definice

Relaci  $f \subseteq A \times B$  nazveme *zobrazením* množiny  $A$  do množiny  $B$ , jestliže platí, že ke každému prvku  $x \in A$  existuje právě jeden prvek  $y \in B$  takový, že  $(x, y) \in f$ .

Množinu  $A$  nazýváme *definiční obor*  $f$  a značíme  $D(f)$ . Množinu všech prvků  $y \in B$  takových, že existuje  $x \in A$  s vlastností  $(x, y) \in f$ , nazýváme *obor hodnot*  $f$  a značíme  $H(f)$ .

# Funkce a její graf

## Definice

Bud'  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Zobrazení  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme *reálnou funkcí reálné proměnné* nebo stručně *funkcí jedné proměnné*.

Množina  $M$  se nazývá definiční obor funkce  $f$  a značí se  $D(f)$ , množina

$$H(f) := \{f(x) : x \in M\}$$

se nazývá *obor hodnot* funkce  $f$ .

## Definice

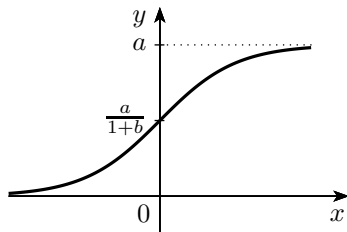
*Grafem* funkce  $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  je množina bodů

$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}.$$

# Typické (netypické) funkce

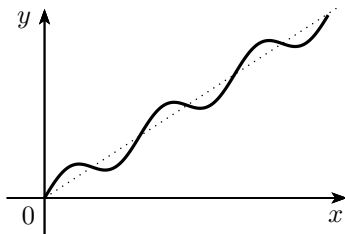
Logistická funkce (saturační proces)

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}}$$
$$a, b, c > 0$$



Trendová funkce s periodickými fluktuacemi

$$y = a + bx + c \sin dx$$
$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$



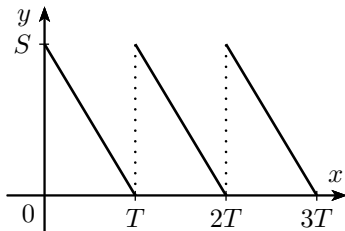
# Typické (netypické) funkce

„Zásobovací“ funkce

$$y = iS - \frac{S}{T}x$$

$$(i-1)T \leq x \leq iT$$

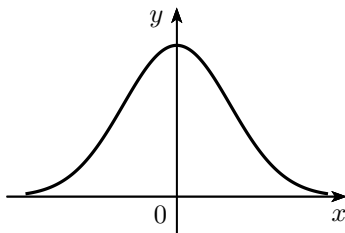
$$S, T > 0, i = 1, 2, \dots$$



Gaussova funkce

$$y = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$$



# Technikálie s nekonečnem

## Definice

Množinu  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , která je uspořádaná tak, že pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  platí  $-\infty < x < +\infty$ , nazýváme rozšířenou množinou reálných čísel.

Je-li  $c \in \mathbb{R}$ ,  $0 < k < +\infty$ ,  $-\infty < z < 0$  zavádíme

1.

$$c + (\pm\infty) = (\pm\infty) + c = \pm\infty,$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty$$

2.

$$k \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \quad z \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty, \quad -\infty \cdot (-\infty) = +\infty, \quad +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

3.

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0$$

# Intervaly a okolí

## Definice

Jsou-li

1.  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ , položíme  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ;
2.  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , položíme  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ;
3.  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ , položíme  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ;
4.  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , položíme  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ .

## Definice

Nechť  $x_0, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ . Pak interval  $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  nazveme *okolím* bodu  $x_0$ , interval  $[x_0, x_0 + \delta)$  *pravým okolím* bodu  $x_0$  a interval  $(x_0 - \delta, x_0]$  *levým okolím* bodu  $x_0$ . Množina  $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$  se nazývá *ryzí okolí* bodu  $x_0$ . Buď  $a \in \mathbb{R}$ . Pak interval  $\mathcal{O}(+\infty) = (a, +\infty)$  nazveme *okolím* bodu  $+\infty$  a interval  $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, a)$  nazveme *okolím* bodu  $-\infty$ .



# Vlastnosti funkcí

## Definice

Funkce  $f$  se nazývá *shora ohraničená*, jestliže existuje  $U \in \mathbb{R}$  takové, že  $f(x) \leq U$  pro každé  $x \in D(f)$ . Funkce  $f$  se nazývá *zdola ohraničená*, jestliže existuje  $L \in \mathbb{R}$  takové, že  $f(x) \geq L$  pro každé  $x \in D(f)$ . Funkce  $f$  se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje  $K \in \mathbb{R}$ ,  $K > 0$ , takové, že  $|f(x)| \leq K$  pro každé  $x \in D(f)$ .

## Definice

Řekneme, že funkce  $f$  je *sudá*, jestliže pro každé  $x \in D(f)$  platí  $-x \in D(f)$  a  $f(-x) = f(x)$ .

Řekneme, že funkce  $f$  je *lichá*, jestliže pro každé  $x \in D(f)$  platí  $-x \in D(f)$  a  $f(-x) = -f(x)$ .

## Definice

Nechť je dána funkce  $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  a interval  $I \subseteq D(f)$ . Pak funkci  $f$  nazveme

- *rostoucí na intervalu  $I$* , jestliže pro každá dvě  $x_1, x_2 \in I$  taková, že  $x_1 < x_2$ , je  $f(x_1) < f(x_2)$ ,
- *klesající na intervalu  $I$* , jestliže pro každá dvě  $x_1, x_2 \in I$  taková, že  $x_1 < x_2$ , je  $f(x_1) > f(x_2)$ ,
- *nerostoucí na intervalu  $I$* , jestliže pro každá dvě  $x_1, x_2 \in I$  taková, že  $x_1 < x_2$ , je  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ,
- *neklesající na intervalu  $I$* , jestliže pro každá dvě  $x_1, x_2 \in I$  taková, že  $x_1 < x_2$ , je  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Funkce, která má některou z uvedených vlastností, se nazývá *monotonní*. Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní*.

## Definice

Řekneme, že funkce  $f$  je *rostoucí v bodě*  $x_0$ , jestliže existuje okolí  $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  tak, že pro  $x_0 - \delta < x < x_0$  je  $f(x) < f(x_0)$  a pro  $x_0 < x < x_0 + \delta$  je  $f(x) > f(x_0)$ .

Analogicky se definuje funkce *klesající v bodě*, *neklesající v bodě* a *nerostoucí v bodě*. Společný název pro tyto čtyři vlastnosti je funkce *monotonní v bodě*, resp. pro první dvě funkce *ryze monotonní v bodě*.

## Věta

*Funkce je rostoucí na intervalu právě tehdy, když je rostoucí v každém jeho bodě.*

## Definice

Funkce  $f$  se nazývá *prostá*, právě když pro všechna  $x_1, x_2 \in D(f)$  platí: je-li  $x_1 \neq x_2$ , pak  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

## Definice

Funkce  $f$  se nazývá *periodická* s periodou  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p > 0$ , jestliže platí, že pro každé  $x \in D(f)$  je také  $x \pm p \in D(f)$  a  $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$ . Základní perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.

# Nové funkce ze starých

## Definice

Nechť  $u: A \rightarrow B$  a  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$  jsou funkce. Pak funkce  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  daná předpisem  $y = f(u(x))$  se nazývá *složená funkce*. Funkce  $u$  se nazývá *vnitřní složkou*, funkce  $f$  *vnější složkou* složené funkce  $F$ .

## Definice

*Inverzní funkcí* k prosté funkci  $f$  je funkce  $f^{-1}$ , pro kterou platí, že  $D(f^{-1}) = H(f)$  a ke každému  $y \in D(f^{-1})$  je přiřazeno právě jedno  $x \in D(f)$  takové, že  $f(x) = y$ .

## Věta

*Inverzní funkcí k funkci  $f$  rostoucí (klesající) na množině  $D(f)$  je rostoucí (klesající) funkce na množině  $H(f)$ .*