

Matematická analýza 1

Elementární funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

20.9.2021

Nové funkce ze starých

Definice

Nechť $g: D(g) \rightarrow \mathbb{R}$ a $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists u \in \mathbb{R} \mid (x, u) \in g \wedge (u, y) \in f\}$$

se nazývá *složená funkce*. Píšeme $F(x) = f(g(x))$. Funkce g se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou složené funkce F .

Definice

Nechť $g: A \rightarrow B$ a $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(g(x))$ se nazývá *složená funkce*. Funkce g se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou složené funkce F .

Definice

Inverzní funkcí k prosté funkci f je funkce f^{-1} , pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Věta

Inverzní funkcí k funkci f rostoucí (klesající) na množině $D(f)$ je rostoucí (klesající) funkce na množině $H(f)$.

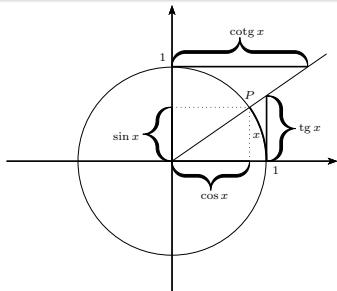
Goniometrické a cyklometrické funkce

Definice

Buď $x \in \mathbb{R}$. Nechť P je koncový bod oblouku na jednotkové kružnici, jehož počáteční bod je $[1, 0]$ a jehož délka je $|x|$; přitom oblouk je od bodu $[1, 0]$ k bodu P orientován v protisměru, resp. ve směru chodu hodinových ručiček podle toho, zda $x \geq 0$, resp. $x < 0$. Pak první souřadnici bodu P nazýváme $\cos x$ a druhou souřadnici $\sin x$. Dále definujeme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ nazýváme funkce *goniometrické*.



Definice

Inverzní funkce k funkci $\sin x$ definované na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se označuje $\arcsin x$.

Inverzní funkce k funkci $\cos x$ definované na $[0, \pi]$ se označuje $\arccos x$.

Inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se označuje $\operatorname{arctg} x$.

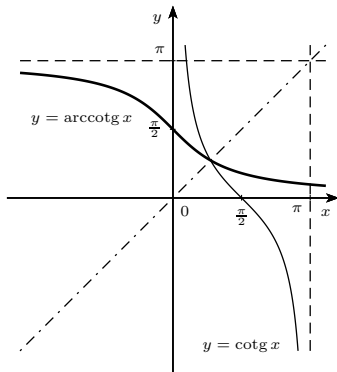
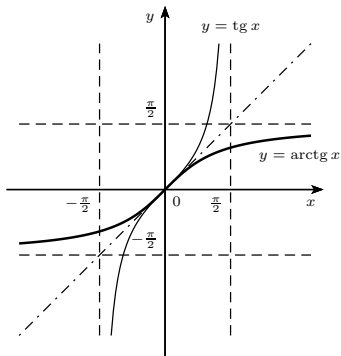
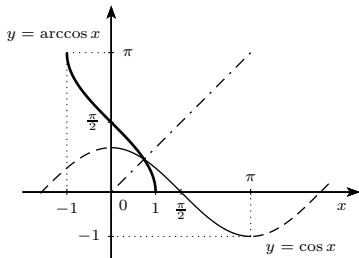
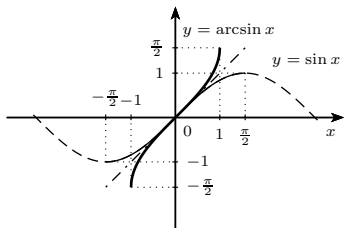
Inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na $(0, \pi)$ se označuje $\operatorname{arccotg} x$.

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ nazýváme *cyklometrické funkce*.

Věta

Cyklometrické funkce mají následující vlastnosti.

- 1. Funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$ jsou rostoucí, funkce $\arccos x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou klesající.*
- 2. Funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$ jsou liché.*



Polynom

Definice

Funkci $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad \text{kde } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem*. Čísla a_i se nazývají *koefficienty* polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n nazveme *stupněm* polynomu.

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P , jestliže

$$P(\alpha) = 0.$$

Číslo α je *k-násobným kořenem* polynomu P , existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q , tj. $Q(\alpha) \neq 0$. Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá *násobnost kořene* α polynomu P .

Věta

Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ je polynom stupně $n \geq 0$.

1. (Základní věta algebry.) Polynom P má nad komplexním oborem \mathbb{C} právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.
2. Je-li komplexní číslo α k -násobným kořenem reálného polynomu P , je číslo komplexně sdružené $\bar{\alpha}$ též k -násobným kořenem polynomu P .
3. (Rozklad polynomu v oboru reálných čísel.) Jsou-li $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ všechny reálné kořeny polynomu P s násobnostmi k_1, \dots, k_r a $(c_1 \pm id_1), \dots, (c_s \pm id_s)$ všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených kořenů s násobnostmi r_1, \dots, r_s , platí

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_r)^{k_r} [(x - c_1)^2 + d_1^2]^{r_1} \dots [(x - c_s)^2 + d_s^2]^{r_s}.$$

4. Nechť $a_n = 1$. Je-li celé číslo α kořenem polynomu P s celočíselnými koeficienty, pak α je dělitelem čísla a_0 .

Racionální lomená funkce a parciální zlomky

Definice

Buďte P , Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce*. Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\text{st } P < \text{st } Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\text{st } P \geq \text{st } Q$.

Rozklad na parciální zlomky

Každou ryze lomenou funkci $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lze rozložit na součet *parciálních zlomků* následujícím způsobem:

- a) Je-li číslo α reálný k -násobný kořen polynomu Q , pak rozklad obsahuje součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k}.$$

- b) Jsou-li čísla $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené k -násobné kořeny polynomu Q , pak rozklad obsahuje parciální zlomky tvaru

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}.$$

kde $ax^2 + bx + c$ má kořeny $\alpha \pm i\beta$.