Matematická analýza 1

Limita funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

27.9.2021

Exponenciální a logaritmická funkce

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $c \in \mathbb{R}$. Pro $a > 1$ definujme

$$a^c = \sup \{a^x : x \in \mathbb{Q}, x \leq c\} \, .$$

Pro $a = 1$ položmě $a^c = 1^c = 1$ a pro $0 < a < 1$ definujme $a^c = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$.

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Funkci f určenou předpisem $f(x) = a^x$ nazveme exponenciální funkcí o základu a.

Věta

Exponenciální funkce $f(x) = a^x$ má tyto vlastnosti:

1. *$D(f) = \mathbb{R}$ a $H(f) = (0, +\infty)$ pro $a \neq 1$, $H(f) = \{1\}$ pro $a = 1$.*
2. *Funkce f je rostoucí v $\mathbb{R}$ pro $a > 1$, klesající v $\mathbb{R}$ pro $a < 1$ a konstantní v $\mathbb{R}$ pro $a = 1$.*

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funkce inverzní k funkci $y = a^x$ se nazývá logaritmická funkce o základu a, značí se $y = \log_a x$.

Věta

Logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = (0, +\infty)$, $H(f) = (-\infty, +\infty)$.
2. *Funkce f je rostoucí na $(0, +\infty)$ pro $a > 1$ a klesající na $(0, +\infty)$ pro $a < 1$.*
3. *Pro $x, y \in (0, +\infty)$ a $z \in \mathbb{R}$ platí*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^z = z \log_a x.$$

4. *Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ a $x \in (0, +\infty)$ platí*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Mocninná funkce

Definice

Buď $s \in \mathbb{R}$. Pro $x > 0$ definujeme funkci $y = x^s$ a nazýváme ji *mocninnou funkcí.*

Věta

Mocninná funkce $f(x) = x^s$ *má tyto vlastnosti:*

1. $D(f) = (0, +\infty)$ *a* $H(f) = (0, +\infty)$ *pro* $s \neq 0$, $H(f) = \{1\}$ *pro* $s = 0$.
2. *Funkce* f *je rostoucí v* $(0, +\infty)$ *pro* $s > 0$, *klesající v* $(0, +\infty)$ *pro* $s < 0$ *a konstantní v* $(0, +\infty)$ *pro* $s = 0$.
3. *Platí* $f(x) = x^s \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^s = \mathrm{e}^{s \ln x}$ *pro* $x \in (0, +\infty)$.

Poznámka

Je-li $s \in \mathbb{Q}$, definujeme x^s pro $x < 0$, právě když v základním tvaru $\frac{m}{n}$ čísla s je číslo n liché. Pak klademe $x^s = \sqrt[n]{x^m}$ a $\sqrt[1]{a} = a$.

$$x^{\frac{2}{2}} \stackrel{?}{=} \sqrt{x^2}$$

Limita funkce

Definice limity pomocí okolí

Definice

Nechť x_0, $L \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu* rovnu číslu L a píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$. Píšeme $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Pomocí kvantifikátorů lze psát

$$\forall \mathcal{O}(L)\, \exists \mathcal{O}(x_0)\, \forall x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\} \colon f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

ε–δ definice

Definice

Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definice

Řekneme, že $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \, \exists A > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \colon x > A \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

atd.

„Naivní“ definice

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu rovnu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Jednostranné limity

Definice

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^\star$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu zprava rovnu číslu L a píšeme $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, jestliže

$$\forall \mathcal{O}(L)\, \exists \delta > 0\, \forall x \in (x_0, x_0+\delta)\colon f(x) \in \mathcal{O}(L).$$

Podobně definnujeme limitu zleva $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

Opět „naivně“ řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zleva rovnu L, píšeme

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x menší než x_0 a dostatečně blízké hodnotě x_0.

Věty o limitách

Věta

Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$, pak existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že f je na $\mathcal{O}(x_0)$ ohraničená.

Věta

Platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\,.$$

Věta

Nechť existují obě vlastní limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$. *Pak platí:*

a) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,

b) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,

c) Je-li $L_2 \neq 0$, *pak* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$,

d) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$.

Věta

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. *Jestliže pro funkci* g *existuje okolí* $\mathcal{O}(x_0)$ *bodu* x_0 *takové, že* g *je v něm ohraničená, pak* $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Věta

Nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, *v němž platí* $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$. *Jestliže* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} h(x)$, *pak* $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$.

Věta

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^\star$.

1. *Jestliže* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, *pak* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
2. *Jestliže* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *a existuje* $\mathcal{O}(x_0)$ *takové, že pro všechna* $x \in \mathcal{O}(x_0)$ *je* $f(x) > 0$, *pak* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
3. *Jestliže* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *a existuje* $\mathcal{O}(x_0)$ *takové, že pro všechna* $x \in \mathcal{O}(x_0)$ *je* $f(x) < 0$, *pak* $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Nevíme

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$