

Matematická analýza 1

Spojitost

Petr Liška

Masarykova univerzita

4.10.2021

Spojítost funkce v bodě

Definice

Bud' $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá*, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Podobně definujeme i jednostranné spojitosti – funkce f je v bodě x_0 *spojitá zprava*, resp. *spojitá zleva*, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0), \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Věta

Jsou-li funkce f, g spojité v bodě x_0 , jsou také funkce $f \pm g, f \cdot g$ spojité v bodě x_0 . Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je v x_0 spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta

Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \alpha$ a funkce f je spojitá v bodě α . Pak platí, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\alpha)$.

Věta

Je-li funkce $u = \varphi(x)$ spojitá v x_0 a $y = f(u)$ spojitá v bodě $u_0 = \varphi(x_0)$, je funkce $y = f(\varphi(x))$ spojitá v bodě x_0 .

Věta

Následující funkce jsou spojité v každém bodě $x \in \mathbb{R}$:

1. $f(x) = c$,
2. $f(x) = x$,
3. polynom,
4. racionální lomená funkce (v každém bodě, v kterém je definovaná),
5. $\sin x$, $\cos x$,
6. $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ (všude, kde jsou definovány),
7. a^x , ($a > 0$).

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$ jsou spojité na $[-1, 1]$, funkce $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ spojité na \mathbb{R} .

Funkce $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, je spojitá na $(0, +\infty)$.

Funkce x^s , $s \in \mathbb{R}$, je spojitá na svém definičním oboru.

Spojitosť funkce na intervalu

Definice

Bud' f funkce, $I \subseteq D(f)$ interval. Řekneme, že f je *spojitá na intervalu* I , jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I a patří-li levý (pravý) koncový bod do I , je v něm spojitá zprava (zleva). Píšeme $f \in C(I)$ a je-li $I = [a, b]$, také $f \in C[a, b]$.

Věta

Nechť f je ryze monotonní a spojitá funkce na intervalu $I \subseteq D(f)$. Pak inverzní funkce f^{-1} je spojitá a ryze monotonní na intervalu $J = f(I)$.

Vlastnosti spojitych funkcí

Věta (Weierstrassova věta)

Nechť $f \in C[a, b]$. Pak je f na tomto intervalu ohraničená a nabývá v něm své největší i nejmenší hodnoty.

Věta (Bolzanova věta)

Nechť $f \in C[a, b]$. Pak f nabývá na tomto intervalu všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

Důsledek

Nechť $f \in C[a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f(\xi) = 0$.