Matematická analýza 1

Derivace funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

11.10.2021

Definice

Buď f funkce a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce* f *v bodě* x_0 a značíme $f'(x_0)$. Je-li tato limita vlastní, nazývá se číslo $f'(x_0)$ *vlastní derivací* funkce f v bodě x_0, je-li tato limita nevlastní, nazývá se $f'(x_0)$ *nevlastní derivací* funkce f v bodě x_0.

Položíme-li $h = x - x_0$, lze derivaci zapsat ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Podobně definujeme *derivace zprava* a *derivace zleva*:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Věta

Nechť mají funkce f, g vlastní derivaci na množině M. Pak platí:

- *a)* $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$, $c \in \mathbb{R}$,
- *b)* $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$,
- *c)* $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- *d) je-li* $g(x) \neq 0$, *pak* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Věta

Nechť funkce $u = g(x)$ *má vlastní derivaci v bodě* x_0 *a nechť funkce* $y = f(u)$ *má vlastní derivaci v bodě* $u_0 = g(x_0)$*. Pak složená funkce* $y = F(x) = f\left(g(x)\right)$ *má vlastní derivaci v bodě* x_0 *a platí:*

$$F'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

Věta

Nechť funkce $x = f(y)$ *je spojitá a ryze monotonní na intervalu* I*. Nechť* y_0 *je vnitřní bod intervalu* I *a nechť má* f *v* y_0 *derivaci* $f'(y_0)$*. Pak má inverzní funkce* $y = f^{-1}(x)$ *v bodě* $x_0 = f(y_0)$ *rovněž derivaci.*

i) Je-li $f'(y_0) \neq 0$*, je derivace inverzní funkce vlastní a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}.$$

ii) Je-li $f'(y_0) = 0$*, je derivace inverzní funkce nevlastní, přičemž pro* f *rostoucí* $\left(f^{-1}\right)'(x_0) = +\infty$ *a* $\left(f^{-1}\right)'(x_0) = -\infty$ *pro* f *klesající.*

Věta

Pro derivace elementárních funkcí platí:

$$
\begin{aligned}
c' &= 0, & (x^a)' &= a x^{a-1}, \\
(\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, \\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{x^2+1}, & (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{x^2+1}, \\
(e^x)' &= e^x, & (a^x)' &= a^x \cdot \ln a, \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}, & \left(\log_a x\right)' &= \frac{1}{x \ln a},
\end{aligned}
$$

kde $a \in \mathbb{R}$ *a* $c \in \mathbb{R}$. *Tyto vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definovány.*

Definice

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme *n-tou derivaci* (derivaci n-tého řádu) funkce f vztahem

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' .$$

Z geometrického významu derivace plyne, že funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když její graf má v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu se směrnicí $f'(x_0)$. Rovnice této tečny je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pro rovnici normály, tj. přímky kolmé k tečně a procházející dotykovým bodem, platí

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), && \text{je-li } f'(x_0) \neq 0, \\ x &= x_0, && \text{je-li } f'(x_0) = 0 . \end{aligned}$$