Matematická analýza 1

Další vlastnosti derivace

Petr Liška

Masarykova univerzita

18.10.2021

Lemma

Nechť $f'(x_0) > 0$*. Pak funkce* f *je rostoucí v bodě* x_0*. Je-li* $f'(x_0) < 0$*, pak funkce* f *je klesající v bodě* x_0*.*

Věta (Rolleova)

Nechť funkce $f \in C[a, b]$ *má v každém bodě intervalu* (a, b) *vlastní nebo nevlastní derivaci a nechť* $f(a) = f(b)$*. Pak existuje* $c \in (a, b)$ *tak, že* $f'(c) = 0$*.*

Věta (Cauchyova)

Nechť f*,* $g \in C[a, b]$ *a nechť v každém bodě* $x \in (a, b)$ *existují vlastní derivace* $f'(x)$*,* $g'(x)$*. Pak existuje* $c \in (a, b)$ *tak, že platí*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)\,.$$

Věta (Lagrange)

Nechť $f \in C[a,b]$ *a nechť v každém bodě* $x \in (a,b)$ *existuje vlastní nebo nevlastní derivace* $f'(x)$*. Pak existuje* $c \in (a,b)$*, pro které platí*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Důsledek

Nechť funkce f *a* g *mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu* I*. Jestliže pro všechna* $x \in I$ *platí* $f'(x) = g'(x)$*, pak se funkce* f*,* g *liší o konstantu, tj. existuje* $c \in \mathbb{R}$ *takové, že* $f(x) = g(x) + c$*. Zejména jestliže* $f'(x) = 0$ *na* I*, je* f *na* I *konstantní.*

L'Hospitalovo pravidlo

Věta

Buď $x_0 \in \mathbb{R}^\star$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné limity.