Matematická analýza 1

Apliakce derivace I

Petr Liška

Masarykova univerzita

25.10.2021

Věta

Nechť má funkce f na otevřeném intervalu I vlastní derivaci. Pak platí:

1. *Funkce f je neklesající (nerostoucí) na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ ($f' \leq 0$) na I.*
2. *Funkce f je rostoucí (klesající) na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ ($f' \leq 0$) na I, přičemž rovnost $f' = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Důsledek

Nechť f má konečnou derivaci na otevřeném intervalu I.

1. *Je-li $f' > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I.*
2. *Je-li $f' < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I.*

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

a) *lokální maximum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,

b) *lokální minimum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,

c) *ostré lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,

d) *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Věta (Fermatova)

Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.

Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce.

Věta

Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 a má vlastní derivaci v nějakém ryzím okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Jestliže pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x < x_0$, je $f' > 0$ a pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$, $x > x_0$, je $f' < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum. (Obdobné tvrzení platí pro lokální minimum).

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$, tj. x_0 je stacionární bod.

a) Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

b) Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Příklad

Určete lokální extrémy funkce

$$y = \frac{x^2}{4 - x^3}$$

Příklad

Určete lokální extrémy funkce

$$y = \ln^2 x$$

Příklad

Ve městě s 10 000 obyvateli je počet N lidí, kteří mají v daném čase t chřipku, roven

$$N(t) = \frac{10000}{1 + 9999\mathrm{e}^{-t}},$$

kde t je čas měřený ve dnech a chřipka je rozšířena jedinou osobou, která ji měla v čase $t = 0$. Určete, kdy je rychlost šíření nemoci největší.

Definice

Buď funkce f definovaná na množině M. Jestliže $x_0 \in M$ a platí

$$f(x) \leq f(x_0)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M *absolutní maximum* v bodě x_0. Podobně definujeme *absolutní minimum*.

Postup pro nalezení absolutních extrémů:

1. Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace.
2. Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
3. Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
4. Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude absolutní maximum a minimum.

Příklad

Najděte absolutní extrémy funkce:

$$f(x) = x - x^2, \qquad x \in [0,1]$$

$$f(x) = x^2 \ln x, \qquad x \in [1,\mathrm{e}]$$

Příklad

Farma může prodat 20 beden úrody týdně při ceně 400 Kč. Majitel odhaduje, že při snížení ceny o 10 Kč prodá o dvě bedny více. Výrobní náklady jsou 200 Kč na jednu bednu. Jaká je optimální cena bedny úrody pro maximalizaci zisku a jak velký tento zisk bude?