Matematická analýza 1

Aplikace derivace II aneb průběh funkce

Petr Liška

Masarykova univerzita

1.11.2021

Konvexní a konkávní funkce

Definice

Řekneme, že funkce f je *konvexní na intervalu* I, jestliže pro libovolné tři body x_1, x_2, $x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)\,.$$

Řekneme, že funkce f je *konkávní na intervalu* I, jestliže pro libovolné tři body x_1, x_2, $x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)\,.$$

Nahradíme-li neostré nerovnosti ostrými, dostaneme definici pojmů *ostré konvexnosti* a *ostré konkávnosti*.

Definice

Nechť f je funkce s definičním oborem $D(f)$. *Nadgrafem* funkce f rozumíme rovinnou množinu

$$G_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in D(f) \text{ a } y \geq f(x)\right\} .$$

Věta

Nechť funkce f je definovaná na intervalu I. Pak jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

a) Funkce f je konvexní na I.

b) Pro libovolné různé body x_1, $x_2 \in I$ a libovolná čísla λ_1, $\lambda_2 \in (0,1)$ taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí nerovnost

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) .$$

c) Nadgraf funkce f je konvexní množina.

Věta

Nechť f má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Pak je f konvexní (ostře konvexní) na I právě tehdy, když je funkce f' neklesající (rostoucí) na I.

Důsledek

Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I.

a) *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ostře konvexní na I.*
b) *Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ostře konkávní na I.*

Věta aneb neekvivalentní definice

Definice

Nechť funkce f má vlastní derivaci a platí-li

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konvexní* na intervalu I.

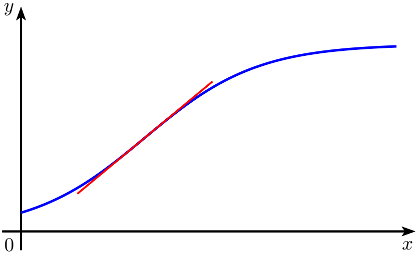
Platí-li, že

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konkávní* na intervalu I.

Definice

Nechť má funkce f derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Je-li tato derivace nevlastní, předpokládáme navíc, že je f spojitá v bodě x_0.
Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže existuje $\mathcal{O}(x_0)$ takové, že funkce f je ostře konkávní na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ a je ostře konvexní na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ anebo naopak.



Věta

a) *Nechť* x_0 *je inflexní bod a nechť existuje* $f''(x_0)$. *Pak* $f''(x_0) = 0$.

b) *Nechť* $f''(x_0) = 0$ *a existuje okolí bodu* $\mathcal{O}(x_0)$ *takové, že platí* $f''(x) < 0$ *pro* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *a* $f''(x) > 0$ *pro* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, *nebo naopak. Pak má funkce* f *v bodě* x_0 *inflexní bod.*

c) *Nechť* $f''(x_0) = 0$ *a* $f'''(x_0) \neq 0$. *Pak je* x_0 *inflexním bodem funkce* f.

Příklad

Určete intervaly, ve kterých je funkce

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

konvexní/konkávní, případně určete její inflexní body.

Asymptoty funkce

Definice

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce f, jestliže má f v x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

nebo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Přímka $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, se nazývá *asymptotou se směrnicí* funkce f, jestliže platí

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

nebo

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Věta

Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$, jestliže

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$$

(obě tyto limity jsou vlastní). Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

Příklad

Určete asymptoty grafu funkce

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Vyšetření průběhu funkce

1. Stanovíme definiční obor $D(f)$. Určíme nulové body a intervaly, kde je funkce kladná a kde záporná. Případně zda je funkce f sudá, lichá nebo periodická.
2. Vypočítáme f' a podle jejího znaménka určíme:

   intervaly, kde je f rostoucí (z podmínky $f' > 0$),
   intervaly, kde je f klesající (z podmínky $f' < 0$),
   lokální extrémy (podle změny znaménka f').
3. Vypočítáme f'' a podle jejího znaménka určíme:

   intervaly, kde je f konvexní (z podmínky $f'' > 0$),
   intervaly, kde je f konkávní (z podmínky $f'' < 0$),
   inflexní body (podle změny znaménka f'').
4. Najdeme asymptoty funkce f.
5. Nakreslíme graf funkce.