Matematická analýza 1

Elementární funkce po druhé

Petr Liška

Masarykova univerzita

08.11.2021

Obecná mocnina

Věta

Budiž $a > 0$, $n > 0$, n celé. Potom existuje jedno a jen jedno kladné číslo x, splňující rovnici $x^n = a$.

Věta

Je-li $z_1, z_2, \dots$ libovolná posloupnost racionálních čísel, pro kterou je $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, potom existuje limita $\lim_{n\to\infty} x^{z_n} = \alpha$. Toto číslo α je kladné a závisí pouze na x. Definujeme $\alpha = x^z$.

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $c \in \mathbb{R}$. Pro $a > 1$ definujeme

$$a^c = \sup\left\{a^x \colon x \in \mathbb{Q}, x \leq c\right\} .$$

Pro $a = 1$ položme $a^c = 1^c = 1$ a pro $0 < a < 1$ definujeme $a^c = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$.

Mocninná funkce

Definice

Buď $s \in \mathbb{R}$. Pro $x > 0$ definujeme funkci $y = x^s$ a nazýváme ji *mocninnou funkcí.*

Věta

Mocninná funkce $f(x) = x^s$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = (0, +\infty)$ *a* $H(f) = (0, +\infty)$ *pro* $s \neq 0$, $H(f) = \{1\}$ *pro* $s = 0$.
2. *Funkce f je rostoucí v $(0, +\infty)$ pro $s > 0$, klesající v $(0, +\infty)$ pro $s < 0$ a konstantní v $(0, +\infty)$ pro $s = 0$.*
3. *Platí* $f(x) = x^s \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^s = \mathrm{e}^{s \ln x}$ *pro* $x \in (0, +\infty)$.

Poznámka

Je-li $s \in \mathbb{Q}$, definujeme x^s pro $x < 0$, právě když v základním tvaru $\frac{m}{n}$ čísla s je číslo n liché. Pak klademe $x^s = \sqrt[n]{x^m}$ a $\sqrt[1]{a} = a$.

$$x^{\frac{2}{2}} \stackrel{?}{=} \sqrt{x^2}$$

Exponenciální a logaritmická funkce

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Funkci f určenou předpisem $f(x) = a^x$ nazveme exponenciální funkcí o základu a.

Věta

Exponenciální funkce $f(x) = a^x$ má tyto vlastnosti:

1. *$D(f) = \mathbb{R}$ a $H(f) = (0, +\infty)$ pro $a \neq 1$, $H(f) = \{1\}$ pro $a = 1$.*
2. *Funkce f je rostoucí v $\mathbb{R}$ pro $a > 1$, klesající v $\mathbb{R}$ pro $a < 1$ a konstantní v $\mathbb{R}$ pro $a = 1$.*

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funkce inverzní k funkci $y = a^x$ se nazývá logaritmická funkce o základu a, značí se $y = \log_a x$.

Věta

Logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = (0, +\infty)$, $H(f) = (-\infty, +\infty)$.
2. *Funkce f je rostoucí na $(0, +\infty)$ pro $a > 1$ a klesající na $(0, +\infty)$ pro $a < 1$.*
3. *Pro $x, y \in (0, +\infty)$ a $z \in \mathbb{R}$ platí*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^z = z \log_a x.$$

4. *Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ a $x \in (0, +\infty)$ platí*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$