5. Aplikace teorie čísel

5.1. Výpočetní aspekty teorie čísel. V mnoha praktických úlohách využívajících výsledky teorie čísel je zapotřebí umět rychle provést jeden či více z následujících výpočtů:

(1) běžné aritmetické operace (součet, součin, dělení se zbytkem) na celých číslech,
(2) zbytek mocniny celého čísla a na přirozené číslo n po dělení daným m.
(3) inverzi celého čísla a modulo $m \in \mathbb{N}$,
(4) největší společný dělitel dvou celých čísel (a případně koeficienty do Bezoutovy rovnosti),
(5) rozhodnout o daném čísle, je-li prvočíslo nebo složené,
(6) v případě složenosti rozložit dané číslo na součin prvočísel.

Základní aritmetické operace se i na velkých číslech obvykle provádějí obdobně jako jsme se to učili na základní a střední škole, kdy umíme sčítat v *lineárním*, násobit a dělit se zbytkem v *kvadratickém* čase. Pro **násobení**, které je základem mnoha dalších operací, existují asymptoticky rychlejší algoritmy (typu *rozděl a panuj*) - např. první takový Karatsubův (1960) časové náročnosti $\Theta(n^{\log_2 3})$ nebo algoritmus Schönhage-Strassenův (1971) časové náročnosti $\Theta(n \log n \log \log n)$, který využívá tzv. Fast Fourier Transform. Ten je ale přes svou asymptotickou převahu výhodný až pro násobení čísel majících alespoň desítky tisíc cifer (a používá se tak např. v GIMPS).

$\Theta(n^2)$

Pěkný přehled je např. na `http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_complexity_of_mathematical_operations`

GCD a modulární inverze. Jak už jsme ukazovali dříve, výpočet řešení kongruence $a \cdot x \equiv 1 \pmod{m}$ s neznámou x lze snadno (díky Bezoutově větě) převést na výpočet největšího společného dělitele čísel a a m a na hledání koeficientů k, l do Bezoutovy rovnosti $k \cdot a + l \cdot m = 1$ (nalezené k je pak onou hledanou inverzí a modulo m).

$k \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$

```
function extended_gcd(a, m)
    if m == 0
        return (1, 0)
    else
        (q, r) := divide (a, m)
        (k, l) := extended_gcd(m, r)
        return (l, k - q * l)
```

Podrobná analýza (viz např. `[Knuth] nebo [Wiki]`) ukazuje, že tento algoritmus je **kvadratické** časové složitosti.

Modulární umocňování je, jak jsme již viděli dříve, velmi využívaná operace mj. při ověřování, zda je dané číslo prvočíslo nebo číslo složené.

Jedním z efektivních algoritmů je tzv. **modulární umocňování zprava doleva**:

```
function modular_pow(base, exponent, modulus)
    result := 1
    while exponent > 0
      if (exponent mod 2 == 1):
        result := (result * base) mod modulus
      exponent := exponent >> 1
      base = (base * base) mod modulus
    return result
```

Algoritmus modulárního umocňování je založen na myšlence, že např. při počítání $2^{64} \pmod{1000}$

- není třeba nejprve počítat 2^{64} a poté jej vydělit se zbytkem číslem 1000, ale lépe je postupně násobit „dvojky“ a kdykoliv je výsledek větší než 1000, provést redukci modulo 1000,
- ale zejména, že není třeba provádět takové množství násobení (v tomto případě 63 naivních násobení je možné nahradit pouze šesti umocněními na druhou, neboť

$$2^{64} = (((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2.$$

(Viz 6. cvičení, úloha 4)

Příklad (Ukázka průběhu algoritmu). Vypočtěme $2^{560} \pmod{561}$. Protože $560 = (1000110000)_2$, dostaneme uvedeným algoritmem

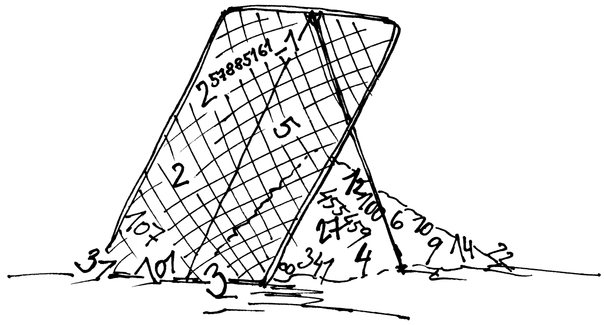
Tj. $2^{560} = 2^{2^4+2^5+2^9} =$
$= 2^{2^4} \cdot 2^{2^5} \cdot 2^{2^9}$

Pozn. řád 2 mod 561 je 40

exponent	base	result	exp's last digit
560	2	1	0 zb. po dělení
280	4	1	0
140	16	1	0
70	256	1	0
2^{2^4} 35	460	1	1
2^{2^5} 17	103	460	1
8	511	256	0
4	256	256	0
2	460	256	0
2^{2^9} 1	103	256	1
0	511	1	0

A tedy $2^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

V průběhu algoritmu se pro každou binární číslici exponentu provede umocnění základu na druhou modulo n (což je operace proveditelná v nejhůře kvadratickém čase), a pro každou „jedničku“ v binárním zápisu navíc provede jedno násobení. Celkově jsme tedy schopni provést modulární umocňování nejhůře v **kubickém** čase.



5.2. Testy na složenost. Přestože platí základní věta aritmetiky, která nám garantuje, že každé přirozené číslo se dá jednoznačným způsobem rozložit na součin prvočísel, praktické nalezení tohoto rozkladu je obvykle velmi výpočetně náročná operace, obvykle prováděná v několika krocích:

(1) nalezení všech dělitelů nepřevyšujících určitou hranici (metodou pokusného dělení všemi prvočísly až do této hranice, typicky je touto hranicí cca 10^6)

(2) otestování zbylého faktoru na složenosti (tzv. test na složenost, testující některou nutnou podmínku prvočíselnosti)

Např. MFV, tj. $a^{N-1} \overset{?}{\equiv} 1 \pmod N$

a) pokud test složenosti prohlásil, že zkoumané číslo je asi prvočíslo, pak testem na prvočíselnost ověřit, že je to opravdu prvočíslo.

časově náročné

b) pokud test složenosti prohlásil, že zkoumané číslo je složené, pak nalézt netriviálního dělitele.

viz RSA $n = p \cdot q$ neumíme efektivně rozložit

Takto je posloupnost kroků prováděna z toho důvodu, že jednotlivé algoritmy mají postupně (výrazně) rostoucí časovou složitost. V roce 2002 Agrawal, Kayal a Saxena publikovali algoritmus, který testuje prvočíselnost v polynomiálním čase, prakticky je ale zatím stále efektivnější používat výše uvedený postup.

AKS algoritmus

Takzvané testy na složenost testují některou nutnou podmínku prvočíselnosti. Nejjednodušší takovou podmínkou je Malá Fermatova věta.

Tvrzení 5.1. (*Fermatův test*) *Existuje-li pro dané N nějaké $a \not\equiv 0 \pmod N$ takové, že $a^{N-1} \not\equiv 1 \pmod N$, pak N není prvočíslo.*

svědci složenosti a

Bohužel nemusí být pro dané složené N snadné najít takové a, že Fermatův test odhalí složenost N; pro některá výjimečná N dokonce jediná taková a jsou ta soudělná s N; jejich nalezení je tedy ekvivalentní s nalezením dělitele, a tedy i s rozkladem N na prvočísla.

Carmichaelova čísla. Skutečně existují taková nehezká (nebo extrémně hezká?) složená čísla N, která splňují, že pro libovolné a nesoudělné s N platí $a^{N-1} \equiv 1 \pmod N$. Taková čísla se nazývají Carmichaelova, nejmenší z nich je $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ a teprve v roce 1992 se podařilo dokázat, že jich je dokonce nekonečně mnoho (v OEIS jde o posloupnost A002997: $561, 1105, 1729, 2465, 2821, \ldots$).

(viz 6. cvičení, úloha 4)

Příklad. Dokážeme, že 561 je Carmichaelovo, tj. že pro každé $a \in \mathbb{N}$, které je nesoudělné s $3 \cdot 11 \cdot 17$, platí $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

Z vlastností kongruencí víme, že stačí dokázat tuto kongruenci modulo $3, 11$ i 17. To ale dostaneme přímo z Malé Fermatovy věty, protože takové a splňuje $a^2 \equiv 1 \pmod 3, a^{10} \equiv 1 \pmod{11}, a^{16} \equiv 1 \pmod{17}$, přičemž $2, 10$ i 16 dělí 560 (viz též Korseltovo kritérium).

Věta 36 (Korseltovo kritérium). *Složené číslo n je Carmichaelovým číslem, právě když je nedělitelné čtvercem (square-free) a pro všechna prvočísla p dělící n platí $p - 1 \mid n - 1$.*

Euler: N je prvočíslo $\Rightarrow$ $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod N$

Příklad. Dokažte, že čísla 2465 a 2821 jsou Carmichaelova.

Nebo lépe: (viz Legendre symbol) $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p$

Eulerův test (též Euler-Jacobi, Solovay-Strassen). Fermatův test lze zlepšit s využitím kvadratických zbytků na Eulerův test, ale výše zmíněný problém se ani tak zcela neodstraní.

Tvrzení 5.2 (Eulerův test). *Je-li N prvočíslo a $a \in \mathbb{Z}, N \nmid a$, pak*

$$a^{\frac{N-1}{2}} \equiv (a/N) \pmod N.$$

$561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$

MFV: $5^{10} \equiv 1 \ (11)$ $/^{28}$

$5^{280} \equiv 1 \ (11)$

$5^{16} \equiv 1 \ (17)$

$5^{8} \equiv -1 \ (17)$ $/^{35}$

$5^{280} \equiv (-1)^{35} \ (17)$

Příklad. Uvažme[3] $a = 5$: Pak $5^{280} \equiv 1 \pmod 3, 5^{280} \equiv 1 \pmod{11}$, přitom $5^{280} \equiv -1 \pmod{17}$, proto určitě $5^{280} \not\equiv \pm 1 \pmod{561}$. Zde došlo k tomu, že neplatilo $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod N$, proto ani nebylo třeba testovat hodnotu Jacobiho symbolu, často ale právě Eulerův test může odhalit složené číslo i v případě, kdy tato mocnina je rovna ± 1.

$5^{280} \equiv 67 \pmod{561}$

MFV: $a^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ $\Downarrow$ $a^{864} \equiv 1 \pmod{19}$

Příklad. Test, zda $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod N$, neodhalí například $N = 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$, neboť $\frac{N-1}{2} = 864 = 2^5 \cdot 3^3$ je dělitelné 6, 12 i 18 a tedy z Fermatovy věty plyne, že pro všechna celá čísla a nesoudělná s N platí $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv 1 \pmod N$. $11^{864} \equiv 1 \ (1729)$

Přitom ale pro $a = 11$ dostaneme $\left(\frac{11}{1729}\right) = -1$ a Eulerův test tedy složenost čísla 1729 odhalí.

$\left(\frac{11}{1729}\right) = +\left(\frac{1729}{11}\right) = \left(\frac{2}{11}\right) = -1$

$1729 \equiv 1 \ (4)$

$11 \equiv 3 \ (8)$

Poznamenejme, že hodnotu Legendreova nebo Jacobiho symbolu $\left(\frac{a}{n}\right)$ lze díky zákonu kvadratické reciprocity spočítat v lepším než kubickém čase.

Definice (Pseudoprvočísla). Složené číslo n se nazývá **pseudoprvočíslo**, pokud projde testem na složenost a není jím odhaleno jako složené. Máme tak

(1) Fermatova pseudoprvočísla N o základu a $\quad a^{N-1} \equiv 1 \pmod N$
(2) Eulerova pseudoprvočísla N: $\quad a^{\frac{N-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{N}\right) \pmod N$
(3) silná (strong) pseudoprvočísla o základu a, pokud projdou následujícím testem na složenost.

---

[3]Testování by selhalo už pro $a = 3$, ale to je dělitel, my chceme ukázat, že test může uspět i bez nalezení dělitele.

nejmenší Fermatovo psp o základu 2

Př: buď $p=29$, MFV: $a^{28}\equiv 1\ (29)$

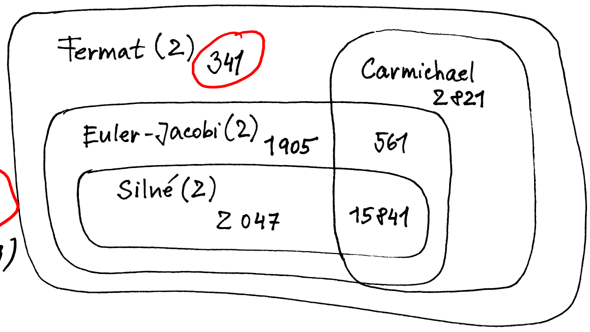
$29 \mid a^{28}-1=(a^{14}+1)(a^{14}-1)=$

$=(a^{14}+1)(a^{7}+1)(a^{7}-1)$

Tj: $a^{14}\equiv -1 \vee a^{7}\equiv -1 \vee a^{7}\equiv +1 \pmod{29}$

$p-1=2^{2}\cdot 7,\ t=2$

$e\in\{0,1\}$



Tvrzení 5.3 (Test na složenost – zesílení Malé Fermatovy věty). *Nechť p je liché prvočíslo. Pišme $p-1=2^t\cdot q$, kde t je přirozené číslo a q je liché. Pak pro každé celé číslo a nedělitelné p buď platí $a^q\equiv 1 \pmod p)$ nebo existuje $e\in\{0,1,\dots,t-1\}$ splňující $a^{2^e q}\equiv -1 \pmod p)$.*

a … základ

Ukazuje se, že tento snadný test výrazně zesiluje schopnost rozpoznávat složená čísla. Nejmenší silné pseudoprvočíslo o základu 2 je 2047 (přitom nejmenší Fermatovo o základu 2 bylo již 341) a při otestování základů 2, 3 a 5 dostaneme nejmenší pseudoprvočíslo 25326001. Jinými slovy, pokud nám stačí testovat pouze čísla do $2\cdot 10^7$, pak stačí tento test na složenost provést pouze pro základy 2, 3 a 5. Pokud číslo není odhaleno jako složené, pak je určitě prvočíslem.

Na druhou stranu, bylo dokázáno, že žádná konečná báze není dostatečná.

Test Millera a Rabina je praktickou aplikací předchozího testu, kdy jsme navíc schopni omezit pravděpodobnost neúspěchu.

Věta 37. *Nechť $N>10$ je liché složené číslo. Pišme $N-1=2^t\cdot q$, kde t je přirozené číslo a q je liché. Pak nejvýše čtvrtina z čísel množiny $\{a\in\mathbb{Z};\ 1\le a<N,\ (a,N)=1\}$ splňuje následující podmínku:*

$$a^q\equiv 1 \pmod N$$

nebo existuje $e\in\{0,1,\dots,t-1\}$ splňující

$$a^{2^e q}\equiv -1 \pmod N.$$

V praktických implementacích se obvykle testuje cca 20 náhodných základů (příp. nejmenších prvočíselných základů). V takovém případě dostáváme z předchozí věty, že pravděpodobnost neodhalení složeného čísla je menší než 2^{-40}.

Časová náročnost algoritmu je asymptoticky stejná jako složitost modulárního umocňování, tedy nejhůře kubická. Je ale třeba si uvědomit, že test je nedeterministický a spolehlivost jeho deterministické verze závisí na tzv. zobecněné Riemannově hypotéze (GRH).

5.3. Testy na prvočíselnost. Testy na prvočíselnost přicházejí na řadu obvykle ve chvíli, kdy testy na složenost prohlásí, že jde *pravděpodobně o prvočíslo*, případně se provádějí rovnou u speciálních typů čísel. Uveďme nejprve přehled nejznámějších testů.

(1) AKS (2002) – obecný polynomiální test na prvočísla
(2) Pocklington-Lehmerův test – test na prvočíselnost subexponenciální složitosti
(3) Lucas-Lehmerův test – test prvočíselnosti pro Mersenneho čísla $2^p - 1 = M_p$
(4) Pépinův test (1877) – test prvočíselnosti pro Fermatova čísla $2^{2^n} + 1 = F_n$
(5) ECPP - test prvočíselnosti založený na tzv. eliptických křivkách

Speciální testy – Mersenneho čísla.

Tvrzení 5.4 (Lucas-Lehmerův test). *Definujme posloupnost* $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ *rekurzívně předpisem* $s_0 = 4, s_{n+1} = s_n^2 - 2$.

Pak je číslo $M_p = 2^p - 1$ *prvočíslo, právě tehdy, když* M_p *dělí* s_{p-2}.

```
// Determine if M_p = 2^p − 1 is prime
Lucas–Lehmer(p)
    var s = 4
    var M = 2^p − 1
    repeat p − 2 times:
      s = s^2 − 2 (mod M)
    if s = 0 return PRIME else return COMPOSITE
```

Časová složitost testu je asymptoticky stejná jako v případě Miller-Rabinova testu, v konkrétních případech je ale efektivnější.

Speciální testy – Fermatova čísla. Fermatova čísla jsou čísla tvaru $F_n = 2^{2^n} + 1$. Pierre de Fermat v 17. století vyslovil hypotézu, že všechna čísla tohoto tvaru jsou prvočísly (zřejmě veden snahou zobecnit pozorování pro $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ a $F_4 = 65537$. V 18. století ale Leonhard Euler zjistil, že $F_5 = 641 \times 6700417$ a dodnes se nepodařilo nalézt žádné další Fermatovo prvočíslo. Vzhledem k rychle rostoucí velikosti těchto čísel je počítání s nimi velmi časově náročné (a ani následující test tak není příliš používán). V současné době nejmenší netestované Fermatovo číslo je F_{33}, které má 2 585 827 973 číslic, a je tak výrazně větší než největší dosud nalezené prvočíslo.

Tvrzení 5.5 (Pépinův test). *Označme* $F_n = 2^{2^n} + 1$ *tzv.* n*-té Fermatovo číslo. Pak* F_n *je prvočíslo, právě když*

$$3^{\frac{F_n - 1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

Vidíme, že jde o velmi jednoduchý test, který je vlastně pouze malou částí Eulerova testu na složenost.

"$\Leftarrow$"

$3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1\ (F_n)\ |^2$

$3^{F_n-1} \equiv 1\ (F_n)$

řád 3 dělí F_n-1

řád 3 nedělí $\frac{F_n-1}{2}$

$\Rightarrow$ řád je F_n-1

$\Rightarrow F_n-1=\varphi(F_n)$

Důkaz korektnosti Pépinova testu. Platí-li $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}$, je nutně $F_n - 1$ řádem čísla 3 modulo F_n, proto je F_n prvočíslo.

Obráceně, nechť je F_n prvočíslo. Z Eulerova kritéria dostáváme, že $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv \left(\frac{3}{F_n}\right) \pmod{F_n}$, tj. stačí nám určit hodnotu $\left(\frac{3}{F_n}\right)$. To je ale snadné, protože $F_n \equiv 2 \pmod 3$ a tedy $\left(\frac{F_n}{3}\right) = -1$. Dále $F_n \equiv 1 \pmod 4$, proto díky zákonu kvadratické reciprocity dostáváme $\left(\frac{3}{F_n}\right) = -1$. □

$\left(\frac{3}{F_n}\right) = +\left(\frac{F_n}{3}\right)$

$F_n \equiv 1 (4)$

$2^{2^n}+1 \equiv (-1)^{2^n}+1 \equiv$

$\equiv 1+1 \equiv 2 \pmod 3$

Pocklington-Lehmerův test. Na závěr uveďme i obecný test na prvočíselnost, který použijeme, pokud chceme vysokou pravděpodobnost Miller-Rabinova algoritmu proměnit v jistotu (ta jistota je ale relativní – udává se, že pravděpodobnost selhání Miller-Rabinova algoritmu je nižší než HW chyba během výpočtu).

Věta 38. *Nechť N je přirozené číslo, $N > 1$. Nechť p je prvočíslo dělící $N - 1$. Předpokládejme dále, že existuje $a_p \in \mathbb{Z}$ tak, že*

$$a_p^{N-1} \equiv 1 \pmod N \quad a \quad \left(a_p^{\frac{N-1}{p}} - 1, N\right) = 1.$$

Nechť p^{α_p} je nejvyšší mocnina p dělící $N - 1$. Pak pro každý kladný dělitel d čísla N platí

$$d \equiv 1 \pmod{p^{\alpha_p}}.$$

Důkaz věty Pocklingtona a Lehmera. Každý kladný dělitel d čísla N je součinem prvočíselných dělitelů čísla N, větu dokažme pouze pro d prvočíslo. Podle Fermatovy věty platí $a_p^{d-1} \equiv 1 \pmod d$, neboť $(a_p, N) = 1$. Protože $\left(a_p^{\frac{N-1}{p}} - 1, N\right) = 1$, platí $a_p^{\frac{N-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod d$.

Označme e řád a_p modulo d. Pak platí $e \mid d-1$, $e \mid N-1$ a $e \nmid \frac{N-1}{p}$.

Kdyby $p^{\alpha_p} \nmid e$, z $e \mid N-1$ by plynulo $e \mid \frac{N-1}{p}$, spor. Je tedy $p^{\alpha_p} \mid e$, a tedy i $p^{\alpha_p} \mid d-1$. □

Užití věty Pocklingtona a Lehmera.

Tvrzení 5.6. *Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Předpokládejme, že můžeme psát $N - 1 = F \cdot U$, kde $(F, U) = 1$ a $F > \sqrt{N}$, přičemž známe rozklad čísla F na prvočinitele. Pak platí:*

- *jestliže pro každé prvočíslo $p \mid F$ můžeme najít $a_p \in \mathbb{Z}$ z předchozí věty, pak je N prvočíslo;*
- *je-li N prvočíslo, pak pro libovolné prvočíslo $p \mid N-1$ existuje $a_p \in \mathbb{Z}$ s požadovanými vlastnostmi.*

Důkaz. ad 1. Podle Věty je $d \equiv 1 \pmod{p^{\alpha_p}}$ pro všechny prvočíselné faktory F, proto je $d \equiv 1 \pmod F$, a tedy $d > \sqrt{N}$.

ad 2. Stačí za a_p zvolit primitivní kořen modulo prvočíslo N (nezávisle na p). □

Poznámka. Předchozí test v sobě zahrnuje Pépinův test (totiž pro $N = F_n$ máme $p = 2$, kterému vyhovuje svědek prvočíselnosti $a_p = 3$).

5.4. Hledání dělitele. Máme-li testem na složenost potvrzeno, že jde o číslo složené, obvykle chceme najít netriviálního dělitele. Jde ale o výrazně obtížnější úkol (což je na druhé straně výhodné pro RSA a podobné protokoly), proto si k tématu uvedeme jen stručný přehled používaných metod.

(1) Pokusné dělení – v krajním případě je možné testovat potenciální (prvočíselné) dělitele až do $\sqrt{n}$, tedy v nejhorším případě vykonáme až $O(\sqrt{n})$ dělení.
(2) Pollardova ρ-metoda
(3) Pollardova $p - 1$ metoda
(4) faktorizace pomocí eliptických křivek
(5) Metoda kvadratického síta (QS)
(6) Metoda síta v číselném tělesa (NFS)

Podrobnosti viz předmět `M8190` *Algoritmy teorie čísel.*

5.5. Kryptografie s veřejným klíčem. Dva hlavní úkoly pro kryptografie s veřejným klíčem (PKC – public key cryptography) jsou zajistit

- šifrování, kdy zprávu **zašifrovanou** veřejným klíčem příjemce není schopen rozšifrovat nikdo kromě něj (resp. držitele jeho soukromého klíče)
- podepisování, kdy integrita zprávy **podepsané** soukromým klíčem odesílatele může být ověřena kýmkoliv s přístupem k veřejnému klíči odesílatele

Nejčastěji používané systémy PKC:

- RSA (šifrování) a odvozený systém pro podepisování zpráv
- Digital signature algorithm (DSA) a varianta založená na eliptických křivkách (ECDSA)
- Rabinův kryptosystém (a podepisování)
- ElGamal kryptosystém (a podepisování)
- Kryptografie eliptických křivek (ECC)
- Diffie-Hellmanův protokol na výměnu klíčů (DH)

Princip digitálního podpisu. Proces podepisování a ověření podpisu zprávy M probíhá obvykle v následujících krocích.

Podepisování

(1) Vygeneruje se otisk (hash) H_M zprávy pevně stanovené délky (např. 160 nebo 256 bitů).
(2) Podpis zprávy $S_A(H_M)$ je vytvořen (pomocí dešifrování) z tohoto hashe s nutností znalosti soukromého klíče podepisujícího.
(3) Zpráva M (případně zašifrovaná veřejným klíčem příjemce) je spolu s podpisem odeslána.

Ověření podpisu

(1) K přijaté zprávě M se (po jejím případném dešifrování) vygeneruje otisk H'_M
(2) S pomocí veřejného klíče (deklarovaného) odesílatele zprávy se rekonstruuje původní otisk zprávy $V_A(S_A(H_M)) = H_M$.
(3) Oba otisky se porovnají $H_M = H'_M$?.

Není důkaz, že bezpečnost RSA závisí na faktorizaci

RSA *Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman* (1977; C. Cocks, GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$
- dešifrování šifry C: $OT = D_d(C) \equiv C^d \pmod{n}$

Rabinův kryptosystém je prvním veřejným kryptosystémem, k jehož prolomení je prokazatelně potřeba faktorizovat modul. Uvedeme si jej ve zjednodušené verzi:

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: A zvolí dvě podobně velká prvočísla $p, q \equiv 3 \pmod{4}$, vypočte $n = pq$.
- $V_A = n$, $S_A = (p, q)$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^2 \pmod{n}$
- dešifrování šifry C: vypočtou se (čtyři) odmocniny z C modulo n a snadno se otestuje, která z nich byla původní zprávou.

$x^2 \equiv C \pmod{p \cdot q}$

$x^2 \equiv C\,(p) \quad x^2 \equiv C\,(q)$

$x \equiv \pm C^{\frac{p+1}{4}}\,(p) \quad x \equiv \pm C^{\frac{q+1}{4}}\,(q)$

4 řešení mod $p \cdot q$ pomocí CRT

Výpočet druhé odmocniny z C modulo $n = pq$, kde $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$.

- vypočti $r = C^{(p+1)/4} \pmod{p}$ a $s = C^{(q+1)/4} \pmod{q}$
- vypočti a, b tak, že $ap + bq = 1$
- polož[4] $x = (aps + bqr) \pmod{n}$, $y = (aps - bqr) \pmod{n}$
- druhými odmocninami z C modulo n jsou $\pm x$, $\pm y$.

Příklad. V Rabinově kryptosystému Alice zvolila za svůj soukromý klíč $p = 23, q = 31$, veřejným klíčem je pak $n = pq = 713$. Zašifrujte zprávu $m = 327$ pro Alici a ukažte, jak bude Alice tuto zprávu dešifrovat.

[4] Uvědomte si, že jde vlastně o aplikaci Čínské zbytkové věty!

Řešení. $c = 692$, kandidáti původní zprávy jsou $\pm 4{\cdot}23{\cdot}14 \pm 3{\cdot}31{\cdot}18 \pmod{713}$.

Diffie-Hellman key exchange. *Whitfield Diffie, Martin Hellman* (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)

Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýrů s kufříky, …).

Problém diskrétního logaritmu: $g^a \mapsto a$ těžké!

- Dohoda stran na **prvočísle** p a primitivním kořenu g modulo p (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle $\underset{}{g^a} = A \pmod p$
- Bob vybere náhodné b a pošle $g^b = B \pmod p$
- Společným klíčem pro komunikaci je $g^{ab} \pmod p$.

$B^a = (g^b)^a = g^{ab} = K$

$A^b = (g^a)^b = g^{ab}$

Kryptosystém ElGamal. Z protokolu DH na výměnu klíčů je odvozen šifrovací algoritmus ElGamal:

- Alice zvolí prvočíslo p spolu s primitivním kořenem g
- Alice zvolí **tajný klíč** x (tajné), spočítá $h = g^x \pmod p$ a zveřejní **veřejný klíč** (p, g, h)
- šifrování zprávy M: Bob zvolí náhodné y a vypočte $C_1 = g^y \pmod p$ a $C_2 = M \cdot h^y \pmod p$ a pošle (C_1, C_2)
- dešifrování zprávy: $OT = C_2/C_1^x \equiv M \cdot h^y \cdot (g^y)^{-x} = M \cdot (g^x)^y \cdot (g^y)^{-x} \equiv M \pmod p$

výhoda: zpráva se násobí, ne umocňuje

Poznámka. Analogicky jako v případě RSA lze odvodit podepisování.

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.

Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči. Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .

Některé protokoly:

- ECDH - přímá varianta DH na eliptické křívce (jen místo generátoru se vybere *vhodný* bod na křivce)
- ECDSA - digitální podpis pomocí eliptických křivek.

Poznámka. Problém diskrétního logaritmu (ECDLP). Navíc se ukazuje, že eliptické křivky jsou velmi dobře použitelné při faktorizaci prvočísel.

6. Diofantické rovnice

Už ve třetím století našeho letopočtu se řecký matematik Diofantos zabýval řešením rovnic, ve kterých za řešení připouštěl jen celá