Kapitola 4

Goniometrické funkce v oboru $\mathbb{R}$

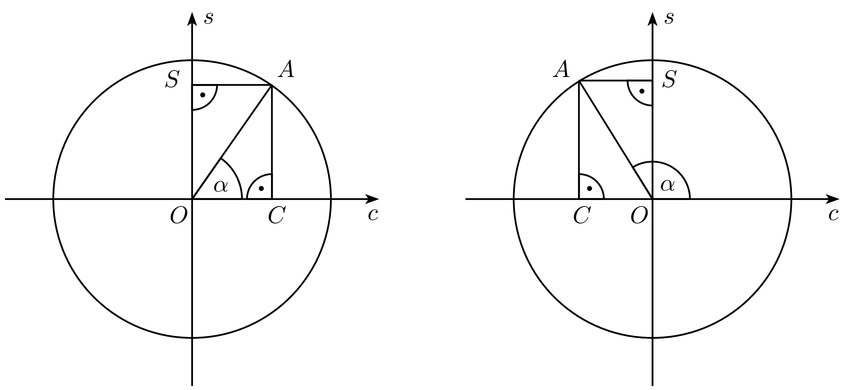
Goniometrické funkce se po dlouhá staletí utvářely jako prostředek trigonometrických výpočtů. Tuto jejich roli jsme podrobně posoudili v předchozích kapitolách. Nyní se začneme goniometrickým funkcím věnovat z pohledu matematické analýzy, totiž jako funkcím reálné proměnné, které nacházejí významné uplatnění v řadě dalších matematických, fyzikálních i jiných oborů.

4.1 Funkce sinus a kosinus

4.1.1 Dvě funkce orientovaného úhlu

V kapitole 3 jsme poznali, jak funkce sinus a kosinus, zavedené původně pro hodnoty úhlů z intervalu $\langle 0°, 90° \rangle$, rozšířit na interval $\langle 0°, 180° \rangle$, aby všechny goniometrické vzorce pro řešení obecného rovinného trojúhelníku měly jednotný tvar. Vidíme to na obrázku 4.1, z něhož je patrné,

$$\cos\alpha = |OC| \qquad \cos\alpha = -|OC|$$
$$\sin\alpha = |OS| \qquad \sin\alpha = |OS|$$



(a) $0° \leq \alpha \leq 90°$ (b) $90° \leq \alpha \leq 180°$

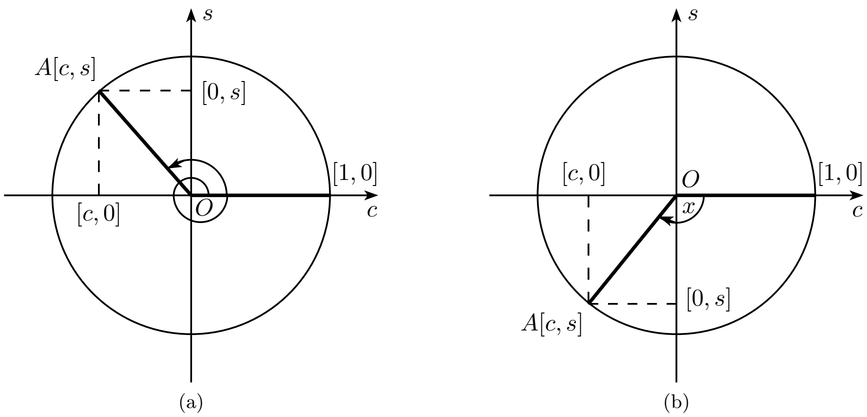
Obrázek 4.1: Hodnoty $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ pro $\alpha \in \langle 0°, 180° \rangle$

že hodnoty sinu a kosinu jsou kartézské souřadnice bodu A na jednotkové kružnici se středem v počátku O soustavy, tvořené dvojicí navzájem kolmých os – vodorovné „kosinové“ osy c a svislé

„sinové“ osy s. Takovou kartézskou souřadnicovou soustavu budeme značit Ocs, její kladné poloosy označíme c^+ a s^+, záporné poloosy pak c^- a s^-.

Zmíněné pozorování bude ve shodě se způsobem, jakým nyní definujeme hodnoty sinu a kosinu libovolného *orientovaného úhlu*. Motivací nám bude kinematická úloha vyjádřit souřadnicemi polohu hmotného bodu pohybujícího se po kružnici.[1] Takový pohyb konají například konce ručiček klasických hodin s ciferníkem. Nám postačí jedna „goniometrická“ ručička OA délky 1, která se bude otáčet kolem počátku O, takže její konec A bude ukazovat na „ciferník“ v podobě jednotkové kružnice[2] se středem v počátku O. Úhel otočení ručičky OA budeme měřit od počáteční polohy, kdy ručička leží na kladné poloose c^+ (tehdy má bod A souřadnice $[1,0]$). Velikost úhlu otočení nebudeme vyjadřovat ve stupních, nýbrž bezrozměrným číslem v obloukové míře (radiánech). Úhlu otočení ještě přiřadíme znaménko $+$ či $-$ podle směru otáčení ručičky OA; přitom za kladný směr budeme považovat směr toho otočení o úhel $\frac{1}{2}\pi$, ve kterém poloosa c^+ přejde v poloosu s^+.[3] Touto „orientací“ se úhlem otočení ručičky OA stane libovolné reálné číslo x. Například na obr. 4.2 je vlevo $\frac{5}{2}\pi < x < 3\pi$, vpravo $-\pi < x < -\frac{1}{2}\pi$.

Nyní již máme vše připraveno k tomu, abychom definovali hodnoty sinu a kosinu v libovolném



Obrázek 4.2: Orientovaný úhel otočení goniometrické ručičky

čísle $x \in \mathbb{R}$: *Je-li goniometrická ručička OA otočena popsaným způsobem o orientovaný úhel x a má-li bod A v soustavě Ocs souřadnice $[c,s]$, položíme*

$$\boxed{\cos x = c \quad a \quad \sin x = s.}$$

Touto konstrukcí se sinus a kosinus stávají dvěma funkcemi s definičním oborem $\mathbb{R}$, přitom na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ jde o funkce, se kterými jsme pracovali v předchozích kapitolách. Popíšeme a zdůvodníme teď jejich základní vlastnosti, bezprostředně spojené se zavedeným modelem goniometrické ručičky OA v kartézské soustavě souřadnic Ocs.

Stejně jako se velká ručička u klasických hodin za šedesát minut dostane opět na stejné místo, i

[1] Matematicky nejpádnější motivací je ovšem chování exponenciální funkce v komplexním oboru, objevené Eulerem, jak jsme naznačili v kapitole 1. Takový přístup však přesahuje rámec elementární matematiky, do něhož je celá naše práce zasazena.

[2] Body ciferníku ovšem nebudou popsány škálou údajů, jako jsou hodiny či minuty, nýbrž svými souřadnicemi $[c,s]$ v soustavě Ocs.

[3] Při obvyklém zakreslení soustavy Ocs jako na obr. 4.1 je tedy kladný směr otáčení opačný, než je směr otáčení hodinových ručiček.

naše goniometrická ručička OA se z dané polohy opět vrátí do stejné pozice po otočení o úhel 2π. Při dalším putování konce ručičky po jednotkové kružnici nic nového bod A o souřadnicích $[c, s]$ než při předchozí obrátce nečeká, a to se opakuje do nekonečna. Z toho můžeme vyvodit hned několik vlastností funkcí sinus a kosinus:

1. Perioda obou funkcí je 2π. Platí vzorce

$$\boxed{\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \text{a} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi).}$$

   K získání přehledu o průběhu goniometrických funkcí sinus a kosinus stačí tedy vyšetřovat jejich chování pouze na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

2. Obě souřadnice bodu A, c-ová i s-ová, nabývají pouze hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, a to všech, které v něm leží. Obor hodnot obou funkcí je proto

$$H(\sin) = H(\cos) = \langle -1, 1\rangle.$$

3. Největších a nejmenších hodnot nabývají souřadnice c a s bodu A na jednotkové kružnici, když ručička OA leží na poloosách c^+, s^+, c^- a s^-:

x	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

4. Souřadnice c a s bodu A nabývají v jednotlivých kvadrantech pouze kladných nebo pouze záporných hodnot. Hodnoty sinu a kosinu tedy mají v odpovídajících intervalech znaménko:

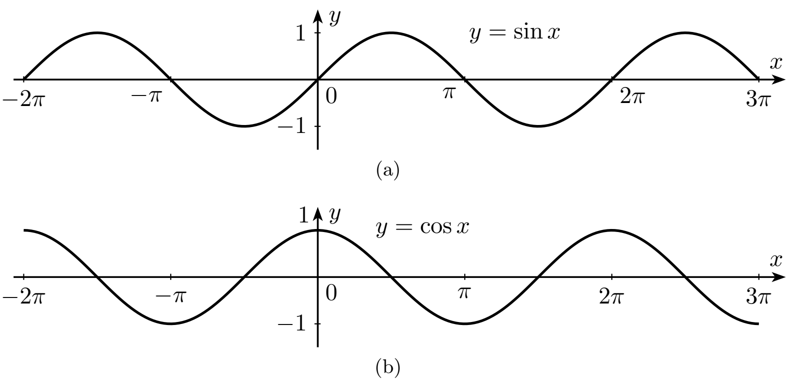
Interval	$(0, \frac{1}{2}\pi)$	$(\frac{1}{2}\pi, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$

5. Při průchodu ručičky OA jednotlivými kvadranty se hodnoty souřadnic c a s bodu A vždy buď zvětšují, nebo zmenšují. Funkce sinus a kosinus jsou tedy v příslušných intervalech rostoucí nebo klesající (např. zápis $0 \nearrow 1$ značí funkci rostoucí od 0 do 1, $0 \searrow -1$ funkci klesající od 0 do -1):

Interval	$(0, \frac{1}{2}\pi)$	$(\frac{1}{2}\pi, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
$\sin x$	$0 \nearrow 1$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$
$\cos x$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$	$0 \nearrow 1$

6. Otočíme-li ručičku OA z počáteční polohy na c^+ o orientovaný úhel x, bod A bude mít souřadnice $[c, s]$. Když místo toho otočíme ručičku OA o orientovaný úhel $-x$, souřadnice bodu A budou $[c, -s]$. Z této souměrnosti podle kosinové osy, ke které se podrobněji vrátíme v části 4.1.2, vyplývá parita obou funkcí. Funkce sinus je *lichá* a funkce kosinus je *sudá*, což zapisujeme vzorci:

$$\boxed{\sin x = -\sin(-x) \qquad \text{a} \qquad \cos x = \cos(-x).}$$



Obrázek 4.3: Grafy funkcí sinus a kosinus

Pro křivky, jež jsou grafy funkcí sinus a kosinus, užíváme názvů *sinusoida* a *kosinusoida* (obr. 4.3). Jsou to dvě geometricky shodné křivky (navzájem posunuté ve směru osy x). Podobné křivky jsou grafy funkcí, kterým říkáme *sinusoidální* a kterým v naší práci věnujeme příklad 4.7.1.

Je zřejmé, že funkce sinus ani funkce kosinus nejsou prosté. Každá z nich nabývá libovolné své hodnoty dokonce v nekonečně mnoha bodech. Nejen na celém definičním oboru $\mathbb{R}$, ale ani na intervalu délky jedné periody 2π, k nim tedy neexistují inverzní funkce. My jsme se o inverzních funkcích ke goniometrickým funkcím sinus a kosinus s názvy arkussinus (arcsin) a arkuskosinus (arccos), kterým říkáme *cyklometrické*, zmínili již v části 2.1.2; tehdy ovšem v souvislosti s hledáním velikosti úhlů v pravoúhlém trojúhelníku, jejichž goniometrické hodnoty byly dány. Tyto hodnoty byly pouze z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a velikosti úhlů byly v rozmezí intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Cyklometrické funkce $y = \arcsin x$ a $y = \arccos x$ zavádíme tak, že vezmeme pouze takové maximální části definičních oborů funkcí sinus a kosinus, jejichž součástí je již zmíněný interval $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, na kterých jsou funkce prosté. U funkce sinus je to interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, u funkce kosinus jiný interval $\langle 0, \pi\rangle$. Na nich je funkce sinus rostoucí, funkce kosinus klesající a obě tam nabývají všech hodnot z $\langle -1, 1\rangle$. Pro inverzní funkce proto vybereme obory hodnot v příslušném intervalu

$$H(\text{arcsin}) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \quad \text{a} \quad H(\text{arccos}) = \langle 0, \pi\rangle.$$

Získáme tak dvě funkce se společným definičním oborem

$$D(\text{arcsin}) = D(\text{arccos}) = \langle -1, 1\rangle,$$

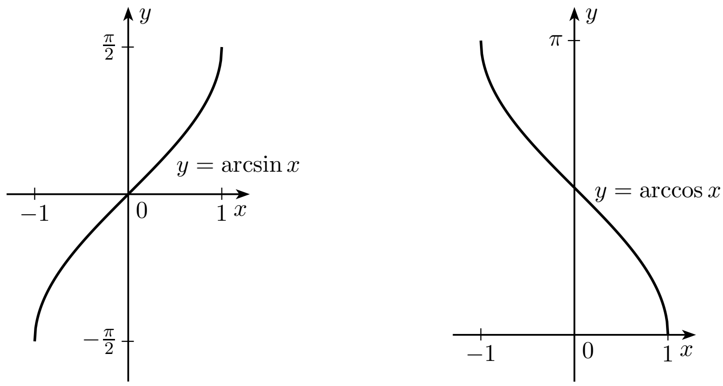
jejichž formální definice lze zapsat ekvivalencemi

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y \wedge -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$
$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \wedge 0 \leq y \leq \pi.$$

Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus vidíme na obr. 4.4. Ze zmíněné monotónnosti zúžených funkcí sinus a kosinus plyne, že zavedená funkce arkussinus je rostoucí, zatímco funkce arkuskosinus na celém definičním oboru klesá. Uveďme a dokažme základní vztahy pro cyklometrické funkce

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x, \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \qquad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},}$$

platné pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$.



(a) (b)

Obrázek 4.4: Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus

- Je-li $y = \arcsin x$, pak $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ a $x = \sin y$, odkud $-\frac{\pi}{2} \le -y \le \frac{\pi}{2}$ a $-x = \sin(-y)$, neboť funkce sinus je lichá. Poslední dva vztahy už znamenají, že $-y = \arcsin(-x)$.

- Je-li $y = \arccos x$, pak $0 \le y \le \pi$ a $x = \cos y$, odkud $-\pi \le -y \le 0$, následně po přičtení π obdržíme $0 \le \pi - y \le \pi$. Nyní využijeme rovnost $\cos(\pi - y) = -\cos y$[4], podle které platí $\cos(\pi - y) = -\cos y = -x$. Odtud a z nerovnosti $0 \le \pi - y \le \pi$ dostáváme $\arccos(-x) = \pi - y$ a po dosazení $y = \arccos x$ dokazovanou rovnost.

- Označme $y = \arcsin x$ a ukažme, že $\arccos x = \frac{\pi}{2} - y$. Je-li $0 \le x \le 1$, je $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ a $\sin y = x$, odkud $0 \le \frac{\pi}{2} - y \le \frac{\pi}{2}$ a $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = x$ (protože sinus a kosinus jsou kofunkce z části 2.1.2) a kýžený vztah platí. Je-li $-1 \le x < 0$, je $-\frac{\pi}{2} \le y < 0$ a $\sin y = x$, odkud $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - y \le \pi$ a $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \cos(\pi - [\frac{\pi}{2} + y]) = -\cos(\frac{\pi}{2} + y) = -\sin(-y) = \sin y = x$, kde jsme mj. využili vlastnost kofunkcí pro ostré úhly $-y$ a $\frac{\pi}{2} + y$ (o součtu $\frac{\pi}{2}$).

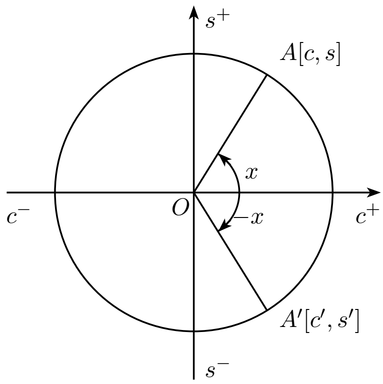
4.1.2 Koloběh hodnot sinu a kosinu

Jak je patrné z obrázku 4.3, grafy funkcí sinus a kosinus jsou složeny ze shodných „půlvln“ střídavě nad a pod osou x, přičemž každá půlvlna je souměrná podle svislé přímky procházející jejím vrcholem. Tuto základní vlastnost průběhů (vlastně koloběhů) obou funkcí nyní popíšeme důležitými *převodními vzorci.* Řadíme k nim vztahy pro hodnoty $f(\pm x \pm \pi)$ a $f(\pm x \pm \frac{\pi}{2})$, kde $f = \sin$ nebo $f = \cos$. Odvodíme je tak, že se znovu vrátíme k modelu goniometrické ručičky a využijeme geometrických představ o jejích pohybech, kterými budou otočení o úhly π, $\frac{1}{2}\pi$ a zrcadlové překlopení podle kosinové osy.

Začneme vysvětlením toho, co jsme uvedli již v části 4.1.1, že totiž sinus je funkce lichá a kosinus funkce sudá. K tomu uvážíme dvě různá otočení ručičky OA z počáteční polohy na poloose c^+. Jedno o orientovaný úhel x a druhé o orientovaný úhel $-x$. Ručičky se otočí o úhel téže velikosti, avšak v navzájem opačných směrech, takže jejich pohyby budou „zrcadlově souměrné“ (obr. 4.5). Pokud koncová poloha OA goniometrické ručičky odpovídá orientovanému úhlu x a koncová poloha OA' orientovanému úhlu $-x$, budou body $A[c, s]$ a $A'[c', s']$, podle definice se souřadnicemi

$$c = \cos x, \quad s = \sin x, \quad c' = \cos(-x), \quad s' = \sin(-x),$$

[4]Tu jsme právě pro $y \in \langle 0, \pi \rangle$ použili v kapitole 3 pro rozšíření kosinu z $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ na $\langle 0, \pi \rangle$.



Obrázek 4.5

souměrně sdružené podle kosinové osy c, bude tedy $c' = c$ a $s' = -s$. Vidíme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ skutečně platí[5]

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x \qquad \text{a} \qquad \cos(-x) = \cos x.}$$

Z dokázané parity plynou ihned vztahy

$$\boxed{\sin(2\pi - x) = -\sin x \qquad \text{a} \qquad \cos(2\pi - x) = \cos x,}$$

protože, jak víme, číslo 2π je perioda obou funkcí sinus a kosinus. Její polovina, číslo π, má ve vztahu k těmto funkcím vlastnost

$$\boxed{\sin(x + \pi) = -\sin x \qquad \text{a} \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x,}$$

pro niž se číslu π někdy říká *antiperioda* (sinu a kosinu). K důkazu použijeme otočení goniometrické ručičky o úhel π z polohy OA, která odpovídá orientovanému úhlu x, do polohy OA' (obr. 4.6). Body $A[c, s]$ a $A'[c', s']$, jejichž souřadnice jsou podle definice funkcí kosinus a sinus rovny

$$c = \cos x, \quad s = \sin x, \quad c' = \cos(x + \pi), \quad s' = \sin(x + \pi),$$

budou souměrně sdružené podle středu O. To znamená, že $c' = -c$ a $s' = -s$, což jsme chtěli dokázat.

Protože pro funkci f s periodou 2π platí $f(x - \pi) = f(x + \pi)$, právě dokázané vzorce můžeme přepsat do tvaru

$$\boxed{\sin(x - \pi) = -\sin x \qquad \text{a} \qquad \cos(x - \pi) = -\cos x.}$$

Ve spojení s paritou funkcí (lichá – sudá) tak dostáváme další vzorce

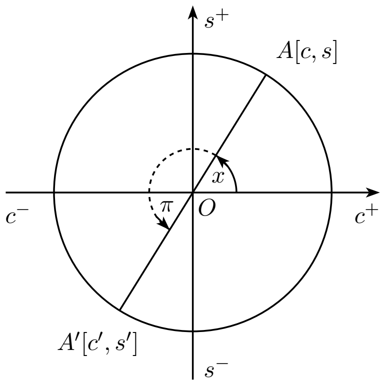
$$\boxed{\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \text{a} \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x,}$$

o jejichž významu v trigonometrii jsme psali v kapitole 3.

Poslední geometrickou úvahu povedeme k odvození vztahů

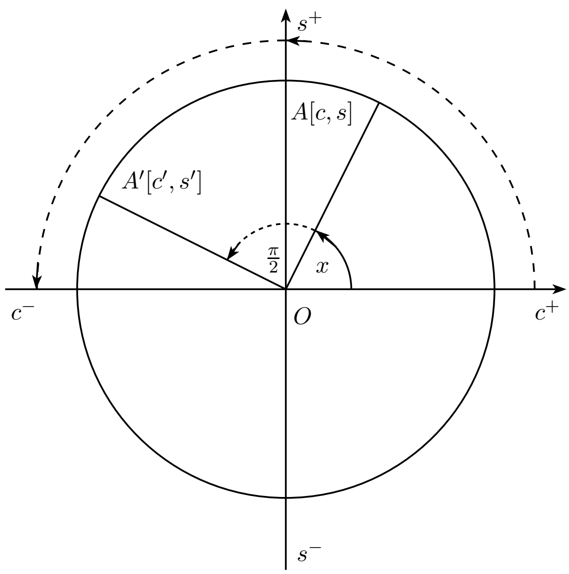
$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \text{a} \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.}$$

[5]Pozice ručiček souměrně sdružené podle sinové osy s by odpovídaly dvojicím orientovaných úhlů x a $\pi - x$, takže bychom dostali vzorce pro $\cos(\pi - x)$ a $\sin(\pi - x)$. Ty však získáme později jinak.



Obrázek 4.6

Předpokládejme, že goniometrickou ručičku v poloze OA, která odpovídá orientovanému úhlu x, otočíme ještě o úhel $+\frac{\pi}{2}$ do polohy OA' (obr. 4.7). Určíme vztahy mezi souřadnicemi bodů $A[c,s]$



Obrázek 4.7

a $A'[c',s']$, které jsou podle definice funkcí kosinus a sinus rovny

$$c = \cos x, \quad s = \sin x, \quad c' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad s' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Jak je na obr. 4.7 znázorněno, při zmíněném otočení o úhel $+\frac{\pi}{2}$ přejde poloosa c^+ v poloosu s^+ a poloosa s^+ v poloosu c^-. Druhá souřadnice bodu A' se tedy rovná první souřadnici bodu A, tj. $s' = c$, zatímco první souřadnice bodu A' a druhá souřadnice bodu A jsou navzájem opačná čísla, tj. $c' = -s$. Důkaz vzorců je tedy hotov. Jestliže v nich zaměníme x za $(-x)$, pak s ohledem na paritu funkcí dostaneme vztahy

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \text{a} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.}$$

Jejich praktický význam oceníme při úpravách goniometrických výrazů, či při řešení goniometrických rovnic a nerovnic, kdy potřebujeme přejít od funkce sinus k funkci kosinus nebo naopak. Dodejme, že tyto dva důležité převodní vzorce[6] lze odvodit rovněž úvahou o souměrnosti podle osy prvního a třetího kvadrantu v soustavě *Ocs* dvou poloh ručičky, které odpovídají orientovaným úhlům x a $\frac{\pi}{2}-x$.

Zbývá ještě uvést převodní vzorce

$$\boxed{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x \qquad \text{a} \qquad \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x.}$$

Plynou z předchozí dvojice vzorců, neboť díky paritě funkcí platí

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \qquad \text{a} \qquad \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

V závěru podkapitoly vyložíme prakticky užitečné pravidlo o tom, že pro libovolné x jsou hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ (případně až na znaménka) numericky shodné s hodnotami $\sin\alpha, \cos\alpha$ pro vhodný úhel α z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Jistě se stačí omezit na hodnoty $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a pak využít toho, že každé takové x je jednoho z tvarů $\alpha, \pi-\alpha, \pi+\alpha$, resp. $2\pi-\alpha$ podle toho, ve kterém z kvadrantů hodnota x leží (obr. 4.8). Taková „redukce“ argumentu $x \in \mathbb{R}$ na ostrý úhel má velký význam jednak při řešení goniometrických rovnic (viz 4.4), jednak při hledání přibližných hodnot $\sin x$ a $\cos x$ pomocí tabulek. Nejenže hodnoty sinu a kosinu určíme z tabulek sestavených pouze pro úhly z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, ale navíc díky vlastnosti, kterou jsme vyjádřili termínem kofunkce, lze dokonce vystačit s tabulkami hodnot sinu a kosinu v polovičním intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$.

Poznámka: Převodní vzorce pro sinus a kosinus, kterými jsme se v této podkapitole zabývali, lze odvodit i poněkud odlišným způsobem, při němž je zdůrazněna určenost obou funkcí jednou půlvlnou sinusoidy, zmíněná úvodem části 4.1.2.

4.2 Funkce tangens a kotangens

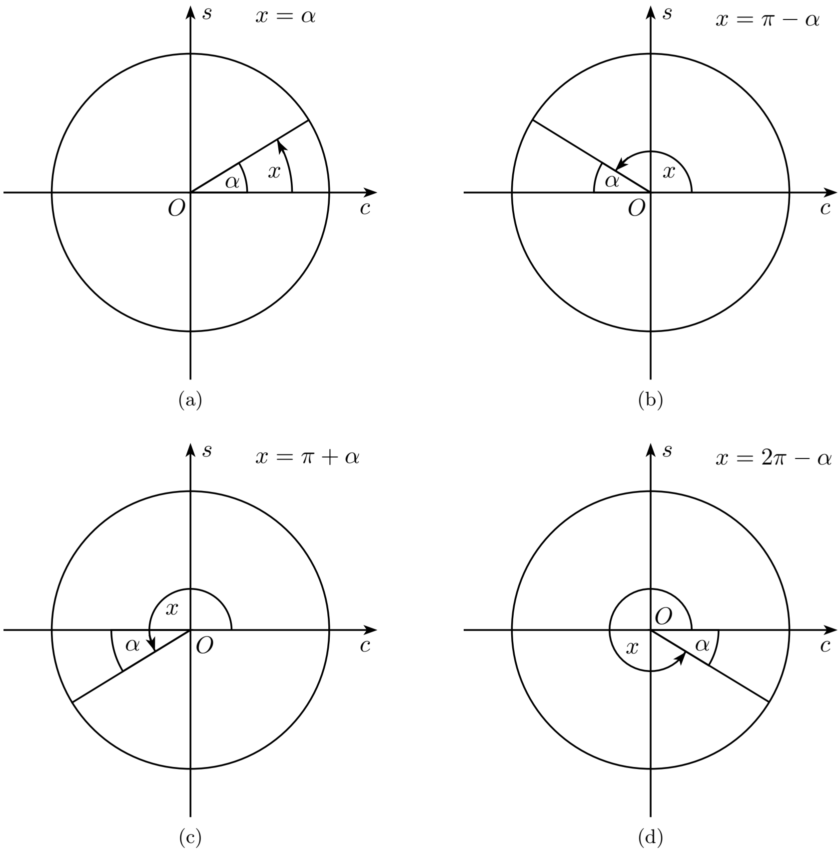
Nyní se budeme zabývat dalšími dvěma goniometrickými funkcemi. V kapitole 2 jsme se již s nimi setkali: tangens ostrého úhlu byl dán podílem délek stran v pravoúhlém trojúhelníku s tímto vnitřním úhlem, a to odvěsny protilehlé a přilehlé, hodnota kotangens byla určena převráceným podílem těchže délek. Všimnuli jsme si, že tyto funkce lze vyjádřit pomocí podílů funkcí sinus a kosinus. Tato podílová vyjádření využijeme nyní k tomu, abychom poté, co jsme rozšířili definiční obory funkcí sinus a kosinus na množinu reálných čísel, obdobného rozšíření dosáhli i pro funkce tangens a kotangens: *Funkcí tangens reálného argumentu x se nazývá funkce, která je dána předpisem*

$$\boxed{\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},}$$

funkci kotangens definujeme předpisem

$$\boxed{\operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.}$$

[6]Jejich snadná a bezpečná zapamatovatelnost je dána tím, že jsme sinus a kosinus původně zavedli jako dvě kofunkce na pravoúhlém trojúhelníku.



Obrázek 4.8

Přímo z definice plyne jejich vzájemný vztah

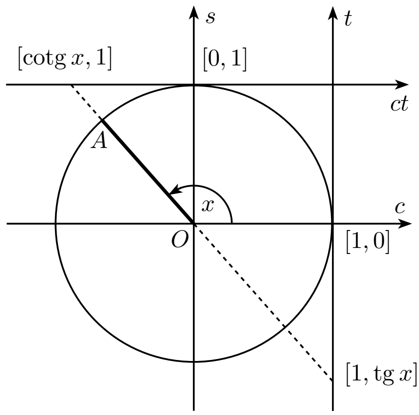
$$\boxed{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,}$$

který platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž mají obě hodnoty $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ smysl.
Hodnoty tangens a kotangens můžeme v modelu s goniometrickou ručičkou odečíst jako souřadnice na dvou číselných osách t a ct, umístěných v soustavě Ocs způsobem patrným z obrázku 4.9. Odtud je jasné, že platí

$$H(\operatorname{tg}) = H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$$

a že funkce $\operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$ mají jednostranné nevlastní limity v bodech, ve kterých nejsou definovány a které nyní upřesníme společně s dalšími důsledky základních vlastností funkcí sinus a kosinus.

1. Definiční obor funkce tangens je množina všech reálných čísel x, pro které má výraz $\frac{\sin x}{\cos x}$ smysl, a to je právě tehdy, když $\cos x \neq 0$. Obdobně definiční obor funkce kotangens je množina všech reálných čísel x, pro které má výraz $\frac{\cos x}{\sin x}$ smysl, a to je právě tehdy, když $\sin x \neq 0$. Protože nulové body funkcí kosinus a sinus známe (goniometrická ručička leží na ose s, resp. c neboli



Obrázek 4.9: Číselné osy pro tangens a kotangens

je rovnoběžná s osou t, resp. ct), platí

$$D(\mathrm{tg}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \qquad \text{a} \qquad D(\mathrm{cotg}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)\,.$$

2. Perioda obou funkcí tangens a kotangens je π:

$$\boxed{\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x \qquad \text{a} \qquad \operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x.}$$

   Plyne to ze společné antiperiody π funkcí sinus a kosinus:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x+\pi) = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{cotg} x.$$

3. Obě funkce tangens a kotangens jsou liché:

$$\boxed{\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \qquad \text{a} \qquad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.}$$

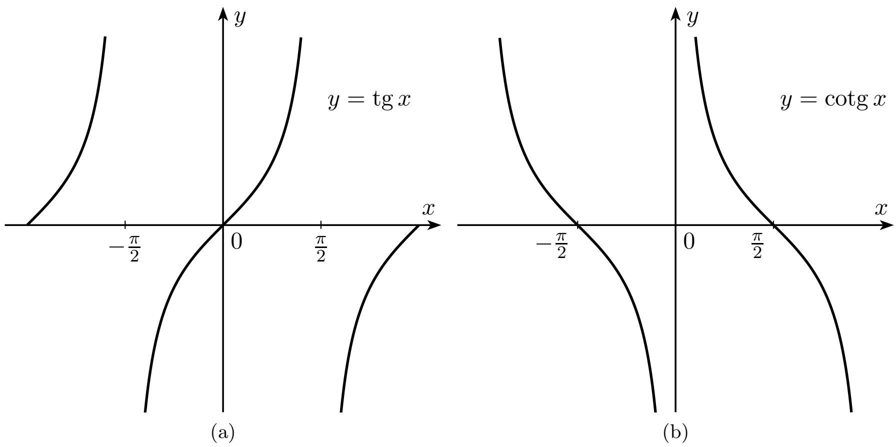
   Plyne to z lichosti funkce sinus a sudosti funkce kosinus:

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{cotg} x.$$

Pro křivky, jež jsou grafy funkcí tangens a kotangens, užíváme názvů *tangentoida* a *kotangentoida* (obr. 4.10).

O cyklometrických funkcích arkustangens ($\operatorname{arctg} x$) a arkuskotangens ($\operatorname{arccotg} x$), inverzních ke goniometrickým $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$, jsme se již zmínili v části 2.1.2, ovšem tehdy jsme je uvažovali pouze na intervalu $\langle 0, \infty)$. Příslušné hodnoty (úhly) ležely mezi 0 a $\frac{\pi}{2}$.

Funkce tangens ani funkce kotangens není na $\mathbb{R}$ prostá, tedy při zavádění funkcí $y = \operatorname{arctg} x$ a $y = \operatorname{arccotg} x$ (obdobně jako u funkcí arkussinus a arkuskosinus) je potřeba se omezit pouze na takové maximální části definičních oborů funkcí tangens a kotanges, na kterých jsou tyto funkce prosté a které přitom obsahují již zmíněný interval $(0, \frac{\pi}{2})$. U funkce tangens je to interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,



Obrázek 4.10: Grafy funkcí tangens a kotangens

u funkce kotangens jiný interval $(0, \pi)$. Na příslušném intervalu je funkce tangens rostoucí, funkce kotangens klesající a obě tam nabývají všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$. Pro inverzní funkce proto vybereme obory hodnot

$$H(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{a} \qquad H(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi).$$

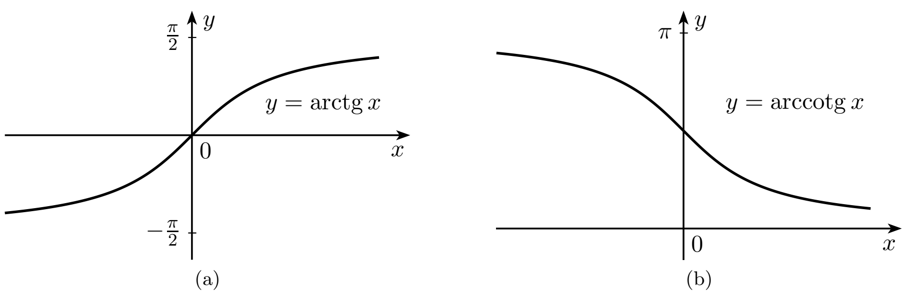
Získáme tak dvě funkce se společným definičním oborem

$$D(\operatorname{arctg}) = D(\operatorname{arccotg}) = (-\infty, \infty),$$

jejichž formální definice lze zapsat ekvivalencemi

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \wedge -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$
$$y = \operatorname{arccotg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y \wedge 0 < y < \pi.$$

Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens vidíme na obr. 4.11. Oba grafy mají dvě asymptoty



Obrázek 4.11: Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

rovnoběžné s osou x. Je rovněž patrné, že zavedená funkce arkustangens je rostoucí, zatímco funkce arkuskotangens na celém svém definičním oboru klesá. Uvedeme ještě a dokážeme tři vztahy pro cyklometrické funkce

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \qquad \operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x, \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2},}$$

platné pro každé $x \in \mathbb{R}$.

- Je-li $y = \operatorname{arctg} x$, pak $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ a $x = \operatorname{tg} y$, odkud $-\frac{\pi}{2} < -y < \frac{\pi}{2}$ a $-x = \operatorname{tg}(-y)$, neboť funkce tangens je lichá. Poslední dva vztahy už znamenají, že $-y = \operatorname{arctg}(-x)$.

- Je-li $y = \operatorname{arccotg} x$, pak $0 < y < \pi$ a $x = \operatorname{cotg} y$, odkud $-\pi < -y < 0$, následně po přičtení π obdržíme $0 < \pi - y < \pi$. Nyní využijeme rovnost[7] $\operatorname{cotg}(\pi - y) = -\operatorname{cotg} y$, podle které platí $\operatorname{cotg}(\pi - y) = -\operatorname{cotg} y = -x$. Odtud a z nerovnosti $0 < \pi - y < \pi$ dostáváme $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - y$ a po dosazení $y = \operatorname{arccotg} x$ dokazovanou rovnost.

- Označme $y = \operatorname{arctg} x$ a ukažme, že $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - y$. Je-li $x \geq 0$, je $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{tg} y = x$, odkud $0 < \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - y) = x$ (protože tangens a kotangens jsou kofunkce z části 2.1.2) a kýžený vztah platí. Je-li $x < 0$, je $-\frac{\pi}{2} < y < 0$ a $\operatorname{tg} y = x$, odkud $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - y < \pi$ a $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - y) = \operatorname{cotg}(\pi - [\frac{\pi}{2} + y]) = -\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} + y) = -\operatorname{tg}(-y) = \operatorname{tg} y = x$, kde jsme mj. využili vlastnost kofunkcí pro ostré úhly $-y$ a $\frac{\pi}{2} + y$ (o součtu $\frac{\pi}{2}$).

4.3 Základní goniometrické vzorce

Při práci s goniometrickými funkcemi používáme celou řadu vzorců. Nejdůležitější z nich teď postupně uvedeme po skupinách a opatříme je „šňůrou" důkazů, tvořících v textu naší práce celek podobný tomu, jaký se v současnosti vyžaduje při exaktním výkladu kterékoliv matematické teorie. Některé další goniometrické vzorce pak odvodíme v podkapitole 4.6.

Jako první zmíníme ještě v této úvodní části vztah, o kterém jsme již pojednávali v předchozích kapitolách. Tento (snad nejznámější) goniometrický vzorec

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (\text{pro každé } x \in \mathbb{R})}$$

(zvaný *goniometrická jednička*) plyne z našeho modelu z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník, jehož přeponou je goniometrická ručička OA a jehož odvěsny mají délky $|\cos x|$ a $|\sin x|$ (viz obr. 4.12).

Kromě goniometrické jedničky známe již jednu skupinu vzorců, kterým jsme věnovali část 4.1.2 a kterým říkáme vzorce *převodní*. My je podstatně využijeme i při klíčovém důkazu této podkapitoly, a to hned v následující části 4.3.1.

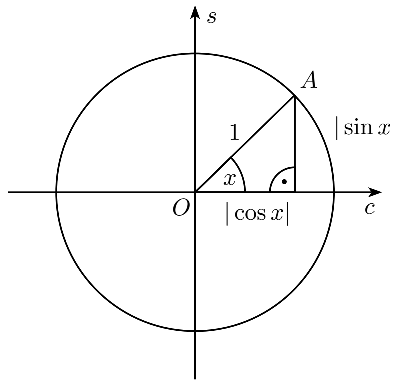
4.3.1 Součtové a rozdílové vzorce

Z předchozích trigonometrických kapitol už dobře známe *součtové vzorce* pro sinus a kosinus

$$\boxed{\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,} \tag{4.1}$$

$$\boxed{\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.} \tag{4.2}$$

[7] Rovnost plyne z lichosti funkce kotangens a dále z její periody π.



Obrázek 4.12

Dokázali jsme je nejprve v situaci, kdy zastoupené úhly $x, y, x + y$ leží v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, později rozšířeném na interval $(0, \pi)$. Naším cílem je nyní ukázat, že tyto vzorce platí pro funkce sinus a kosinus v reálném oboru bez jakéhokoliv omezení, tedy pro libovolná čísla $x, y \in \mathbb{R}$.

S ohledem na společnou periodu 2π obou funkcí sinus a kosinus stačí ověřit platnost vzorců (4.1) a (4.2) za předpokladu, že čísla x, y jsou vybrána z intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Toho zřejmě dosáhneme, když dokážeme následující dvě tvrzení:

- Vzorce (4.1) a (4.2) platí pro libovolná x, y z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2})$.
- Platí-li vzorce (4.1) a (4.2) pro nějakou dvojici (x, y), platí i pro dvojice $(x+\frac{\pi}{2}, y)$ a $(x, y+\frac{\pi}{2})$.

První tvrzení je zřejmé, je-li některé z čísel x, y rovno nule, neboť $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. V opačném případě, kdy obě čísla x, y leží v otevřeném intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, leží všechna tři čísla $x, y, x + y$ v intervalu $(0, \pi)$ a v takové situaci vzorce (4.1) a (4.2) platí podle trigonometrických důkazů uvedených v podkapitole 3.6.

Předpokládejme tedy, že vzorce (4.1) a (4.2) platí pro danou dvojici (x, y) a pro dvojici $(x+\frac{\pi}{2}, y)$ zapišme nejprve vzorec (4.1):

$$\underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{2} + y\right)}_{\cos(x+y)} = \underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos x} \cos y + \underbrace{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin x} \sin y.$$

Pod hodnoty sinu a kosinu s argumenty obsahujícími sčítanec $\frac{\pi}{2}$ jsme zapsali jejich zjednodušená vyjádření podle převodních vzorců z části 4.1.2. Vidíme, že vzorec pro sinus součtu na dvojici $(x + \frac{\pi}{2}, y)$ je ekvivalentní se vzorcem (4.2) pro kosinus součtu na původní dvojici (x, y). Podobně je vidět, že vzorec pro kosinus součtu na dvojici $(x + \frac{\pi}{2}, y)$

$$\underbrace{\cos\left(x + \frac{\pi}{2} + y\right)}_{-\sin(x+y)} = \underbrace{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin x} \cos y - \underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos x} \sin y$$

je ekvivalentní se vzorcem (4.1) pro sinus součtu na původní dvojici (x, y). Protože dle předpokladu oba vzorce na dvojici (x, y) platí, platí i na dvojici $(x + \frac{\pi}{2}, y)$. Stejně tak se oba vzorce zdůvodní i pro dvojici $(x, y + \frac{\pi}{2})$. Tím je celý důkaz vzorců (4.1) a (4.2) v oboru $\mathbb{R}$ ukončen.

Z dokázaných vzorců (4.1) a (4.2) odvodíme nyní vzorce pro $\sin(x - y)$ a $\cos(x - y)$, které se nazývají souhrnně spolu se vzorci (4.1) a (4.2) součtové, nicméně v některé literatuře je čtenář nalezne pod názvem *rozdílové vzorce* pro sinus a kosinus. Mají tvar

$$\boxed{\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,} \tag{4.3}$$

$$\boxed{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y} \tag{4.4}$$

a z (4.1) a (4.2) plynou díky paritám funkcí sinus a kosinus:

$$\sin(x-y) = \sin(x+(-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$\cos(x-y) = \cos(x+(-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Aby byly součtové a rozdílové vzorce kompletní, odvodíme ještě vzorce pro $\operatorname{tg}(x \pm y)$ a $\operatorname{cotg}(x \pm y)$. Kromě vzorců (4.1) a (4.2) využijeme toho, že obě funkce tangens i kotangens jsou liché:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.} \tag{4.5}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \operatorname{tg}(x+(-y)) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-y)}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(-y)} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.} \tag{4.6}$$

$$\operatorname{cotg}(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y} = \frac{\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} - \frac{\sin x \sin y}{\sin x \sin y}}{\frac{\sin x \cos y}{\sin x \sin y} + \frac{\cos x \sin y}{\sin x \sin y}} = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}(x+y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x}.} \tag{4.7}$$

$$\operatorname{cotg}(x-y) = \operatorname{cotg}(x+(-y)) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg}(-y) - 1}{\operatorname{cotg}(-y) + \operatorname{cotg} x} = \frac{-\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{-\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}(x-y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y + 1}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x}.} \tag{4.8}$$

V závěru této části se zmíníme o prakticky důležité otázce, jak si součtové vzorce pro sinus a kosinus dobře zapamatovat, či spíše jak je v případě nutnosti rychle a bezpečně odvodit. Jak podrobněji posoudíme v šesté kapitole, bezesporu nejlepším řešením je algebraicky roznásobit součin dvou komplexních jednotek v levé straně rovnosti

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)(\cos y + \mathrm{i} \sin y) = \cos(x+y) + \mathrm{i} \sin(x+y)$$

a porovnat reálné a imaginární části obou stran. Nyní spíše jako kuriozitu uveďme, že oba součtové i oba rozdílové vzorce pro sinus a kosinus lze zapsat jedinou rovností pro násobení čtvercových matic řádu 2:

$$\begin{bmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ \sin(x-y) & \cos(x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Funkce dvojnásobného a polovičního argumentu

Vzorce pro funkce dvojnásobného argumentu, dříve v podkapitole 2.5 uvedené pouze pro úhel z intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$, nyní díky výše odvozeným součtovým vzorcům dokážeme pro všechna reálná čísla:

$$\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2\sin x \cos x,$$

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x.} \tag{4.9}$$

$$\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.} \tag{4.10}$$

Když přepíšeme kvadráty ve vzorci pro $\cos 2x$ pomocí goniometrické jedničky, obdržíme ještě jeho další dva tvary:

$$\boxed{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \text{a} \qquad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.} \tag{4.11}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.} \tag{4.12}$$

$$\operatorname{cotg} 2x = \operatorname{cotg}(x+x) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x}.} \tag{4.13}$$

Odvoďme ještě vzorce, které ukazují, jak hodnoty $\sin 2x$ a $\cos 2x$ závisí na hodnotě $\operatorname{tg} x$:

$$\sin 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\boxed{\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.} \tag{4.14}$$

$$\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$\boxed{\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.} \tag{4.15}$$

Praktický význam tyto vzorce přinášejí při tzv. *univerzální goniometrické substituci*

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}}$$

vhodné k řešení některých goniometrických rovnic nebo k výpočtům neurčitých integrálů.

Přejděme nyní ke vzorcům pro funkce polovičního argumentu. K jejich odvození nám pomohou vztahy (4.11), ve kterých zaměníme x za $\frac{x}{2}$:

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},} \tag{4.16}$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.} \tag{4.17}$$

Jak je vidět, hodnoty $\cos\frac{x}{2}$ a $\sin\frac{x}{2}$ nejsou hodnotou $\cos x$ určeny jednoznačně. Hodnota $\cos x$ se totiž nezmění, zvětšíme-li (neznámý) argument x o 2π. Při takové změně se ovšem poloviční argument $\frac{x}{2}$ zvětší o π, takže obě hodnoty $\cos\frac{x}{2}$ a $\sin\frac{x}{2}$ změní znaménko:

$$\begin{aligned} \sin\frac{x+2\pi}{2} &= \sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right) = -\sin\frac{x}{2}, \\ \cos\frac{x+2\pi}{2} &= \cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right) = -\cos\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Zdůrazněme, že znaménka hodnot $\cos\frac{x}{2}$ a $\sin\frac{x}{2}$ nelze určit ani v případě, kdy kromě hodnoty $\cos x$ známe i znaménko ve vztahu $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ (vysvětlení je stejné).

Nyní odvodíme vzorce pro tangens a kotangens polovičního argumentu:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.} \tag{4.18}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}},} \tag{4.19}$$

přitom v obou vzorcích (4.18) a (4.19) se bere stejné znaménko, které ani v tomto případě není určeno hodnotou $\cos x$. Nelze to ovšem tentokrát zdůvodnit možnou současnou změnou hodnot $\cos\frac{x}{2}$ a $\sin\frac{x}{2}$ na opačná čísla. Vysvětlení nám poskytnou jiné dva vzorce pro hodnoty $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ a $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$, které obdobnou nejednoznačností znamének „netrpí“:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1+\cos x},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.} \tag{4.20}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1-\cos x},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x}.} \tag{4.21}$$

Vidíme, že hodnoty $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ a $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ mají stejné znaménko jako hodnota $\sin x$, dělená v obou vzorcích kladnými výrazy $1 + \cos x$, resp. $1 - \cos x$. Dodejme, že pokud do vzorců (4.20) a (4.21) dosadíme $\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$, dostaneme po snadné úpravě vzorce (4.18) a (4.19) s nejednoznačnými znaménky $\pm$.

4.3.3 Převody součinů na součty a naopak

V závěrečné části našeho přehledu základních goniometrických vzorců popíšeme, jak název části napovídá, významné úpravy, které při výpočtech s goniometrickými funkcemi často potřebujeme. Nejdříve uvedeme a dokážeme skupinu vzorců pro součiny dvou goniometrických funkcí:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x \cdot \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}, \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}, \\ \sin x \cdot \cos y &= \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}. \end{aligned}} \tag{4.22}$$

K důkazu využijeme toho, že tyto součiny se objevují v pravých stranách součtových a rozdílových vzorců (4.1) – (4.4). Dostaneme je proto z rovností

$$\begin{aligned} \cos(x-y) - \cos(x+y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y - (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 \sin x \sin y, \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2 \cos x \cos y, \\ \sin(x+y) + \sin(x-y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y \end{aligned}$$

po vydělení číslem 2.

Druhou skupinu tvoří vzorce, které naopak součty a rozdíly dvou funkcí převádějí na součiny:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \end{aligned}} \tag{4.23}$$

Odvození zahájíme tak, že přepíšeme výše uvedenou rovnost

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

v nových proměnných a, b. Abychom obdrželi vzorec pro součet $\sin x + \sin y$, položíme $x = a+b$, $y = a - b$ a z této soustavy vyjádříme $a = \frac{x+y}{2}$ a $b = \frac{x-y}{2}$. Pro taková a, b dostaneme již první vzorec v (4.23). Z něho hned plyne vzorec druhý, neboť funkce sinus je lichá:

$$\sin x + \sin(-y) = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Součet a rozdíl kosinů získáme obdobně:

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b \qquad \Rightarrow \qquad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \cdot \sin b \qquad \Rightarrow \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

4.4 Goniometrické rovnice a nerovnice

Goniometrickou rovnicí či nerovnicí nazýváme úlohu nalézt všechna taková čísla x (velikosti úhlů), která splňují danou rovnici, resp. nerovnici, v níž se vyskytuje neznámá x jako nezávislá proměnná v argumentu jedné nebo více goniometrických funkcí.[8] Příklady goniometrických rovnic jsou

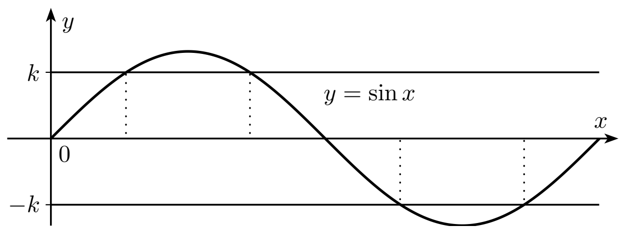
$$\cos x = x, \quad \operatorname{tg} x - 2\sin x = 0, \quad \operatorname{cotg}(4x - 1) = -6,$$

přičemž hned první z nich je prakticky obtížně řešitelná, neboť neznámá x v ní vystupuje i mimo argument goniometrické funkce. Naproti tomu třetí rovnice patří k těm nejjednodušším a běžně řešeným, kterými náš výklad metod zahájíme.

Goniometrickou rovnici ve tvaru

$$\boxed{f(x) = c,}$$

kde f je jedna z goniometrických funkcí $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$ a c je dané reálné číslo, nazýváme *základní goniometrickou rovnicí.* Jak víme, s funkcemi sin a cos má taková rovnice v oboru $\mathbb{R}$ nějaké řešení (budeme říkat, že je *řešitelná*), jen když je dané c z intervalu $\langle -1, 1\rangle$; u funkcí tg a cotg může být $c \in \mathbb{R}$ libovolné. Pokud je ovšem rovnice $f(x) = c$ řešitelná, má díky periodicitě funkce f nekonečně mnoho řešení. Stačí ji tedy řešit u funkcí sin a cos pouze na intervalu $\langle 0, 2\pi)$ a následně k řešením odtud přičíst celočíselné násobky čísla 2π; u funkcí tg a cotg přičítáme ke vždy jedinému řešení na intervalech $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ pro tangens a $(0, \pi)$ pro kotangens celočíselné násobky čísla π.



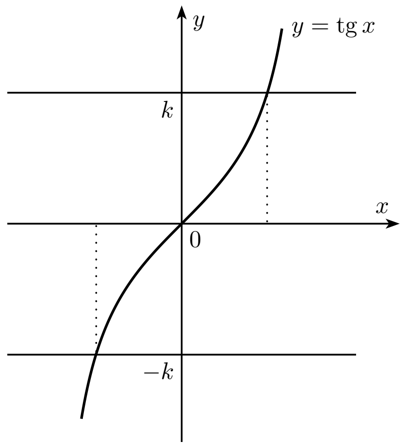
Obrázek 4.13: Rovnice $\sin x = k$ a $\sin x = -k$ řešené na sinusoidě

Praktický postup při řešení rovnice $f(x) = c$:

1. Najdeme řešení x_0 rovnice $f(x) = |c|$, které leží v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ (říkejme v prvním kvadrantu) pomocí tabulek či kalkulačky, neumíme-li ho určit (pro význačné hodnoty $|c|$) zpaměti, případně ho zapíšeme symbolicky jako $x_0 = \operatorname{arcf}(|c|)$. Takové řešení x_0 je na tomto intervalu nejvýše jedno díky monotónnosti všech goniometrických funkcí. Není-li rovnice $f(x) = |c|$ řešitelná, nemá ani původní rovnice $f(x) = c$ řešení.

2. Sestrojíme řešení rovnice $f(x) = c$ pomocí hodnoty x_0 nalezené v bodě 1 ve všech čtyřech kvadrantech $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle, \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle, \langle \pi, \frac{3\pi}{2}\rangle, \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle$ u funkcí $\sin, \cos$ a v prvních dvou kvadrantech u funkcí $\operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$. Ve kterých ze zmíněných čtyřech či dvou kvadrantech řešení skutečně existují, závisí na znaménku hodnoty c. K určení těchto řešení máme dvě možnosti:

[8] Způsob nazývat *rovnici* přímo *úlohou* jsme převzali z učebnice [13], str. 423, neboť tím podle našeho názoru zdařile vystihujeme rozdíl mezi termíny *rovnice* a *rovnost*.



Obrázek 4.14: Rovnice $\operatorname{tg} x = k$ a $\operatorname{tg} x = -k$ řešené na tangentoidě

- Využít známého průběhu grafu funkce f, kterým je sinusoida, kosinusoida, tangentoida nebo kotangentoida. Na obr. 4.13 a 4.14 vidíme řešení goniometrických rovnic $\sin x = k$, $\sin x = -k$ a $\operatorname{tg} x = k$, $\operatorname{tg} x = -k$, kde $k > 0$. Z obr. 4.13 jsou dobře vidět vztahy mezi hodnotami sinu v bodech $x_0, \pi - x_0, \pi + x_0, 2\pi - x_0$, které při určování řešení rovnice $\sin x = \pm k$ využíváme a které jsme podrobně posuzovali v podkapitole 4.1.

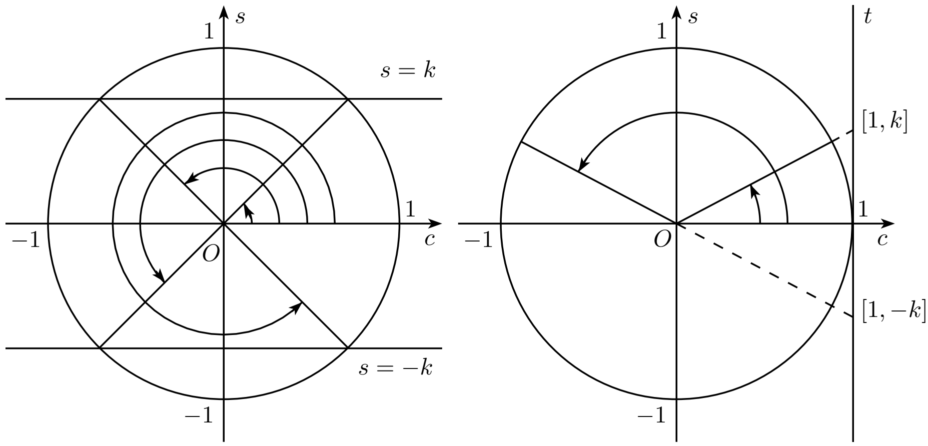
- Vrátit se k modelu goniometrické ručičky v jednotkové kružnici v rovině Ocs doplněné případně o osy t a ct pro hodnoty tangens a kotangens. Na obrázku 4.15 vlevo vidíme řešení goniometrických rovnic $\sin x = k$ a $\sin x = -k$, kde $k > 0$. V prvním případě jde o úhly z I. a II. kvadrantu a ve druhém případě jsou výsledné úhly x z kvadrantu III. a IV., jak lze vyčíst z obrázku. V pravé části obrázku jsou znázorněna řešení rovnic $\operatorname{tg} x = k$ a $\operatorname{tg} x = -k$.

K základním goniometrickým rovnicím mají blízko rovnice

$$\boxed{f(ax + b) = c,}$$

kde f je jedna z goniometrických funkcí a $a, b, c \in \mathbb{R}$ daná čísla, $a \neq 0$. Lineární substitucí $y = ax+b$ převedeme takovou rovnici na základní rovnici $f(y) = c$.

■ **Příklad 4.4.1.** V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$.



(a) (b)

Obrázek 4.15: Rovnice $\sin x = k$, $\sin x = -k$ a $\operatorname{tg} x = k$, $\operatorname{tg} x = -k$ řešené na jednotkové kružnici

Řešení:

$$\begin{aligned}
y = 2x + \frac{\pi}{4} \quad &\Rightarrow \quad \sin y = -\frac{1}{2},\\
\sin y = \frac{1}{2}, y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{\pi}{6},\\
\sin y = -\frac{1}{2}, y \in \langle 0, 2\pi) \quad &\Rightarrow \quad y_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, y_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6},\\
\sin y = -\frac{1}{2}, y \in \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \quad y_{1,k} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, y_{2,k} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}),\\
2x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad &\Rightarrow \quad \boxed{x_{1,k} = \frac{11\pi}{12} + k\pi,}\\
2x + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad &\Rightarrow \quad \boxed{x_{2,k} = \frac{19\pi}{12} + k\pi.}
\end{aligned}$$

■

V dalších příkladech, kterými budeme ilustrovat metody řešení složitějších goniometrických rovnic, už vypisovat řešení konkrétních základních rovnic $f(ax + b) = c$ (na které řešené rovnice vždy redukujeme) nebudeme.

Přejdeme nyní k důležitým z hlediska praxe rovnicím

$$\boxed{f(ax + b) = f(cx + d),}$$

kde f je jedna z goniometrických funkcí $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$ a a, b, c, d jsou daná reálná čísla. Kvůli periodičnosti funkce f nelze zadanou rovnici redukovat na rovnici $ax+b = cx+d$. Funkce tangens a kotangens jsou na základním intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, resp. $(0, \pi)$ délky jejich společné periody π prosté.

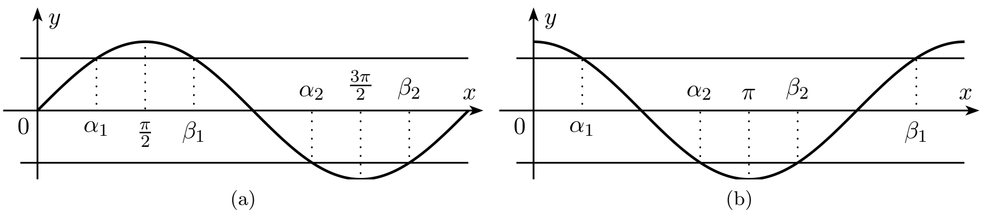
Proto lze zadané rovnice s těmito dvěma funkcemi řešit úpravami

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(ax+b) = \operatorname{tg}(cx+d) \quad &\Rightarrow \quad ax+b = cx+d+k\pi, \\ \operatorname{cotg}(ax+b) = \operatorname{cotg}(cx+d) \quad &\Rightarrow \quad ax+b = cx+d+k\pi, \end{aligned}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$; musíme však v závěru řešení zjistit, pro která z nalezených řešení x_k s parametrem k má hodnota $\operatorname{tg}(ax_k+b)$, resp. $\operatorname{cotg}(ax_k+b)$ smysl. U rovnic

$$\boxed{\sin(ax+b) = \sin(cx+d), \qquad \cos(ax+b) = \cos(cx+d)}$$

je situace složitější, neboť funkce sinus a kosinus se společnou periodou 2π nejsou na intervalu délky 2π prosté. Uvedeme nyní dva postupy, jak takové rovnice řešit. Protože tvar argumentů $ax+b, cx+d$ není pro tyto úvahy podstatný, pojednáme o rovnicích $\sin U = \sin V$ a $\cos U = \cos V$ s obecnými výrazy U a V, které nabývají hodnot z oboru $\mathbb{R}$.



Obrázek 4.16: Kdy pro $\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi)$ platí $\sin\alpha = \sin\beta$, resp. $\cos\alpha = \cos\beta$.

- Úvaha o základním intervalu $\langle 0, 2\pi)$.

  Rovnost $\sin\alpha = \sin\beta$, $\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi)$, $\alpha \neq \beta$, nastane ve dvou případech (viz obr. 4.16 vlevo):

  $$\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \beta_1 = \pi - \alpha_1 \qquad \text{a} \qquad \frac{\alpha_2+\beta_2}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \beta_2 = 3\pi - \alpha_2.$$

  Díky periodě funkce sinus odtud získáme závěr o řešení rovnice $\sin U = \sin V$ v oboru $\mathbb{R}$:

  $$\boxed{\sin U = \sin V \quad \Leftrightarrow \quad V = U + 2k\pi \quad \vee \quad V = \pi - U + 2k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.}$$

  Rovnost $\cos\alpha = \cos\beta$, $\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi)$, $\alpha \neq \beta$, nastane opět ve dvou případech (viz obr. 4.16 vpravo):

  $$\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \beta_1 = 2\pi - \alpha_1 \qquad \text{a} \qquad \frac{\alpha_2+\beta_2}{2} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \beta_2 = 2\pi - \alpha_2.$$

  Díky periodě funkce kosinus odtud získáme závěr o řešení rovnice $\cos U = \cos V$ v oboru $\mathbb{R}$:

  $$\boxed{\cos U = \cos V \quad \Leftrightarrow \quad V = U + 2k\pi \quad \vee \quad V = -U + 2k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z}.}$$

- Úprava na součin.

  Rovnice typu $\sin U = \sin V$ a $\cos U = \cos V$ můžeme pomocí vzorců pro rozdíly sinů a kosinů přepsat do součinových tvarů

$$0 = \sin U - \sin V = 2\sin\frac{U-V}{2}\cos\frac{U+V}{2},$$
$$0 = \cos U - \cos V = -2\sin\frac{U-V}{2}\sin\frac{U+V}{2}$$

  a pak řešit základní otázku, kdy se jeden nebo druhý činitel rovná nule, což jsou základní goniometrické rovnice pro nulové body funkcí sinus a kosinus. Jejich řešení dobře známe

$$\boxed{\sin W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W = k\pi \qquad \text{a} \qquad \cos W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{kde } k \in \mathbb{Z}.}$$

Na rovnice, kterými jsme se právě zabývali, můžeme jednoduchými úpravami převést i některé další podobné rovnice. Uveďme několik příkladů takových úprav:

$$\begin{aligned}
\sin(ax+b) &= -\sin(cx+d) &\quad\Leftrightarrow\quad& \sin(ax+b) = \sin(-cx-d),\\
\cos(ax+b) &= -\cos(cx+d) &\quad\Leftrightarrow\quad& \cos(ax+b) = \cos(cx+d+\pi),\\
\operatorname{tg}(ax+b) &= \operatorname{cotg}(cx+d) &\quad\Leftrightarrow\quad& \operatorname{tg}(ax+b) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - cx - d\right),\\
\sin(ax+b) &= \cos(cx+d) &\quad\Leftrightarrow\quad& \sin(ax+b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - cx - d\right).
\end{aligned}$$

■ **Příklad 4.4.2.** V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = -\cos(2x + \frac{\pi}{3})$.
Řešení: V prvním kroku využijeme převodního vzorce $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$:

$$\begin{aligned}
\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),\\
\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right),\\
3x + \frac{\pi}{4} &= \left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \qquad \Rightarrow \quad x_{1,k} = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\\
3x + \frac{\pi}{4} &= \pi - \left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_{2,k} = \frac{11\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5},\ \text{kde } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

■

Metodu substituce jsme dosud uplatňovali pouze tak, že za novou neznámou jsme volili *argument* goniometrické funkce, která v řešené rovnici vystupovala. Metodicky významnější je možnost volit za neznámou přímo dotyčnou *hodnotu* goniometrické funkce, která v rovnici vystupuje. Tak často ze složité rovnice pomocí jedné ze substitucí

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{cotg} x,\ y = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \text{obecněji } y = f(ax+b)$$

získáme rovnici, většinou algebraickou, s novou neznámou y a pak určíme všechny její reálné kořeny $y_1, y_2, \ldots, y_n$. (V praktických situacích půjde obvykle o kvadratickou rovnici, která má vždy nejvýše dva reálné kořeny.) Po návratu k původní neznámé vyřešíme, nám již známou metodou, goniometrické rovnice tvaru

$$f(ax+b)=y_1,\ f(ax+b)=y_2,\cdots,\ f(ax+b)=y_n.$$

Tak například rovnice $2\cos^2 x-7\cos x+3=0$ po substituci $y=\cos x$ přejde v kvadratickou rovnici $2y^2-7y+3=0$ s kořeny $y_1=3$ a $y_2=\frac{1}{2}$; zbývá vyřešit rovnici $\cos x=\frac{1}{2}$ (druhá rovnice $\cos x=3$ žádné řešení nemá).
U některých goniometrických rovnic je potřeba před samotným zavedením substituce přepsat jednu goniometrickou funkci, popř. její druhou mocninu, pomocí jiné goniometrické funkce. V tomto kroku využíváme vztahy:

$$\begin{array}{lll} \sin^2 x = 1-\cos^2 x, & \cos^2 x = 1-\sin^2 x, & \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \\ \sin 2x = 2\sin x\cos x, & \cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x = 1-2\sin^2 x = 2\cos^2 x-1. & \end{array}$$

Konkrétně rovnici $7\cos x+2\sin^2 x-5=0$ přepíšeme takto:

$$7\cos x+2(1-\cos^2 x)-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos^2 x-7\cos x+3=0.$$

Uveďme nejčastější případy goniometrických rovnic převáděných na algebraické rovnice.

- $F(\sin x,\cos^2 x)=0$ a $F(\sin x,\cos 2x)=0$ řešíme substitucí $\boxed{y=\sin x.}$
- $F(\cos x,\sin^2 x)=0$ a $F(\cos x,\cos 2x)=0$ řešíme substitucí $\boxed{y=\cos x.}$
- $F(\sin x\pm\cos x,\sin 2x)=0$ řešíme substitucí $\boxed{y=\sin x\pm\cos x}$, přitom využíváme rovnosti $y^2=1\pm\sin 2x$.
- Substitucí $\boxed{y=\operatorname{tg} x}$ řešíme rovnice $F(\cos x,\sin x)=0$ speciálního typu, u nichž je funkce $F(c,s)$ v proměnných c,s *homogenní*. Znamená to, že existuje (nejčastěji celé nezáporné) číslo n, při kterém rovnost
$$F(tc,ts)=t^n\cdot F(c,s)$$
platí pro libovolná čísla t,c,s, kdy mají obě strany rovnosti smysl. Po dosazení $\sin x=y\cdot\cos x$, kde $y=\operatorname{tg} x$, totiž volbou $t=\cos x$ v naší podmínce dostaneme
$$F(\cos x,\sin x)=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \cos^n x\cdot F(1,y)=0.$$
V případě $\cos x\neq 0$ tak přecházíme k řešení rovnice $F(1,y)=0$ s neznámou y. Významným příkladem homogenních rovnic jsou rovnice
$$a\cos^2 x+b\cos x\sin x+c\sin^2 x=0$$
s konstantními koeficienty a,b,c, k nimž se někdy dostaneme po úpravě rovnic obsahujících $\cos 2x$ nebo $\sin 2x$. Za zmínku stojí, že na uvedenou homogenní rovnici lze převést i rovnici
$$a\cos^2 x+b\cos x\sin x+c\sin^2 x=d$$
s další konstantou $d\neq 0$, kterou lze díky goniometrické jedničce přepsat do tvaru
$$(a-d)\cos^2 x+b\cos x\sin x+(c-d)\sin^2 x=0.$$

V předchozím výčtu chybí rovnice obecného tvaru $F(\cos x, \sin x) = 0$, na který lze snadno převést i rovnice typu $F(\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x) = 0$. Takové rovnice (zejména ty, u kterých je funkce F lineární v obou proměnných) se objevují v praktických úlohách, předchozí substituce však k jejich řešení zpravidla nevedou. Spíše jen *teoretický* význam pro řešení rovnic $F(\cos x, \sin x) = 0$ má tzv. *univerzální* substituce

$$\boxed{y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2y}{1-y^2}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1-y^2}{2y},}$$

neboť vede v nové neznámé y na algebraické rovnice vysokých stupňů. Výhodnějším postupem někdy bývá zavést dvě nové neznámé $\boxed{c = \cos x,\ s = \sin x}$ a místo jedné původní rovnice $F(\cos x, \sin x) =$ $= 0$ řešit soustavu rovnic o dvou neznámých

$$\boxed{F(c, s) = 0, \quad c^2 + s^2 = 1.}$$

Takový postup je schůdný zvláště tehdy, když z první rovnice lze neznámou c vyjádřit pomocí s, nebo naopak s pomocí c. Po dosazení takového vyjádření do druhé rovnice pak řešíme rovnici pro zbylou neznámou s, resp. c.

Jak jsme již naznačili, významným příkladem rovnic $F(\cos x, \sin x) = 0$ je rovnice

$$\boxed{a \cos x + b \sin x = c,}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, která bývá často nazývána *lineární rovnicí mezi kosinem a sinem* a které se teď budeme věnovat podrobněji. Předně si povšimneme, že pokud je jedno z čísel a, b, c rovno nule, získáváme základní goniometrickou rovnici (není-li ovšem $a = b = 0$), kterou již umíme řešit:

$$\begin{array}{lllllll} a = 0 & \Rightarrow & \sin x = \dfrac{c}{b}, & & b = 0 & \Rightarrow & \cos x = \dfrac{c}{a}, \\ c = 0 & \Rightarrow & \operatorname{tg} x = -\dfrac{a}{b}\ (b \neq 0) & \vee & \operatorname{cotg} x = -\dfrac{b}{a}\ (a \neq 0). & & \end{array}$$

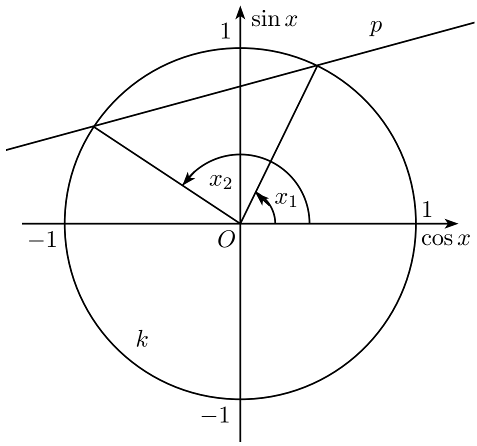
V dalším výkladu proto budeme předpokládat, že $a, b, c \neq 0$. Metody řešení lineární rovnice mezi kosinem a sinem jsou dvě – (výše obecně popsaná) *algebraická* metoda a metoda *goniometrická.* V tomto pořadí je nyní i posoudíme. Ještě předtím však poznamenejme, že k řešení zkoumané rovnice lze úspěšně uplatnit i třetí postup: dříve zmíněná univerzální substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nás od rovnice $a \cos x + b \sin x = c$ zřejmě přivede ke kvadratické rovnici

$$a(1 - y^2) + 2by = c(1 + y^2).$$

1. U algebraické metody přecházíme k soustavě dvou rovnic o dvou neznámých $\sin x$ a $\cos x$, které už teď nebudeme přeznačovat jako s a c:

$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= c, \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1. \end{aligned}$$

   Každé řešení $[\sin x, \cos x]$ této soustavy určuje nekonečně mnoho řešení původní rovnice díky periodě 2π obou funkcí sinus a kosinus, přičemž na intervalu $\langle 0, 2\pi)$ existuje jediný úhel x, který danému řešení odpovídá. Analyticky-geometrickou interpretací algebraické metody je



Obrázek 4.17: Rovnice $a\cos x + b\sin x = c$ řešená na jednotkové kružnici

hledání průniku přímky $p : a\cos x + b\sin x - c = 0$ a jednotkové kružnice $k : \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (obr. 4.17). Kritériem existence řešení rovnice $a\cos x + b\sin x = c$ je tedy podmínka, aby daný průnik byl neprázdný, což zapíšeme pomocí vzdálenosti počátku $O = [0, 0]$ od přímky p:

$$p \cap k \neq \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad |Op| \leq 1.$$

Z analytické geometrie vzpomeňme vzorec $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ pro vzdálenost bodu $[x_0, y_0]$ od přímky $ax + by + c = 0$, do kterého v naší podmínce $|Op| < 1$ dosadíme:

$$|Op| = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

Tak jsme odvodili, že rovnice $a\cos x + b\sin x = c$ je řešitelná, právě když její koeficienty a, b, c splňují podmínku $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. Je-li poslední nerovnost ostrá, má zkoumaná rovnice v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ dvě různá řešení, jak je tomu v situaci na obr. 4.17.

2. Myšlenkou goniometrické metody je úprava levé strany rovnice $a\cos x + b\sin x = c$ na tvar $K \cdot \sin(x + \varphi)$, kde $K > 0$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ jsou vhodná čísla.[9] Touto úpravou získáváme základní goniometrickou rovnici pro funkci sinus ve tvaru

$$K \cdot \sin(x + \varphi) = c \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x + \varphi) = \frac{c}{K}.$$

Ukažme proto, jak kýžené vyjádření levé strany původní rovnice prakticky najít. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ má platit

$$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= K \cdot \sin(x + \varphi), \\ a\cos x + b\sin x &= K \cdot (\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi), \\ \underline{a}\cos x + \underline{\underline{b}}\sin x &= \underline{K\sin\varphi}\cos x + \underline{\underline{K\cos\varphi}}\sin x. \end{aligned}$$

[9]Levá strana rovnice $a\cos x + b\sin x = c$ je tak v proměnné x *sinusoidální* funkcí. Tomuto druhu funkcí se budeme věnovat v příkladu 4.7.1.

Čísla K a φ tudíž hledáme z podmínek

$$K\sin\varphi = a, \qquad K\cos\varphi = b.$$

Umocněním obou rovností a jejich následným sečtením určíme neznámé kladné číslo K:

$$K^2\sin^2\varphi + K^2\cos^2\varphi = a^2+b^2 \quad\Rightarrow\quad K^2\cdot 1 = a^2+b^2 \quad\Rightarrow\quad K=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Pro druhou neznámou $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ tak dostaneme soustavu rovnic

$$\sin\varphi = \frac{a}{K} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{b}{K} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Její řešitelnost je zaručena tím, že součet druhých mocnin pravých stran obou rovnic je (díky určené hodnotě K) rovna 1. Prakticky lze číslo φ určit například tak, že nejprve v oboru $\langle 0, 2\pi)$ vyřešíme rovnici

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$$

a pak podle znamének čísel a, b vybereme řešení φ ze „správného“ kvadrantu.

■ **Příklad 4.4.3.** Oběma metodami vyřešte v oboru $\mathbb{R}$ rovnici $6\cos x - 8\sin x = 5$.
Řešení:

1. Algebraická metoda:

$$\begin{aligned}
&c=\cos x,\ s=\sin x \quad\Rightarrow\quad 6c-8s=5 \quad\Rightarrow\quad s=\frac{6c-5}{8},\\
&c^2+s^2=1 \quad\Rightarrow\quad c^2+\left(\frac{6c-5}{8}\right)^2=1 \quad\Rightarrow\quad 64c^2+(6c-5)^2=64 \quad\Rightarrow\\
&\Rightarrow\quad 100c^2-60c-39=0,\\
&D=(-60)^2-4\cdot 100\cdot(-39)=400\cdot 48 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{D}=80\sqrt{3},\\
&c_1=\frac{60+80\sqrt{3}}{200}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}, \quad s_1=\frac{6c_1-5}{8}=\frac{-4+3\sqrt{3}}{10},\\
&c_2=\frac{60-80\sqrt{3}}{200}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}, \quad s_2=\frac{6c_2-5}{8}=\frac{-4-3\sqrt{3}}{10}.
\end{aligned}$$

Dvojici kladných čísel (c_1, s_1) odpovídá řešení x z prvního kvadrantu, takže

$$x_{1,k} = \arcsin\frac{-4+3\sqrt{3}}{10} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Dvojici záporných čísel (c_2, s_2) odpovídá řešení x ze třetího kvadrantu, takže

$$x_{2,k} = \pi + \arcsin\frac{4+3\sqrt{3}}{10} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2. Goniometrická metoda:
   Zadanou rovnici vydělíme číslem $K = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$:

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x = \frac{1}{2},\\
&\sin(x+\varphi) = \frac{1}{2}, \text{ kde } \cos\varphi = -\frac{4}{5} \text{ a } \sin\varphi = \frac{3}{5},\\
&\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \varphi = \pi - \arcsin\frac{3}{5},\\
&x_{1,k} + \pi - \arcsin\frac{3}{5} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x_{2,k} + \pi - \arcsin\frac{3}{5} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\\
&x_{1,k} = -\frac{5\pi}{6} + \arcsin\frac{3}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),\\
&x_{2,k} = -\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{3}{5} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Přesvědčeme se, že oba postupy řešení vedly ke stejnému výsledku, že tedy platí rovnosti

$$\begin{aligned}
\arcsin\frac{-4+3\sqrt{3}}{10} &= -\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{3}{5},\\
\pi + \arcsin\frac{4+3\sqrt{3}}{10} &= -\frac{5\pi}{6} + \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi.
\end{aligned}$$

Protože $\frac{\pi}{6} < \arcsin\frac{3}{5} < \frac{\pi}{2}$, je první rovnost rovností dvou úhlů z prvního kvadrantu, takže platí, pokud

$$\frac{-4+3\sqrt{3}}{10} = \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{3}{5}\right).$$

Užitím součtového vzorce dostáváme

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{3}{5}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-4+3\sqrt{3}}{10}.$$

Druhá rovnost

$$\pi + \arcsin\frac{4+3\sqrt{3}}{10} = \frac{7\pi}{6} + \arcsin\frac{3}{5}$$

je rovností dvou úhlů ze třetího kvadrantu, neboť $0 < \arcsin\frac{3}{5} < \frac{\pi}{3}$. Zmenšeme je oba o hodnotu π a pak porovnejme hodnoty jejich sinů:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{3}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) + \cos\frac{\pi}{6}\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10}.$$

Tím je rovnost obou množin řešení ověřena. ■

Vraťme se k obecnému výkladu o metodách řešení goniometrických rovnic. Žádný další jejich typ už obecně zapisovat nebudeme. Místo toho poznamenáme, že mnohé goniometrické rovnice řešíme tak, že využíváme *algebraické a goniometrické úpravy*, abychom je převedli na *součinový tvar*

$$F_1(x)\cdot F_2(x)\cdot\ldots\cdot F_n(x) = 0,$$

kde každý činitel je tvaru $F_i(x) = f_i(a_i x + b_i) - c_i$, v němž f_i značí některou goniometrickou funkci a koeficienty a_i, b_i, c_i jsou daná reálná čísla (často je $c_i = 0$).[10] Protože součin několika činitelů je roven nule, právě když je aspoň jeden činitel nulový, všechna řešení rovnice $F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \ldots \cdot F_n(x) = 0$ dostaneme, když vyřešíme každou z jednotlivých základních rovnic

$$F_i(x) = f_i(a_i x + b_i) - c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

a množiny jejich řešení nakonec *sjednotíme.*[11] Tato závěrečná fáze je tedy rutinní záležitost, rozhodujícím krokem celého průběhu řešení je dovést výchozí goniometrickou rovnici vhodnými úpravami do součinového tvaru, o kterém jsme právě pojednali.

■ **Příklad 4.4.4.** Každou z jednotlivých rovnic

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad 3\sin\left(x + \frac{2\pi}{7}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{8\pi}{7}\right), \\ &\text{b)} \quad \sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0, \\ &\text{c)} \quad \cos x \cdot \cos 2x = \cos 4x \cdot \cos 5x \end{aligned}$$

převeďte na součinový tvar.
Řešení: a)

$$\begin{gathered} y = \frac{x}{2} + \frac{8\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad x = 2y - \frac{16\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{2\pi}{7} = 2y - 2\pi, \\ 3\sin(2y - 2\pi) = 2\sin y \quad \Leftrightarrow \quad 3\sin 2y = 2\sin y, \\ 0 = 3\sin 2y - 2\sin y = 3 \cdot 2\sin y\cos y - 2\sin y = 6\sin y\left(\cos y - \frac{1}{3}\right), \\ \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{8\pi}{7}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{8\pi}{7}\right) - \frac{1}{3}\right] = 0. \end{gathered}$$

b)

$$\begin{aligned} \underline{\sin x} + \sin 3x + \underline{\sin 5x} &= 0 && \text{(součet sinů převedeme na součin)}, \\ 2\sin\frac{5x + x}{2}\cos\frac{5x - x}{2} + \sin 3x &= 0, \\ 2\,\underline{\sin 3x}\cos 2x + \underline{\sin 3x} &= 0 && \text{(vytkneme společný činitel)}, \\ \sin 3x \cdot (2\cos 2x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \cos 2x &= \cos 4x \cdot \cos 5x && \text{(součiny kosinů převedeme na součty)}, \\ \frac{\cos 3x + \cos x}{2} &= \frac{1}{2}(\cos 9x + \cos x), \\ 0 &= \cos 9x - \cos 3x && \text{(rozdíl kosinů převedeme na součin)}, \\ 0 &= -2\sin 6x \cdot \sin 3x. \end{aligned}$$

■

[10] V součinovém tvaru tedy např. není rovnice $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{3}$ (na pravé straně není nula), kterou ovšem vyřešíme převodem na základní rovnici $\sin 2x = \frac{2}{3}$.

[11] Tyto množiny často nejsou disjunktní. Abychom jejich sjednocení zapsali „bez opakování“, vypíšeme nejprve a porovnáme všechna řešení na některém intervalu délky rovné společné periodě obou stran původní rovnice.

Náš přehled metod řešení goniometrických rovnic završíme poznámkou, že u některých rovnic lze výhodně využít poznatku o ohraničeném oboru hodnot $\langle -1, 1\rangle$ funkcí sinus a kosinus. Tak například rovnice

$$\sin P + \cos Q + 2 = 0, \qquad \sin R \cdot \cos S = -1 \qquad \text{a} \qquad 3\sin T - 4 = \cos^3 U$$

(tvar výrazů P, Q, R, S, T, U není důležitý) mohou být splněny jedině tak, že platí

$$\sin P = \cos Q = -1, \qquad \{\sin R, \cos S\} = \{-1, 1\} \qquad \text{a} \qquad \sin T = 1 \wedge \cos U = -1.$$

Pro libovolná čísla $s, c \in \langle -1, 1\rangle$ totiž platí

$$s + c + 2 \geq 0, \qquad s \cdot c \geq -1 \qquad \text{a} \qquad 3s - 4 \leq -1 \leq c^3,$$

přitom rovnosti nastanou jen ve výše uvedených případech. ■

V kratší druhé části této podkapitoly pojednáme stručně o řešení goniometrických nerovnic. Setkáváme se s nimi například při stanovování definičních oborů složených funkcí. Tak funkce zadané předpisy

$$y_1 = \log(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x), \qquad y_2 = \sqrt{\sin x + \cos x}$$

mají definiční obory tvořené všemi řešeními nerovnic

$$\operatorname{tg} x < \sqrt{3}, \qquad \text{resp.} \qquad \sin x + \cos x \geq 0.$$

První z nich patří mezi *základní goniometrické nerovnice*, které jsou obecně tvarů

$$f(x) \leq c,\ f(x) < c,\ f(x) \geq c,\ f(x) > c,$$

kde f je jedna z goniometrických funkcí $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{cotg}$ a c je dané reálné číslo. Jejich řešení má úzkou souvislost s příslušnou goniometrickou rovnicí $f(x) = c$. Je-li tato rovnice řešitelná, jsou její jednotlivá řešení krajními body intervalů, ze kterých je složen obor pravdivosti původní nerovnice.[12] O které intervaly se konkrétně jedná, můžeme zjistit z grafu goniometrické funkce f nebo z její určenosti goniometrickou ručičkou na jednotkové kružnici. Obě metody nyní stručně okomentujeme.

- *Řešení goniometrických nerovnic na grafech*
  Touto metodou můžeme řešit nejen základní goniometrické nerovnice (viz např. obr. 4.18), ale i nerovnice typu[13]

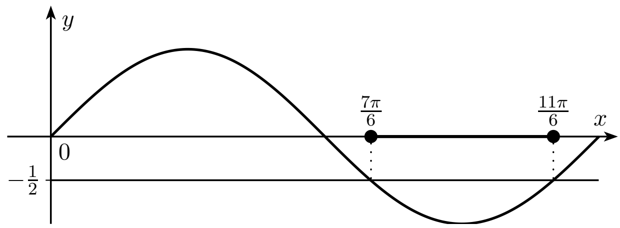
  $$f(ax + b) \leq c \qquad \text{a} \qquad f(ax + b) \leq g(cx + d),$$

  kde f a g jsou (ne nutně různé) goniometrické funkce (viz např. obr. 4.19). Obecně lze konstatovat, že řešení nerovnice $F(x) \leq G(x)$ je výhodné „odečítat“ graficky, kdykoliv máme grafy funkcí F a G k dispozici.

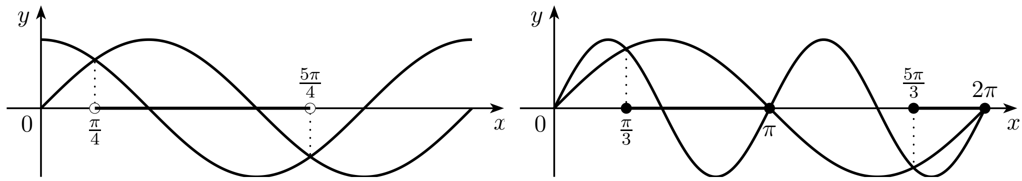
- *Řešení goniometrických nerovnic na jednotkové kružnici*
  V rovině s kartézskou soustavou souřadnic Ocs (doplněnou případně o osy t a ct pro funkce

[12] Není-li příslušná rovnice řešitelná, je situace jednodušší: nerovnice $\sin x \geq 2$ nemá řešení, nerovnice $\cos x > -2$ má za řešení každé $x \in \mathbb{R}$.

[13] Pro stručnost budeme od tohoto místa zapisovat *typy* nerovností jen se znakem $\leq$, i když na jeho místě může být i kterýkoliv ze znaků $\geq, <$ nebo $>$.



Obrázek 4.18: Nerovnice $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ v oboru $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$



(a) (b)

Obrázek 4.19: Nerovnice $\sin > \cos x$ a $\sin 2x \leq \sin x$ v oboru $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

tangens a kotangens) můžeme řešit základní goniometrické nerovnice způsobem, který objasníme podle obr. 4.20 na příkladech $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ a $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{2}$. V prvním z nich hledáme ty body na jednotkové kružnici k, které leží ve vyznačené polorovině p o rovnici $s \leq -\frac{1}{2}$. Výslednou množinou je znázorněný oblouk, jehož krajní body odpovídají dvěma vyznačeným úhlům x_1, x_2 – řešením příslušné rovnice $\sin x = -\frac{1}{2}$. Ta jsou pak krajními body uzavřeného intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, jenž je hledaným oborem pravdivosti zadané nerovnice v oboru $\langle 0, 2\pi)$.
U druhého příkladu, nerovnice $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{2}$, hledáme ty body na jednotkové kružnici k, jejichž (prodloužená) spojnice[14] s počátkem O protne tangentovou osu t v bodě vyznačené polopřímky $t \geq -\frac{1}{2}$. Výsledná množina je tvořena dvojicí oblouků, takže množina řešení zadané nerovnice v oboru $\langle 0, 2\pi \rangle$ je sjednocením příslušných intervalů $\langle 0, \frac{\pi}{2})$, $\langle x_1, \frac{3\pi}{2})$ a $\langle x_2, 2\pi \rangle$, kde $x_2 = x_1 + \pi$ – v souladu s tím, že funkce tangens má periodu π.

■ **Příklad 4.4.5.** Řešte goniometrickou nerovnici $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) \geq \frac{1}{2}$.
Řešení: Zavedeme substituci $y = 2x + \frac{\pi}{3}$ a vyřešíme příslušnou goniometrickou rovnici:

$$\sin y = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad y_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ y_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Z grafu nebo z jednotkové kružnice nerovnici vyřešíme a vrátíme se zpátky k neznámé x:

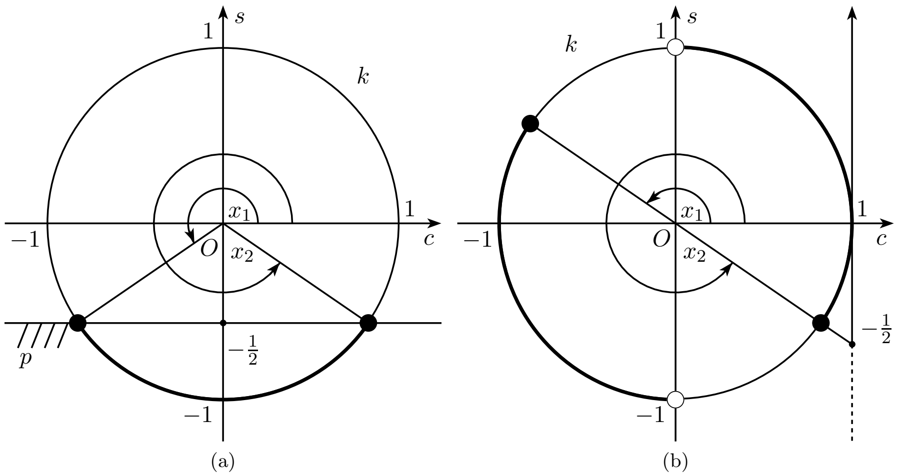
$$\sin y \geq \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq y \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\text{Odpověď: } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle.$$

■

[14] Připomínáme, že při odečtu hodnot $\operatorname{tg} x$ na ose t je nutné (v 2. a 4. kvadrantu) goniometrickou ručičku OA prodloužit nikoliv za bod A, ale za bod O.



Obrázek 4.20: Nerovnice $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ a $\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{2}$ v oboru $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Věnujme se nyní souhrnně početním metodám řešení složitějších goniometrických nerovnic. Vše-obecně lze konstatovat, že pro ně můžeme využít stejné postupy jako pro příslušné goniometrické rovnice, které jsme podrobně popsali dříve. Tak pro jednotlivé typy goniometrických nerovnic

$$F(\sin x, \cos 2x) \leq 0, \qquad F(\cos x, \cos 2x) \leq 0, \qquad F(\sin x \pm \cos x, \sin 2x) \leq 0$$

zavádíme po řadě substituce $y = \sin x, y = \cos x, y = \sin x \pm \cos x$, podobně jako pro obecnou nerovnici $F(\sin x, \cos x) \leq 0$ můžeme uvažovat o univerzální substituci $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Každou takovou substitucí $y = f(x)$ přecházíme k algebraické nerovnici $P(y) \leq 0$, jejíž množina řešení je – obecně vzato – sjednocením několika omezených či neomezených intervalů. Pro každý z nich pak uskutečníme návrat od nové neznámé $y = f(x)$ k původní neznámé x. Je-li např. $\langle c, d \rangle$ jeden takový interval, zmíněný návrat spočívá v řešení *soustavy* goniometrických nerovnic $c \leq f(x) \leq d$. K řešení soustav přecházíme i v případech, kdy se nám výchozí goniometrickou nerovnici podaří upravit na součinový tvar $F_1(x) \cdot F_2(x) \leq 0$; výsledný obor pravdivosti je sjednocením množin řešení dvou soustav

$$F_1(x) \leq 0 \wedge F_2(x) \geq 0 \qquad \text{a} \qquad F_1(x) \geq 0 \wedge F_2(x) \leq 0,$$

neboť o znaménku hodnoty součinu rozhodují znaménka činitelů. (Podobné soustavy bychom mohli vypsat i pro nerovnice v součinovém tvaru složeném z více činitelů.)

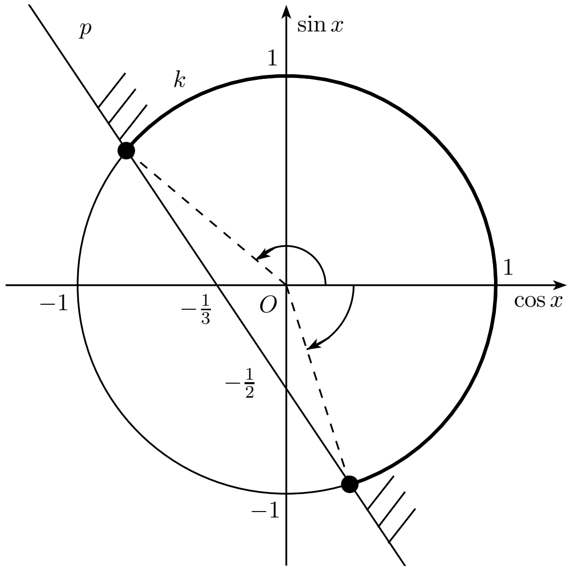
Poslední poznámku věnujme lineárním nerovnicím typu

$$a \cos x + b \sin x \leq c.$$

Při jejich řešení algebraickou metodou dostáváme pro jednu neznámou $c = \cos x$ nebo $s = \sin x$ kvadratickou nerovnici, kterou pak řešíme v oboru $\langle -1, 1 \rangle$. Tento postup (stejně jako u rovnic) můžeme interpretovat (a zároveň i kontrolovat) graficky způsobem z obr. 4.21, kdy hledáme průnik jednotkové kružnice k s polorovinou p, která odpovídá příslušné lineární nerovnici. Druhá goniometrická metoda řešení lineární nerovnice mezi sinem a kosinem spočívá ve dříve popsané úpravě

$$a \cos x + b \sin x \leq c \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x + \varphi) \leq \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

s vhodnou hodnotou φ.



Obrázek 4.21: Řešení nerovnice $3\cos x + 2\sin x \geq -1$

■ **Příklad 4.4.6.** V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte nerovnice

$$a)\quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) < \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$b)\quad 1 + (1+\cos x)\cos 2x < \cos 3x + 2\cos^3 x.$$

Řešení: a)

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) < \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) < 0,$$

$$2\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1)\ \cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0 \wedge \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right) < 0,$$

$$2)\ \cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) < 0 \wedge \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right) > 0.$$

1)

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \wedge \quad \pi + 2l\pi < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} < 2\pi + 2l\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{4k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3} \quad \wedge \quad \frac{13\pi}{6} + 4l\pi < x < \frac{25\pi}{6} + 4l\pi,\ \text{kde } k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$x \in \langle 0, 2\pi\rangle \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 0, \tfrac{\pi}{6}) \cup \left(\tfrac{5\pi}{6}, \tfrac{3\pi}{2}\right) \ \wedge\ x \in \langle 0, \tfrac{\pi}{6}) \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 0, \tfrac{\pi}{6}).$$

2)

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \wedge \quad 0 + 2l\pi < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} < \pi + 2l\pi,$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{6} + 4l\pi < x < \frac{13\pi}{6} + 4l\pi,\ \text{kde } k, l \in \mathbb{Z}.$$

$x \in \langle 0, 2\pi\rangle \quad \Rightarrow \quad x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle \ \wedge \ x \in (\frac{\pi}{6}, 2\pi\rangle \quad \Rightarrow \quad x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle.$

Odpověď: $x \in \langle 0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle$.

b)

$$\begin{aligned}
1 + (1 + \cos x)\cos 2x &< \cos 3x + 2\cos^3 x,\\
1 + (1 + \cos x)\cos 2x &< \cos(2x + x) + 2\cos^3 x,\\
1 + \cos 2x + \cos x \cos 2x &< \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x + 2\cos^3 x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 + \cos 2x + \sin 2x \sin x - 2\cos^3 x &< 0,\\
2\cos^2 x + 2\sin^2 x \cos x - 2\cos^3 x &< 0,\\
2\cos x(\cos x + \sin^2 x - \cos^2 x) &< 0,\\
2\cos x(\cos x + (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x) &< 0,\\
2\cos x(\cos x + 1 - 2\cos^2 x) &< 0.
\end{aligned}$$

Pro $y = \cos x$ tak máme nerovnici

$$y(1 + y - 2y^2) < 0 \quad \text{neboli} \quad y(1 - y)(1 + 2y) < 0$$

s nulovými body $y = 0, y = 1, y = -\frac{1}{2}$, která má v oboru $\mathbb{R}$ řešení $y \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (1, \infty)$. S ohledem na substituci $y = \cos x$ druhý interval vyloučíme a dostáváme $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$. Řešením původní nerovnice v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ je proto $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$.

4.5 Goniometrické soustavy rovnic

V předchozí podkapitole jsme se seznámili s rozličnými metodami řešení goniometrických rovnic. Každá z nich byla úlohou na nalezení všech vyhovujících hodnot *jedné neznámé* $x \in \mathbb{R}$. Neřešili jsme většinou jednotlivé rovnice, nýbrž jsme popisovali metody řešení celých skupin typově blízkých rovnic.

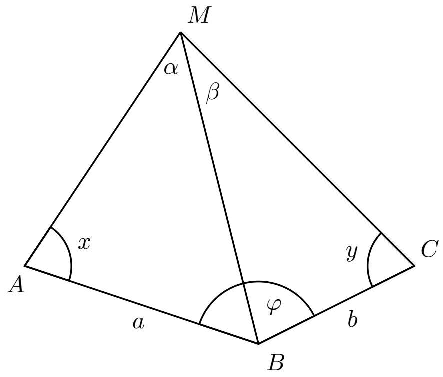
Řešení geometrických úloh nás však často staví do situace, kdy hledáme více neznámých úhlů svázaných různými podmínkami, které dokážeme vyjádřit určitou soustavou rovnic. Je-li mezi nimi aspoň jedna goniometrická rovnice (tedy rovnice s neznámými v argumentu goniometrických funkcí), mluvíme o *goniometrické soustavě rovnic*. Vytvořit metodiku řešení nějakých širších skupin takových soustav je prakticky nemožné, proto se při našemu výkladu budeme zabývat poměrně konkrétními soustavami, které přesto jistý rys obecnosti postrádat nebudou. Půjde totiž vesměs o příklady soustav popisujících konkrétní geometrické situace s jedním nebo více vstupními údaji, které se pak stávají *parametry* dotyčných rovnic v obvyklém významu tohoto termínu školské matematiky. Řešení takových soustav pak samozřejmě vyžadují diskusi o existenci, tvaru a počtu řešení.

Goniometrické soustavy rovnic, které budeme formou příkladů řešit, jsme většinou převzali z knihy [26].[15] Z rozsahových důvodů nebudeme prokazovat, že tyto soustavy skutečně mají svůj „geometrický původ“. První z výjimek učiníme v případě Snellovy soustavy z úvodního příkladu 4.5.1. Popíšeme již nyní důležitou úlohu z matematické geodézie, která nás přivede právě ke Snellově soustavě.

Na mapě, na které už jsou zakresleny známé geodetické body A, B a C, máme vyznačit nový geodetický bod M, z něhož jsou úsečky AB a BC vidět pod úhly α, resp. β, jež byly prakticky změřeny.

V daném trojúhelníku ABC označíme $a = |AB|, b = |BC|$ a $\varphi = |\measuredangle ABC|$. Polohu bodu M

[15] Na odlišný původ příkladů upozorníme poznámkami pod čarou.



Obrázek 4.22

určíme výpočtem dvojice úhlů $x = |\measuredangle BAM|, y = |\measuredangle BCM|$ výpočtem z naměřených úhlů $\alpha = |\measuredangle AMB|$ a $\beta = |BMC|$. K tomu sestavíme soustavu dvou rovnic s neznámými x a y. První z nich

$$x + y = 2\pi - (\alpha + \beta + \varphi)$$

okamžitě plyne ze součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku $ABCM$. Druhou goniometrickou rovnici odvodíme ze sinové věty zapsané pro trojúhelníky ABM a BCM:

$$\frac{\sin x}{\sin\alpha} = \frac{|BM|}{a} \quad \wedge \quad \frac{\sin y}{\sin\beta} = \frac{|BM|}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}.$$

Tak jsme zadanou geodetickou úlohu převedli na řešení soustavy rovnic s neznámými x, y, která je tvaru

$$\boxed{\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}, \quad x + y = 2\pi - (\alpha + \beta + \varphi).}$$

Bude to první ze skupiny prakticky významných goniometrických soustav, které budeme řešit a které jsou všechny typu

$$\boxed{f(x) * f(y) = a, \quad x \pm y = b}$$

s neznámými $x, y \in \mathbb{R}$, danou goniometrickou funkcí f, danou aritmetickou operací $*$ a parametry $a, b \in \mathbb{R}$. Z rozsahových důvodů nebudeme zapisovat řešení těchto i dalších soustav až do konce, nýbrž se spokojíme zpravidla s odvozením některé základní goniometrické rovnice o jedné neznámé, se kterou už je dokončení celého řešení rutinní záležitostí.

■ **Příklad 4.5.1.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad x + y = b.}$$

Řešení: Vyjádření $x = b - y$ z druhé rovnice dosadíme do první rovnice, kterou pak upravíme pomocí součtového vzorce pro sinus:

$$a = \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin(b-y)}{\sin y} = \frac{\sin b\cos y - \cos b\sin y}{\sin y} = \sin b \cdot \operatorname{cotg} y - \cos b.$$

Dostáváme tak základní rovnici s neznámou y pro funkci kotangens

$$\sin b \cdot \operatorname{cotg} y = a + \cos b.$$

Diskuse o jejím řešení (podle toho, zda číslo $\sin b$ je rovno nule či nikoliv, a zda v případě $\sin b = 0$ je rovno nule i číslo $a + \cos b$) je snadná. Každému nalezenému řešení y pak odpovídá jediné $x = b - y$. Dodejme ještě, že podobným postupem lze řešit i soustavy

$$\boxed{\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\frac{\cos x}{\cos y} = a, \quad x \pm y = b.}$$

■ **Příklad 4.5.2.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\sin x + \sin y = a, \quad x + y = b.}$$

Řešení: Do první rovnice upravené podle vzorce pro součet sinů dosadíme za součet $x + y$ hodnotu b z druhé rovnice:

$$a = \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

To je základní rovnice s neznámou $u = \frac{x-y}{2}$ pro funkci kosinus. Existence jejích řešení zřejmým způsobem závisí na hodnotách $a, \sin \frac{b}{2}$. Ke každé vyhovující hodnotě u pak určíme příslušná x, y ze soustavy lineárních rovnic

$$x + y = b, \quad \frac{x-y}{2} = u.$$

Dodejme, že stejným postupem lze řešit i soustavy

$$\boxed{\sin x \pm \sin y = a, \quad x \pm y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\cos x \pm \cos y = a, \quad x \pm y = b.}$$

■ **Příklad 4.5.3.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\sin x \cdot \sin y = a, \quad x + y = b.}$$

Řešení: Dvojnásobek levé strany první rovnice vyjádříme jako rozdíl kosinů a za součet $x + y$ dosadíme hodnotu b z druhé rovnice:

$$2a = 2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y) = \cos(x - y) - \cos b.$$

To je základní rovnice s neznámou $u = x - y$ pro funkci kosinus (která má řešení, právě když $|2a + \cos b| \leq 1$). Ke každé vyhovující hodnotě u pak určíme příslušná x, y ze soustavy lineárních rovnic

$$x + y = b, \quad x - y = u.$$

Podobným postupem lze řešit i soustavy

$$\boxed{\sin x \sin y = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\cos x \cos y = a, \quad x \pm y = b.}$$

■

Dříve než přejdeme k soustavám daného typu pro funkce tangens a kotangens, poznamenejme, že postupy řešení prvních tří příkladů lze použít i pro obdobné soustavy, u nichž je parametru a roven jeden z výrazů

$$\sin x \pm \cos y, \quad \sin x \cos y, \quad \frac{\sin x}{\cos y},$$

neboť stačí využít převodní vzorec $\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y$, přitom substituce $y' = \frac{\pi}{2} - y$ změní rovnici $x \pm y = b$ na rovnici téhož typu $x \mp y' = b \mp \frac{\pi}{2}$.

■ **Příklad 4.5.4.** Řešte soustavu rovnic[16]

$$\boxed{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.}$$

Řešení: Předpokládejme nejprve, že hodnota $\operatorname{tg} b$ existuje. Potom z daných rovnic odvodíme vztah

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{a}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

ze kterého (v případě, že $a \cdot \operatorname{tg} b \neq 0$) vyjádříme hodnotu $p = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ zlomkem

$$p = 1 - \frac{a}{\operatorname{tg} b}.$$

Známe tedy jak součet, tak i součin hodnot $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{tg} y$, takže je můžeme určit jako kořeny $t_{1,2}$ kvadratické rovnice

$$t^2 - at + p = 0.$$

(Diskusi o existenci kořenů stejně jako rozbor případu $a \cdot \operatorname{tg} b = 0$ vynecháme.) Nakonec ve vyjádřeních

$$x = \operatorname{arctg} t_1 + k\pi, \quad y = \operatorname{arctg} t_2 + l\pi$$

(nezapomeňme, že kořeny t_1 a t_2 musíme dosadit v obou pořadích) určíme závislost parametrů $k, l \in \mathbb{Z}$ tak, aby byla splněna původní rovnice $x+y=b$ (a nikoliv jen její důsledek $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}(x+y)$, ze kterého náš postup vycházel).

V případě, kdy hodnota $\operatorname{tg} b$ neexistuje, vede rovnice $x + y = b$ k hodnotě $p = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$. Další postup s kvadratickou rovnicí je stejný jako v prvním případě.
Dodejme, že podobným postupem lze řešit i soustavy

$$\boxed{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = a, \quad x \pm y = b}$$

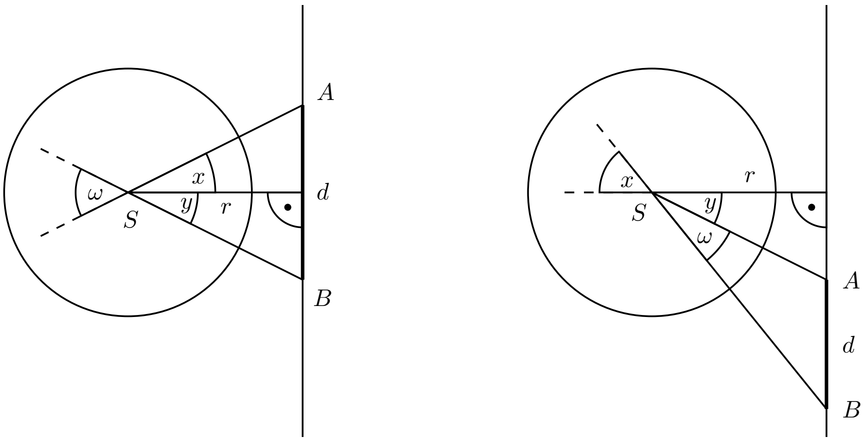
(v obou rovnicích druhé soustavy se berou stejná znaménka). ■

Výklad jednotlivých příkladů goniometrických soustav nyní oživíme ukázkou zajímavé konstrukční úlohy, jejíž řešení snadno převedeme na soustavy rovnic s funkcí tangens z předchozího příkladu 4.5.4.
Na dané tečně ke kružnici o středu S sestrojte úsečku dané délky d, jež je ze středu S vidět pod daným úhlem ω.
Označme r poloměr dané kružnice a x, y neznámé úhly, které podle obrázků obou možných situací určují polohy krajních bodů A, B hledané úsečky. Je patrné, že x, y splňují soustavu rovnic

$$\boxed{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{d}{r}, \quad x + y = \omega} \quad \text{resp.} \quad \boxed{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{d}{r}, \quad x - y = \omega.}$$

První soustava pro situaci z levého obrázku je přímo v zadání příkladu 4.5.4, druhá soustava odpovídající pravému obrázku je zmíněna v závěru jeho řešení.

[16] V knize [26] je tato soustava pouze okrajově zmíněna, aniž by byla uvedena související geometrická úloha, kterou popíšeme vzápětí poté, co soustavu vyřešíme.



Obrázek 4.23

■ **Příklad 4.5.5.** Řešte soustavu rovnic[17]

$$\boxed{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.}$$

Řešení: Předpokládejme nejprve, že hodnota $\operatorname{tg} b$ existuje, a zaveďme pomocné neznámé $p = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ a $s = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$. Z druhé rovnice soustavy plyne

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{s}{1-p}, \text{ odkud } s = (1-p)\operatorname{tg} b.$$

Ze soustavy lineárních rovnic

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = (1-p)\operatorname{tg} b, \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a$$

nacházíme

$$\operatorname{tg} x = \frac{(1-p)\operatorname{tg} b + a}{2}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{(1-p)\operatorname{tg} b - a}{2}.$$

Po dosazení do vztahu $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = p$ získáme kvadratickou rovnici

$$(1-p)^2 \operatorname{tg}^2 b - a^2 = 4p$$

k určení hodnoty p (v případě $\operatorname{tg} b = 0$ jde o rovnici lineární). Ke každé vyhovující hodnotě p vypočteme podle uvedených vzorců hodnoty $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{tg} y$. Zbytek řešení je stejný jako u první části řešení příkladu 4.5.4 – musíme zajistit, aby byla splněna nejen rovnice $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg} b$, ale i původní rovnice $x + y = b$.

V případě, kdy hodnota $\operatorname{tg} b$ neexistuje, vede rovnice $x + y = b$ k hodnotě $p = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$, takže hodnoty $u = \operatorname{tg} x, v = \operatorname{tg} y$ lze v tomto případě určit z jednoduché soustavy rovnic

$$u - v = a, \quad u \cdot v = 1.$$

Zbytek (řešení základních rovnic $\operatorname{tg} x = u, \operatorname{tg} y = v$ a zajištění podmínky $x + y = b$) je nasnadě. Dodejme, že popsaným postupem lze řešit i soustavy rovnic

$$\boxed{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = a, \quad x \mp y = b.}$$

[17] Uvedeme vlastní (odlišný od knihy [26]) postup řešení.

■ **Příklad 4.5.6.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = a, \quad x + y = b.}$$

Řešení: V případě, kdy hodnota $\operatorname{tg} b$ existuje, z druhé rovnice soustavy plyne

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1-a},$$

takže musí být $a \neq 1$, jinak soustava nemá řešení. Ze vztahů

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = (1-a)\operatorname{tg} b \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = a$$

vidíme, že čísla $t_1 = \operatorname{tg} x$ a $t_2 = \operatorname{tg} y$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$t^2 - (1-a)\operatorname{tg} b + a = 0.$$

Po jejich určení zbývá vyřešit dvě základní rovnice $\operatorname{tg} x = t_1$ a $\operatorname{tg} y = t_2$ a zajistit splnění rovnice $x + y = b$, když zaručeně platí $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg} b$.

V případě, kdy hodnota $\operatorname{tg} b$ neexistuje, z rovnice $x + y = b$ plyne $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$, takže daná soustava má řešení, jen když $a = 1$, a jsou to všechny dvojice (x, y) určené rovnicí $x + y = b$. Podobný postup lze uplatnit i k řešení soustav

$$\boxed{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a, \quad x - y = b} \quad \text{a} \quad \boxed{\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} y = a, \quad x \pm y = b,}$$

přitom od součinu $\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} y$ lze pomocí substituce $y' = \frac{\pi}{2} - y$ přejít k součinu $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y'$. (Soustavu rovnic se zadaným součinem $\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y$ jsme ani nezapsali, neboť tento součin je převrácenou hodnotou součinu $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.) ■

Ve všech předchozích příkladech jsme řešili soustavy dvou rovnic, z nichž jedna byla *goniometrická* a druhá *lineární*. Nyní přejdeme k soustavám, v nichž obě rovnice budou *goniometrické*. I jejich výběr je dán praktickým významem při řešení geometrických úloh (které však uvádět nebudeme).

■ **Příklad 4.5.7.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\sin x \sin y = a, \quad \cos x \cos y = b.}$$

Řešení: Ze součtového vzorce pro funkci kosinus vyplývá, že zadaná soustava je ekvivalentní se soustavou základních goniometrických rovnic

$$\cos(x+y) = b - a, \quad \cos(x-y) = b + a.$$

Takové rovnice jsou řešitelné, právě když platí $|b - a| \leq 1$ a zároveň $|b + a| \leq 1$. Po určení hodnot $u = x + y, v = x - y$ (nezapomeňme na dva nezávislé celočíselné násobky periody 2π) se vrátíme k původním neznámým

$$x = \frac{1}{2}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v).$$

Podobným postupem založeným na součtovém vzorci pro funkci sinus lze řešit soustavu

$$\boxed{\sin x \cos y = a, \quad \cos x \sin y = b.}$$

■ **Příklad 4.5.8.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\sin x \cos y = a, \quad \cos x \cos y = b.}$$

Řešení: Předpokládejme nejprve, že $b \neq 0$. Pak nutně platí i $\cos x \neq 0$ a $\cos y \neq 0$, takže po vydělení první rovnice soustavy její druhou rovnicí dostaneme základní goniometrickou rovnici

$$\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}.$$

Po určení vyhovujících čísel x a dosazení příslušných hodnot $\cos x$, které jsou zřejmě tvaru

$$\cos x = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \neq 0,$$

do druhé rovnice původní soustavy dostaneme základní rovnici

$$\cos y = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

k určení druhé neznámé y. Zároveň vidíme, že v případě $b \neq 0$ má zadaná soustava řešení, právě když $a^2 + b^2 \leq 1$.
V případě $b = 0$ je druhá rovnice soustavy splněna, právě když $\cos x = 0$ nebo $\cos y = 0$. Je-li $\cos x = 0$, určíme odtud neznámou x a po dosazení hodnoty $\sin x = \pm 1$ do první rovnice dostaneme rovnici $\cos y = \pm a$ k určení hodnoty y. Je-li naopak $\cos y = 0$, musí být $a = 0$, jinak první rovnici soustavy nelze splnit, v kladném případě ($a = 0$) je pak hodnota x libovolná.
Podobným způsobem můžeme řešit i soustavu rovnic

$$\boxed{\sin x \cos y = a, \quad \sin x \sin y = b.}$$

■ **Příklad 4.5.9.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\sin x + \sin y = a, \quad \cos x + \cos y = b.}$$

Řešení: Po známém převodu součtů na součiny dostaneme soustavu rovnic

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2}, \quad \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{b}{2},$$

která po substituci $u = \frac{1}{2}(x+y), v = \frac{1}{2}(x-y)$ přejde v soustavu řešenou v příkladě 4.5.8.
Uvedený postup lze využít i pro řešení soustav

$$\boxed{\sin x \pm \sin y = a, \quad \cos x \pm \cos y = b}$$

s ostatními třemi variantami znamének v obou rovnicích.

■ **Příklad 4.5.10.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \quad \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = b.}$$

Řešení: Substitucí $u = \operatorname{tg} x, v = \operatorname{tg} y$ dostaneme algebraickou soustavu rovnic

$$u + v = a, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = b,$$

kterou v případě $b \neq 0$ snadno vyřešíme na základě implikace

$$b = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = \frac{a}{uv} \quad \Rightarrow \quad uv = \frac{a}{b}$$

(je-li $b = 0$, musí být i $a = 0$, jinak soustava nemá řešení). Odtud totiž plyne, že neznámé u, v tvoří dvojici kořenů $t_{1,2}$ kvadratické rovnice

$$t^2 - at + \frac{a}{b} = 0.$$

Po jejich výpočtu (podmínku existence vypisovat nebudeme) pak zbývá vyřešit dvojici základních rovnic $\operatorname{tg} x = t_1, \operatorname{tg} y = t_2$ (s ohledem na symetrii jsme zapsali pouze jednu z obou soustav). ■

Závěrečnou trojici příkladů budou tvořit soustavy se společnou geometrickou motivací, kterou je úloha určit vnitřní úhly α, β, γ všech těch trojúhelníků, pro něž jsou hodnoty $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ s danou goniometrickou funkcí f v daném postupném poměru $p : q : r$. Tato podmínka

$$f(\alpha) : f(\beta) : f(\gamma) = p : q : r$$

s danými parametry $p, q, r \in \mathbb{R}$ vlastně představuje dvojici rovnic pro tři neznámé α, β, γ; potřebnou třetí rovnicí je základní vztah $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. V zadání příkladů nebudeme uvádět podmínku, že parametry p, q, r jsou různé od nuly. Je-li totiž například $p = 0$, vede základní rovnice $f(\alpha) = 0$ přímo k určení hodnoty α; pro zbylé neznámé β, γ pak dostáváme soustavu, kterou jsme se už zabývali dříve.

Pro funkci $f(x) = \sin x$ má popsaná úloha zřejmou souvislost se sinovou větou pro obecný trojúhelník. Uvedeme ji jako první v pořadí, závěr řešení nás díky zmíněné souvislosti patrně nepřekvapí.

■ **Příklad 4.5.11.** Řešte soustavu rovnic[18]

$$\boxed{\sin x : \sin y : \sin z = p : q : r, \quad x + y + z = \pi.}$$

Řešení: První rovnice soustavy bude splněna, právě když pro vhodné reálné číslo $t \neq 0$ bude platit

$$\sin x = pt, \quad \sin y = qt, \quad \sin z = rt. \tag{4.24}$$

Z druhé rovnice soustavy odvodíme tři analogické důsledky, první z nich takto:

$$\sin x = \sin(\pi - y - z) = \sin(y + z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z = rt \cos y + qt \cos z.$$

Po dosazení do rovnosti $\sin x = pt$ a zkrácení číslem t dostaneme první ze tří rovností

$$p = r \cos y + q \cos z, \quad q = r \cos x + p \cos z, \quad r = q \cos x + p \cos y, \tag{4.25}$$

zbylé dvě rovnosti se odvodí analogicky. Získali jsme soustavu tří lineárních rovnic pro neznámé $\cos x, \cos y, \cos z$, která má, jak se snadno ověří, jediné řešení

$$\cos x = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr}, \quad \cos y = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2pr}, \quad \cos z = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq}. \tag{4.26}$$

[18] [34], úloha 63, str. 44. V řešení na str. 202-203 jsou pouze odvozeny základní rovnice pro $\cos x, \cos y, \cos z$. Náš výklad doplníme o další úvahy, neboť uvedený postup řešení je založen na důsledkových úpravách takového druhu, že je principiálně nelze „obrátit".

To jsou základní goniometrické rovnice k určení neznámých x, y, z (které ne náhodou připomínají rovnosti z kosinové věty). Splňují všechny trojice x, y, z vyhovující těmto třem základním rovnicím zadanou podmínku pro poměr $\sin x : \sin y : \sin z$? Všimněme si, že z rovnice pro $\cos x$ plyne

$$|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right)^2} = \frac{\sqrt{c}}{2|qr|},$$

kde $c = \sqrt{2(pq+pr+qr)-(p^2+q^2+r^2)}$, podobně se stejnou konstantou c platí

$$|\sin y| = \frac{\sqrt{c}}{2|pr|} \quad \text{a} \quad |\sin z| = \frac{\sqrt{c}}{2|pq|}.$$

Musí tedy být $c > 0$, tehdy z odvozených vyjádření dostáváme

$$|\sin x| : |\sin y| : |\sin z| = \frac{\sqrt{c}}{2|qr|} : \frac{\sqrt{c}}{2|pr|} : \frac{\sqrt{c}}{2|pq|} = |p| : |q| : |r|.$$

Odtud určíme pro hodnoty $\sin x, \sin y, \sin z$, jejichž absolutní hodnoty již známe, správné kombinace znamének, aby byla splněna první rovnice ze zadání příkladu. Pak podle dvojic hodnot kosinu a sinu neznámých x, y, z najdeme číslo $x_0, y_0, z_0 \in \langle 0, 2\pi)$ tak, že bude platit

$$x = x_0 + 2k\pi, \quad y = y_0 + 2l\pi, \quad z = z_0 + 2m\pi \tag{4.27}$$

pro vhodná $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Je však vždy možné zajistit vhodnou vazbou mezi čísly k, l a m, aby byla splněna i druhá zadaná rovnice $x + y + z = \pi$? Ani tato otázka ještě není triviální, a proto kladnou odpověď na ni zdůvodníme. Víme, že hodnoty x, y, z tvaru (4.27) s parametry $k = l = m = 0$ splňují soustavu rovnic (4.25) a že pro ně platí i rovnosti (4.24) s vhodným $t \neq 0$. Odtud dostáváme

$$\sin x = pt = (r\cos y + q\cos z)t = rt\cos y + qt\cos z = \sin z\cos y + \sin y\cos z = \sin(y+z).$$

Analogicky se odvodí i další dvě z rovností

$$\sin x = \sin(y+z), \quad \sin y = \sin(x+z), \quad \sin z = \sin(x+y).$$

Podle známého průběhu funkce sinus to už znamená, že součet $x + y + z$ je pro vhodné $n \in \mathbb{N}$ tvaru (využijme toho, že $k = l = m = 0$)

$$x_0 + y_0 + z_0 = \pi + 2n\pi, \tag{4.28}$$

neboť v opačném případě by musela být celá všechna tři čísla

$$\frac{x_0 - y_0 - z_0}{2\pi}, \quad \frac{y_0 - x_0 - z_0}{2\pi}, \quad \frac{z_0 - x_0 - y_0}{2\pi},$$

takže by bylo celé i například číslo

$$\frac{x_0 - y_0 - z_0}{2\pi} - \frac{z_0 - x_0 - y_0}{2\pi} = \frac{x}{\pi},$$

což odporuje tomu, že $\sin x_0 \neq 0$. Proto je výběr trojic k, l, m v (4.27) vždy možný a je dán jediným omezením

$$k + l + m = -n,$$

kde n je celé číslo z (4.28), jehož existenci jsme právě zdůvodnili.
Dodejme na úplný závěr, že zadaná soustava rovnic má řešení pro právě ty trojice nenulových parametrů p, q a r, pro které jsou absolutní hodnoty všech tří zlomků v (4.26) menší než 1. Z našich následných úvah však plyne, že tuto poměrně málo přehlednou podmínku lze jednodušeji vyjádřit pomocí zavedené konstanty c ve tvaru $c > 0$ neboli

$$2(pq + pr + qr) > p^2 + q^2 + r^2.$$

V případě kladných čísel p, q, r jsme tak netradiční cestou odvodili známou podmínku ekvivalentní s trojúhelníkovými nerovnostmi[19]

$$|q - r| < p < q + r.$$

■ **Příklad 4.5.12.** Řešte soustavu rovnic

$$\boxed{\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = p : q : r, \quad x + y + z = \pi.}$$

Řešení: Označme t nenulový koeficient, při kterém má platit

$$\operatorname{tg} x = pt, \quad \operatorname{tg} y = qt, \quad \operatorname{tg} z = rt. \tag{4.29}$$

Z druhé rovnice soustavy plyne

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(\pi - x - y) = -\operatorname{tg}(x + y) = -\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

takže musí být $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq 1$ a po vynásobení krajních členů předchozího odvození a snadné úpravě dostaneme symetrický vztah[20]

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z. \tag{4.30}$$

Obráceným postupem z (4.30) dostaneme $\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}(x + y) = 0$, což znamená, že $x + y + z = n\pi$ pro vhodné $n \in \mathbb{Z}$. Proto místo původní soustavy můžeme řešit soustavu rovnic (4.29) a (4.30); poté pak bude možné přičíst k číslům x, y, z z vyhovujících trojic takové násobky periody π, aby byla splněna i původní rovnice $x + y + z = \pi$.
Dosazením z (4.29) do (4.30) dostaneme po vydělení číslem t rovnici

$$p + q + r = pqrt^2 \quad \text{neboli} \quad t^2 = \frac{p + q + r}{pqr}$$

(připomínáme obecný předpoklad $pqr \neq 0$). Vyhovující $t \neq 0$ proto existuje, právě když je $p + q + r$ nenulové číslo téhož znaménka jako pqr. Po dosazení každého z obou kořenů

$$t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{p + q + r}{pqr}}$$

do (4.29) dostaneme vždy trojici základních rovnic s funkcí tangens k určení hodnot x, y, z. Protože obor hodnot $\operatorname{tg} x$ je celé $\mathbb{R}$, žádné další podmínky existence řešení kromě

$$pqr \cdot (p + q + r) > 0$$

zadaná soustava rovnic nemá.

[19] [12], str. 111.
[20] O jeho zobecnění pojednáme v příkladu 4.6.4.

■ **Příklad 4.5.13.** Řešte soustavu rovnic[21]

$$\boxed{\cos x : \cos y : \cos z = p : q : r, \quad x + y + z = \pi.}$$

Řešení: První rovnice soustavy bude splněna, právě když pro vhodné $t \neq 0$ bude platit

$$\cos x = pt, \quad \cos y = qt, \quad \cos z = rt. \tag{4.31}$$

K určení neznámé hodnoty t budeme muset nahradit druhou rovnici soustavy rovnicí pro hodnoty $\cos x, \cos y, \cos z$, podobně jako jsme v řešení předchozího příkladu nahradili stejnou rovnici $x + y + z = \pi$ rovnicí pro hodnoty $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y, \operatorname{tg} z$. Tentokrát bude takovou náhradnicí poněkud složitější rovnice

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z = 1, \tag{4.32}$$

která je (jak víme z podkapitoly 3.4) zaručeně splněna v případě, kdy x, y, z jsou vnitřní úhly libovolného trojúhelníku. V úvodní části podkapitoly 5.1 ukážeme, že rovnost (4.32) platí i v obecnější situaci, kdy je splněna podmínka $\cos z = -\cos(x + y)$. Příslušné odvození však není možné přímo obrátit, a tak není jasné, zda je podmínka $\cos z = -\cos(x + y)$ ke splnění (4.32) nejen postačující, nýbrž i nutná. Rozhodneme o tom tak, že položíme $c = \cos z$ a přepíšeme rovnost (4.32) jako kvadratickou rovnici

$$c^2 + 2\cos x \cos y \cdot c + \cos^2 x + \cos^2 y - 1 = 0,$$

jejíž jeden kořen je, jak víme, $c_1 = -\cos(x + y)$. Druhý kořen c_2 proto snadno určíme z Vietova vzorce pro součet kořenů

$$c_1 + c_2 = -2\cos x \cos y.$$

Po dosazení c_1 a snadné úpravě dostaneme

$$c_2 = -2\cos x \cos y - c_1 = -2\cos x \cos y + \cos(x + y) = -\cos(x - y).$$

Vidíme tedy, že rovnice (4.32) je splněna v právě dvou případech

$$\cos z = -\cos(x + y), \quad \text{resp.} \quad \cos z = -\cos(x - y).$$

Podle známého průběhu funkce kosinus tyto dvě možnosti znamenají právě to, že existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ s vlastností, že při vhodném výběru znamének platí

$$\pm x \pm y \pm z = \pi + 2n\pi. \tag{4.33}$$

Našli jsme tak všechna řešení rovnice (4.32). Protože v ní vystupují pouze hodnoty funkce kosinus, která je sudá, může u vyhovujících čísel x, y, z změnit podle (4.33) znaménka a pak k nim přičíst vhodné násobky periody 2π tak, aby byla splněna rovnost $x + y + z = \pi$ požadovaná zadáním příkladu. Ukázali jsme, že takové trojice x, y, z tedy existují pro každou trojici kosinů splňujících rovnici (4.32). Proto se dále budeme zabývat již jen řešením soustavy rovnic (4.31) a (4.32) pro neznámé hodnoty $\cos x, \cos y, \cos z$, tedy pro neznámou t z jejich vyjádření (4.31).
Dosazením z (4.31) do (4.32) dostaneme kubickou rovnici

$$2pqrt^3 + (p^2 + q^2 + r^2)t^2 - 1 = 0.$$

[21] Náročnější postup řešení je pravděpodobnou příčinou toho, proč jsme tuto zajímavou soustavu v literatuře nenašli. Využijeme při něm i *komplexní čísla*, o kterých pojednáme v podkapitole 6.2.

S ohledem na obor hodnot $\langle -1, 1\rangle$ funkce kosinus nás budou po vyřešení získané rovnice zajímat právě ty její kořeny, které splňují podmínku

$$\max\{|pt|, |qt|, |rt|\} \leq 1. \tag{4.34}$$

Pro lepší přehlednost postupu řešení učiníme úmluvu, že zadaná nenulová čísla p, q, r z postupného poměru $p : q : r$ jsou „normována“ tak, že platí

$$pqr = 1. \tag{4.35}$$

Kromě toho zavedeme nový parametr s předpisem

$$s = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{3}, \tag{4.36}$$

abychom řešenou kubickou rovnici mohli přepsat do výhodného tvaru

$$t^3 + \frac{3s}{2}t^2 - \frac{1}{2} = 0. \tag{4.37}$$

Podle (4.35) a (4.36) splňuje parametr s díky nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice čísel p^2, q^2, r^2 odhad

$$s = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{3} \geq \sqrt[3]{p^2q^2r^2} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Rovnici (4.37) bude účelné vyřešit v případech $s = 1$, resp. $s > 1$ odděleně. V prvním z nich platí $|p| = |q| = |r| = 1$ a mnohočlen v (4.37) má snadno objevitelný rozklad

$$t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} = (t + 1)^2\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Vyhovují tedy hodnoty $t = -1$ a $t = \frac{1}{2}$, takže v případě $p, q, r \in \{-1, 1\}$ za podmínky $pqr = 1$ jsou všechna řešení původní soustavy určena základními rovnicemi

$$(\cos x, \cos y, \cos z) = (-p, -q, -r), \quad \text{resp.} \quad (\cos x, \cos y, \cos z) = \left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{r}{2}\right)$$

(podmínky (4.34) jsou zřejmě splněny).
Zabývejme se až do konce řešení případem $s > 1$. Povšimněme si především, že mnohočlen

$$F(t) = t^3 + \frac{3s}{2}t^2 - \frac{1}{2} \tag{4.38}$$

má v jistých čtyřech významných bodech hodnoty

$$\begin{aligned} F\left(-\frac{3s}{2}\right) &= \frac{-27s^3}{8} + \frac{27s^3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0, & F(-s) &= -s^3 + \frac{3s^3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{s^3 - 1}{2} > 0,\\ F(0) &= -\frac{1}{2} < 0, & F\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{s^3}{8} + \frac{3s^3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{s^3 - 1}{2} > 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Proto na každém ze tří otevřených intervalů $\left(-\frac{3s}{2}, -s\right), (-s, 0)$ a $\left(0, \frac{s}{2}\right)$ bude mít kubická rovnice (4.37) jeden reálný kořen. Vypočtěme je nyní užitím Cardanovy metody. Nejprve tedy zavedeme substituci

$$t = u - \frac{s}{2}, \tag{4.40}$$

abychom pro novou neznámou u dostali kubickou rovnici s nulovým koeficientem u členu u^2:

$$\begin{aligned}\left(u-\frac{s}{2}\right)^3+\frac{3s}{2}\left(u-\frac{s}{2}\right)^2-\frac{1}{2}&=0,\\ u^3-\frac{3s^2}{4}\cdot u+\frac{s^3}{4}-\frac{1}{2}&=0.\end{aligned}\tag{4.41}$$

Nyní uplatníme hlavní obrat Cardanovy metody: řešení poslední rovnice budeme hledat ve tvaru $u = u_1 + u_2$, kde u_1 a u_2 je dvojice čísel, jež bude řešením vhodné soustavy rovnic, kterou za okamžik sestavíme. (Jak se ukáže, čísla u_1, u_2 nebudou *reálná*, nýbrž *imaginární* – přesněji *komplexně sdružená*.) Dosadíme-li vyjádření

$$u = u_1 + u_2, \quad u^3 = u_1^3 + u_2^3 + 3u_1u_2(u_1 + u_2)$$

do rovnice (4.41), dostaneme po snadné úpravě rovnici

$$u_1^3+u_2^3+3(u_1+u_2)\left(u_1u_2-\frac{s^2}{4}\right)+\frac{s^3}{4}-\frac{1}{2}=0.$$

Ta bude splněna, budou-li čísla u_1, u_2 řešením soustavy rovnic

$$u_1u_2=\frac{s^2}{4}, \quad u_1^3+u_2^3=\frac{1}{2}-\frac{s^3}{4}.\tag{4.42}$$

Čísla u_1^3 a u_2^3 tak mají předepsaný nejen součet, ale i součin – ten se rovná třetí mocnině hodnoty $\frac{s^2}{4}$. Proto je určíme jako kořeny $v_{1,2}$ nové kvadratické rovnice

$$v^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{s^3}{4}\right)v+\left(\frac{s^2}{4}\right)^3=0.$$

Její diskriminant D má hodnotu

$$D=\left(\frac{1}{2}-\frac{s^3}{4}\right)^2-4\cdot\frac{s^6}{4^3}=\frac{s^6}{4^2}-\frac{s^3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{s^6}{4^2}=\frac{1-s^3}{4},$$

což je záporné číslo, neboť $s > 1$. Kořeny $v_{1,2}$ jsou proto komplexně sdružená čísla

$$v_{1,2}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{s^3}{4}\right)\pm\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot\sqrt{s^3-1}}{2}=\frac{1}{2^3}\cdot(2-s^3\pm 2\mathrm{i}\sqrt{s^3-1}).$$

K určení čísel u_1, u_2 z rovností $u_1^3 = v_1$ a $u_2^3 = v_2$ budeme muset vypočítat třetí odmocniny z čísel v_1, v_2 (a pak vybrat tyto nejednoznačné hodnoty tak, aby byla splněna první rovnice z (4.42), kterou jsme v dalším postupu umocnili na třetí). Nejprve proto najdeme goniometrický tvar komplexních čísel $v_{1,2}$. Pro jejich absolutní hodnotu platí

$$|v_{1,2}|=\frac{1}{2^3}\cdot\left|2-s^3\pm 2\mathrm{i}\sqrt{s^3-1}\right|=\frac{1}{2^3}\sqrt{(2-s^3)^2+4(s^3-1)}=\frac{\sqrt{s^6}}{2^3}=\left(\frac{s}{2}\right)^3.$$

Zavedeme-li proto úhel $\omega \in (0, \pi)$ rovností

$$\cos\omega=\frac{2-s^3}{s^3}=\frac{2}{s^3}-1\tag{4.43}$$

(poslední výraz má hodnotu v intervalu $(-1,1)$, neboť $s>1$), bude platit

$$v_{1,2}=\left(\frac{s}{2}\right)^3(\cos\omega\pm\mathrm{i}\sin\omega),$$

takže soustavu rovnic (4.42) splňují tři dvojice komplexně sdružených čísel

$$u_{1,2}=\frac{s}{2}\cdot\left(\cos\frac{\omega+2k\pi}{3}\pm\mathrm{i}\sin\frac{\omega+2k\pi}{3}\right),$$

kde $k\in\{0,1,2\}$. Kubická rovnice (4.41) má tedy tři reálné kořeny

$$u=u_1+u_2=s\cdot\cos\frac{\omega+2k\pi}{3},\quad \text{kde } k\in\{0,1,2\}\,.$$

Po dosazení do (4.40) tak dostaneme tři kořeny původní rovnice (4.37). Označíme je

$$t_1=\frac{s}{2}\left(2\cos\frac{\omega}{3}-1\right),\quad t_2=\frac{s}{2}\left(2\cos\frac{\omega+2\pi}{3}-1\right),\quad t_3=\frac{s}{2}\left(2\cos\frac{\omega+4\pi}{3}-1\right). \tag{4.44}$$

Celý výpočet pro případ $s>1$ je u konce. Hodnoty $\cos x,\cos y,\cos z$ každého řešení soustavy ze zadání příkladu jsou dány rovnostmi (4.31), do nichž dosadíme za t libovolné z čísel t_1,t_2,t_3 ze vztahů (4.44), jež splňuje omezení (4.34).

Ukažme ještě, že diskusi o splnění podmínek (4.34) lze podat přehledně i v obecném případě $s>1$, bez ohledu na poměrně složitá vyjádření (4.44) přesných hodnot t_1,t_2,t_3. Všimněme si, že z nerovností $0<\omega<\pi$ plyne

$$\frac{1}{2}<\cos\frac{\omega}{3}<1,\quad -1<\cos\frac{\omega+2\pi}{3}<-\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2}<\cos\frac{\omega+4\pi}{3}<\frac{1}{2},$$

takže pro kořeny z (4.44) dostáváme odhady

$$0<t_1<\frac{s}{2},\quad -\frac{3}{2}s<t_2<-s,\quad -s<t_3<0,$$

jež odpovídají intervalům, které jsme dříve stanovili na základě nerovností (4.39). Odtud je jasné, že kořen t_2 musíme z řešení naší úlohy vždy vyloučit, neboť z předpokladu $s>1$ zřejmě plyne

$$|t_2|>1\quad \text{a}\quad \max\{|p|,|q|,|r|\}>1$$

(připomínáme definici (4.36) parametru s), a proto podmínka (4.34) pro $t=t_2$ neplatí. Ve zbylé části naší diskuse ukážeme, že pro každé $s>1$ je podmínka (4.34) splněna jak pro $t=t_1$, tak pro $t=t_3$, že tedy oba kořeny t_1 a t_3 vždy generují řešení naší úlohy.

Parametry p,q,r bude nyní výhodné uspořádat tak, aby platilo $|p|\ge|q|\ge|r|>0$. Pak totiž splnění podmínky (4.34) pro kladné $t=t_1$, resp. záporné $t=t_3$ lze vyjádřit jedinou nerovností

$$t_1\le\frac{1}{|p|},\quad \text{resp.}\quad t_3\ge-\frac{1}{|p|}. \tag{4.45}$$

Vzpomeneme-li si, že $t_1\in\left(0,\frac{s}{2}\right)$ a $t_3\in(-s,0)$ jsou kořeny mnohočlenu F z (4.38), který má v krajních bodech uvedených intervalů hodnoty (4.39), dojdeme k závěru, že nerovnosti (4.45) budou splněny, právě když bude platit

$$F\left(\frac{1}{|p|}\right)\ge0,\quad \text{resp.}\quad F\left(-\frac{1}{|p|}\right)\ge0.$$

Ověřit poslední dvě nerovnosti je snadné:

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{|p|}\right) &= \frac{1}{|p|^3} + \frac{3s}{2}\frac{1}{|p|^2} - \frac{1}{2} = \frac{2 + 3s|p| - |p|^3}{2|p|^3} = \frac{2 + (p^2+q^2+r^2)|p| - |p|^3}{2|p|^3} = \\
&= \frac{2 + (q^2+r^2)|p|}{2|p|^3} > 0, \\
F\left(-\frac{1}{|p|}\right) &= -\frac{1}{|p|^3} + \frac{3s}{2}\frac{1}{|p|^2} - \frac{1}{2} = \frac{-2 + 3s|p| - |p|^3}{2|p|^3} = \frac{-2|pqr| + (p^2+q^2+r^2)|p| - |p|^3}{2|p|^3} = \\
&= \frac{q^2 + r^2 - 2|qr|}{2|p|^2} = \frac{(|q| - |r|)^2}{2|p|^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Shrňme v úplném závěru výsledek diskuse případu $s > 1$: zatímco kořen t_2 žádná řešení původní goniometrické soustavy negeneruje, každý z kořenů t_1, t_3 taková řešení přináší.

Ilustrujme nyní numericky výše uvedené řešení výpočtem pro konkrétní hodnoty $p = 4, q = 2, r = 1$. Pro lepší přehlednost uvedeme tuto numerickou ukázku jako samostatný příklad.

■ **Příklad 4.5.14.** Řešte soustavu rovnic $\cos x : \cos y : \cos z = 4 : 2 : 1, \quad x + y + z = \pi.$

Řešení: Zadané hodnoty $p = 4, q = 2, r = 1$ nesplňují podmínku $pqr = 1$ potřebnou k postupu výpočtu podle předchozího řešení, proto je zaměníme úměrnými hodnotami

$$p' = \frac{p}{\sqrt[3]{pqr}} = 2, \quad q' = \frac{q}{\sqrt[3]{pqr}} = 1, \quad r' = \frac{r}{\sqrt[3]{pqr}} = \frac{1}{2}.$$

Další kroky postupu byly detailně popsány v 4.5.13, proto je nyní uvedeme bez komentáře.

- $\cos x = 2 \cdot t, \cos y = 1 \cdot t, \cos z = \dfrac{1}{2} \cdot t$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$,
- $s = \dfrac{2^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} = \dfrac{7}{4}$,
- $t^3 + \dfrac{21}{8}t^2 - \dfrac{1}{2} = 0$,
- $t = u - \dfrac{7}{8} \quad \Rightarrow \quad u^3 - 3 \cdot \left(\dfrac{7}{8}\right)^2 \cdot u + 2 \cdot \left(\dfrac{7}{8}\right)^3 - \dfrac{1}{2} = 0$,
- $u = u_1 + u_2$, kde $u_1 u_2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^2, u_1^3 + u_2^3 = \dfrac{1}{2} - 2 \cdot \left(\dfrac{7}{8}\right)^3$,
- $v_{1,2} = u_{1,2}^3$, kde $v^2 - \left(\dfrac{1}{2} - 2 \cdot \left(\dfrac{7}{8}\right)^3\right) v + \left(\dfrac{7}{8}\right)^6 = 0$,
- $v_{1,2} = -\dfrac{215}{512} \pm \mathrm{i} \cdot \dfrac{\sqrt{279}}{32}, \ |v_{1,2}| = \dfrac{343}{512} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^3$,
- $\cos\omega = -\dfrac{215}{343}$ pro $\omega = 128{,}8160543...^\circ$,
- $u_{1,2} = \dfrac{7}{8} \cdot \left(\cos\dfrac{\omega + 2k \cdot 180^\circ}{3} \pm \mathrm{i}\sin\dfrac{\omega + 2k \cdot 180^\circ}{3}\right)$,
- $u = u_1 + u_2 = \dfrac{7}{4} \cdot \cos\dfrac{\omega + 2k \cdot 180^\circ}{3}$,

- $t_1 = \frac{7}{4} \cdot \cos \frac{\omega}{3} - \frac{7}{8} = 0{,}406\,145\,469...,$
  $t_2 = \frac{7}{4} \cdot \cos \frac{\omega + 360^\circ}{3} - \frac{7}{8} = -2{,}547\,984\,821...,$
  $t_3 = \frac{7}{4} \cdot \cos \frac{\omega + 720^\circ}{3} - \frac{7}{8} = -0{,}483\,160\,648...,$
- $(\cos x, \cos y, \cos z) = \left(2t_1, t_1, \frac{1}{2}t_1\right),$

  $\arccos 2t_1 = 35{,}679\,630\,01...^\circ$, $\arccos t_1 = 66{,}037\,071\,94...^\circ$, $\arccos \frac{1}{2}t_1 = 78{,}283\,298\,03...^\circ$,

  1. skupina řešení:
  $(x, y, z) \doteq (35{,}7^\circ + l \cdot 360^\circ, 66{,}0^\circ + m \cdot 360^\circ, 78{,}3^\circ + n \cdot 360^\circ),$
  kde $l, m, n \in \mathbb{Z}, l + m + n = 0,$
  2. skupina řešení:
  $(x, y, z) \doteq (-35{,}7^\circ + l \cdot 360^\circ, -66{,}0^\circ + m \cdot 360^\circ, -78{,}3^\circ + n \cdot 360^\circ),$
  kde $l, m, n \in \mathbb{Z}, l + m + n = 1,$
- $(\cos x, \cos y, \cos z) = \left(2t_2, t_2, \frac{1}{2}t_2\right),$

  $$2t_2 \doteq -2{,}548 \notin H(\cos),$$
- $(\cos x, \cos y, \cos z) = \left(2t_3, t_3, \frac{1}{2}t_3\right),$

  $\arccos 2t_3 = 165{,}087\,797\,8...^\circ$, $\arccos t_3 = 118{,}892\,033\,2...^\circ$, $\arccos \frac{1}{2}t_3 = 103{,}979\,831\,1...^\circ$,

  3. skupina řešení:
  $(x, y, z) \doteq (165{,}1^\circ + l \cdot 360^\circ, 118{,}9^\circ + m \cdot 360^\circ, -104{,}0^\circ + n \cdot 360^\circ),$
  kde $l, m, n \in \mathbb{Z}, l + m + n = 0,$
  4. skupina řešení:
  $(x, y, z) \doteq (-165{,}1^\circ + l \cdot 360^\circ, -118{,}9^\circ + m \cdot 360^\circ, 104{,}0^\circ + n \cdot 360^\circ),$
  kde $l, m, n \in \mathbb{Z}, l + m + n = 1.$

4.6 Goniometrické identity a rovnosti

V předchozích podkapitolách jsme po zavedení goniometrických funkcí v oboru $\mathbb{R}$ uvedli a dokázali základní vzorce, které tyto funkce splňují a které by měl aktivně ovládat každý, kdo chce s goniometrickými funkcemi úspěšně pracovat při jejich nejrůznějších aplikacích.[22] V matematické literatuře najdeme ovšem značné množství dalších rovností pro goniometrické funkce s různě sestavenými argumenty zahrnujícími reálné proměnné, ve kterých tyto rovnosti zpravidla platí identicky, vždy když mají sestavené výrazy smysl. Říkejme jim proto *goniometrické identity.* Mnohé z nich byly v minulosti patrně odvozeny při řešení konkrétních problémů, ať už praktického či teoretického původu, a všechny potvrzují bohatost celé teorie goniometrických funkcí. Na hledání takových, mnohdy nečekaných a překvapivých souvislostí se zaměříme v příkladech závěrečné části 4.7 celé kapitoly. V této podkapitole 4.6 uvedeme formou řešených příkladů nejprve některé další významné

[22] V dále řešených příkladech budeme proto tyto základní vzorce uplatňovat bez odkazů, zejména při postupných úpravách výrazů.

goniometrické vzorce a identity s poměrně jednoduchými zápisy a zajímavou formou. Poté v dalších příkladech dokážeme řadu *číselných rovností*, které splňují hodnoty goniometrických funkcí v některých daných význačných úhlech. Tyto rovnosti jsou o to působivější, že zmíněné hodnoty jsou zpravidla iracionální čísla, která neumíme „rozumným“ způsobem vyjádřit, takže exaktní ověření takových rovností není možné provést prostým dosazením dotyčných hodnot (numerické výpočty s kalkulačkou nebo počítačem jistotu přesných rovností ovšem poskytnout nemohou). Goniometrické identity a rovnosti mezi *reálnými* výrazy, resp. čísly, které lze snadněji odvodit využitím algebry *komplexních* čísel, uvedeme až v části 6.2 poslední kapitoly.

■ **Příklad 4.6.1.** Dokažte vzorce pro funkce trojnásobného argumentu

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$
$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{cotg} 3x = \frac{\operatorname{cotg}^3 x - 3\operatorname{cotg} x}{3\operatorname{cotg}^2 x - 1}.$$

První dva vzorce přitom platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, třetí a čtvrtý za podmínky, kdy má smysl zlomek v jejich pravé straně.
Řešení:

- $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x =$
  $= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x = 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x =$
  $= 3\sin x - 4\sin^3 x.$
- $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos =$
  $= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$
  $= 4\cos^3 x - 3\cos x.$
- $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x + x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} = \dfrac{\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\cdot \operatorname{tg} x} = \dfrac{\frac{2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}} = \dfrac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$
- $\operatorname{cotg} 3x = \operatorname{cotg}(2x + x) = \dfrac{\operatorname{cotg} 2x \operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cotg} 2x + \operatorname{cotg} x} = \dfrac{\frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x}\cdot \operatorname{cotg} x - 1}{\frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x} + \operatorname{cotg} x} = \dfrac{\frac{\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x - 2\operatorname{cotg} x}{2\operatorname{cotg} x}}{\frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1 + 2\operatorname{cotg}^2 x}{2\operatorname{cotg} x}} =$
  $= \dfrac{\operatorname{cotg}^3 x - 3\operatorname{cotg} x}{3\operatorname{cotg}^2 x - 1}.$

■ **Příklad 4.6.2.** Dokažte vzorce pro součiny hodnot tangens a kotangens

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y},$$
$$\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y = \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y},$$
$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y},$$

které platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, pro něž má příslušný zlomek v pravé straně vzorce smysl.

Řešení:

- $\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg} y}=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}+\frac{1}{\operatorname{tg} y}}=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y}}=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y.$
- $\operatorname{cotg} x\cdot\operatorname{cotg} y=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg} y}=\dfrac{1}{\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg} y}}=\dfrac{\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}.$
- $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{cotg} y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} y}{\operatorname{cotg} x+\operatorname{tg} y}.$

■ **Příklad 4.6.3.** Dokažte vzorce pro součty hodnot tangens a kotangens

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y&=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y},\\ \operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg} y&=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y},\\ \operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} y&=\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y},\end{aligned}$$

které platí pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$, pro něž mají oba sčítanci v příslušné levé straně vzorce smysl. (Zaměníme-li y za $-y$, dostaneme obdobné vzorce pro rozdíly hodnot tangens a kotangens.)
Řešení:

- $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin y}{\cos y}=\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}.$
- $\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg} y=\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\cos y}{\sin y}=\dfrac{\sin y\cos x+\cos y\sin x}{\sin x\sin y}=\dfrac{\sin(y+x)}{\sin x\sin y}.$
- $\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} y=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos y}{\sin y}=\dfrac{\sin x\sin y+\cos x\cos y}{\cos x\sin y}=\dfrac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}.$

■ **Příklad 4.6.4.** Dokažte, že pro libovolná $x,y,z\in\mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z=\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}$$

za předpokladu, že $\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z\neq 0$.[23]
Řešení: Podmínka $\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z\neq 0$ zaručuje, že všechny tři hodnoty $\operatorname{tg} x,\operatorname{tg} y,\operatorname{tg} z$ mají smysl. Pro jejich součet úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z&=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}+\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{\sin(x+y)\cos z+\sin z\cos x\cos y}{\cos x\cos y\cos z}=\\ &=\frac{\sin(x+y)\cos z+\cos(x+y)\sin z-\cos(x+y)\sin z+\sin z\cos x\cos y}{\cos x\cos y\cos z}=\\ &=\frac{\sin(x+y+z)+\sin z\cdot(\cos x\cos y-\cos(x+y))}{\cos x\cos y\cos z}=\\ &=\frac{\sin(x+y+z)+\sin x\sin y\sin z}{\cos x\cos y\cos z}=\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z.\end{aligned}$$

Poznámka: Identita z předchozího příkladu má důsledek týkající se zajímavé rovnosti

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z,$$

že totiž taková rovnost platí, právě když $\sin(x+y+z)=0$; splňují ji tedy například vnitřní úhly x,y,z libovolného nepravoúhlého trojúhelníku (neboť $x+y+z=\pi$).

[23] [34], str. 20.

■ **Příklad 4.6.5.** Dokažte, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \sin(x+y)\sin(x-y) &= \cos^2 y - \cos^2 x = \sin^2 x - \sin^2 y, \\ \cos(x+y)\cos(x-y) &= \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x. \end{aligned}$$

Řešení: Dokazovat budeme pouze identity z prvního řádku, neboť identity z druhého řádku z nich zřejmě plynou, když x zaměníme za $\frac{\pi}{2} - x$. Druhá rovnost v prvním řádku plyne z porovnání dvou goniometrických jedniček

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 y + \sin^2 y,$$

důkaz první rovnosti provedeme takto:

$$\begin{aligned} \cos^2 y - \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2y}{2} - \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{\cos 2y - \cos 2x}{2} = \\ &= \frac{\cos(x+y-(x-y)) - \cos(x+y+x-y)}{2} = \sin(x+y)\sin(x-y). \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.6.** Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ dokažte rovnosti[24]

$$\begin{aligned} (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 &= 4\cos^2 \frac{x-y}{2}, \\ (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 &= 4\sin^2 \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Řešení:

- $$\begin{aligned} (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 &= \cos^2 x + 2\cos x\cos y + \cos^2 y + \sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y = \\ &= 2 + 2(\cos x\cos y + \sin x \sin y) = 2 + 2\cos(x-y) = \\ &= 4 \cdot \frac{1+\cos(x-y)}{2} = 4\cos^2 \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 &= \cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y = \\ &= 2 - 2(\cos x\cos y + \sin x \sin y) = 2 - 2\cos(x-y) = \\ &= 4 \cdot \frac{1-\cos(x-y)}{2} = 4\sin^2 \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.7.** Pro každé $x \in \mathbb{R}$ označme

$$a = \sin^4 x + \cos^4 x, \qquad b = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

Vyjádřete b pomocí a.[25]
Řešení: Umocníme-li rovnost $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ jednou na druhou, podruhé na třetí:

$$\begin{aligned} 1^2 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x, \\ 1^3 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \cos^6 x, \end{aligned}$$

dostaneme po úpravě soustavu dvou rovnic

$$1 = a + 2\sin^2 x\cos^2 x, \qquad 1 = b + 3\sin^2 x\cos^2 x \cdot (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}).$$

Odtud sčítací metodou vyloučíme $\sin^2 x\cos^2 x$, čímž získáme kýžené vyjádření:

$$1 = 3a - 2b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{3a-1}{2}.$$

[24] [34], str. 10.
[25] [29], str. 90–91.

■ **Příklad 4.6.8.** Dokažte, že hodnota výrazu

$$V(x) = \cos^2 x + \cos^2(a+x) - 2\cos a \cos x \cos(a+x)$$

s parametrem $a \in \mathbb{R}$ nezávisí na hodnotě proměnné $x \in \mathbb{R}$.[26]
Řešení: Protože $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, volbou $x = \frac{\pi}{2} - a$ dostaneme

$$V\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin^2 a.$$

Proto je naší úlohou dokázat identitu

$$\cos^2 x + \cos^2(a+x) - 2\cos a \cos x \cos(a+x) = \sin^2 a.$$

Její levou stranu užitím vzorce $2\cos a \cos x = \cos(a+x) + \cos(a-x)$ upravíme takto:

$$\begin{gathered}
\cos^2 x + \cos^2(a+x) - \big(\cos^2(a+x) + \cos(a+x)\cos(a-x)\big) = \\
= \cos^2 x - (\cos a \cos x - \sin a \sin x) \cdot (\cos a \cos x + \sin a \sin x) = \\
= \cos^2 x - \cos^2 a \cos^2 x + \sin^2 a \sin^2 x = \cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 a) + \sin^2 a \sin^2 x = \\
= \cos^2 x \sin^2 a + \sin^2 a \sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)\sin^2 a = \sin^2 a.
\end{gathered}$$

■ **Příklad 4.6.9.** Součet

$$S = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$$

upravte na součin.[27]
Řešení: Využijeme důsledků vzorce pro součet dvou sinů

$$\sin(x-y) + \sin(y-z) = 2\sin\frac{x-z}{2}\cos\frac{x+z-2y}{2}$$

a vzorce pro sinus dvojnásobného argumentu

$$\sin(z-x) = 2\sin\frac{z-x}{2}\cos\frac{z-x}{2}.$$

Pro zkoumaný součet S tak dostaneme:

$$\begin{gathered}
S = \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x) = 2\sin\frac{x-z}{2}\left(\cos\frac{x+z-2y}{2} - \cos\frac{z-x}{2}\right) = \\
= 2\sin\frac{x-z}{2}\left(-2\sin\frac{z-y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right) = -4\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}.
\end{gathered}$$

■ **Příklad 4.6.10.** Rozložte na součin výrazy

$$\begin{aligned}
C &= \cos x + \cos y + \cos z + \cos(x+y+z), \\
S &= \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)
\end{aligned}$$

s libovolnými proměnnými $x, y, z \in \mathbb{R}$.[28]
Řešení: Před vlastním odvozením si povšimněme jednoduchých situací, kdy jsou zkoumané výrazy

[26] [34], str. 11.
[27] [29], str. 94.
[28] [34], str. 20.

rovny nule. Rovnost $C = 0$ zřejmě nastane, je-li jeden ze součtů $x+y, x+z, y+z$ roven číslu π (plyne to ze vzorce $\cos(\pi - t) = -\cos t$); bude-li jeden z těchto součtů roven nule, bude zase platit $S = 0$ (neboť $\sin(-t) = -\sin t$). Tato poznámka „ospravedlňuje“ volbu znaků $\pm$ u posledního členu v definici výrazů C a S, aby byl možný jejich rozklad na součin.

- $$\begin{aligned} C &= (\cos x + \cos y) + (\cos z + \cos(x+y+z)) = \\ &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y+2z}{2}\cos\frac{-x-y}{2} = \\ &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\left(\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y+2z}{2}\right) = \\ &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\left(2\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{-y-z}{2}\right) = 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} S &= (\sin x + \sin y) + (\sin z - \sin(x+y+z)) = \\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos\frac{x+y+2z}{2}\sin\frac{-x-y}{2} = \\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y+2z}{2} = \\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y+2z}{2}\right) = \\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\left(-2\sin\frac{x+z}{2}\sin\frac{-y-z}{2}\right) = 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

V několika dalších příkladech využijeme techniku tzv. *teleskopického sčítání*. Spočívá v tom, že sčítance zkoumaného součtu S upravíme do tvaru vhodných rozdílů, abychom získali vyjádření, které nyní poněkud neformálně zapíšeme jako

$$S = (a-b) + (b-c) + (c-d) + \cdots + (y-z).$$

Odtud pak po zrušení dvojic navzájem opačných členů dostaneme výsledek ve tvaru $S = a - z$. Podobně probíhá i krácení dvojic shodných činitelů při teleskopickém násobení

$$P = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdots\frac{y}{z} = \frac{a}{z},$$

které také později několikrát uplatníme. Před vlastními příklady uveďme tři jednoduché výsledky teleskopického sčítání, totiž goniometrické identity

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} + \frac{\sin(y-z)}{\cos y\cos z} + \frac{\sin(z-x)}{\cos z\cos x} &= 0, \\ \sin x\sin(y-z) + \sin y\sin(z-x) + \sin z\sin(x-y) &= 0, \\ \cos x\sin(y-z) + \cos y\sin(z-x) + \cos z\sin(x-y) &= 0. \end{aligned}$$

Sčítance na každé z levých stran lze zřejmě zapsat jako tři analogické rozdíly, které pro první sčítanec mají tvar

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} &= \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y,\\
\sin x \sin(y-z) &= \frac{\cos(x-y+z)-\cos(x+y-z)}{2},\\
\cos x \sin(y-z) &= \frac{\sin(x+y-z)-\sin(x-y+z)}{2},
\end{aligned}$$

takže po jejich sečtení vyjde ve všech třech případech skutečně nula.

■ **Příklad 4.6.11.** Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ dokažte vzorce

$$\begin{aligned}
S_n &= \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\\
C_n &= \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

za předpokladu, že platí $\sin\frac{x}{2} \neq 0$.[29]
Řešení: Budeme upravovat výrazy $\sin\frac{x}{2}\cdot S_n$ a $\sin\frac{x}{2}\cdot C_n$:

$$\begin{gathered}
\sin\frac{x}{2}\cdot S_n = \sin\frac{x}{2}\sin x + \sin\frac{x}{2}\sin 2x + \cdots + \sin\frac{x}{2}\sin nx =\\
= \frac{\cos(\frac{x}{2}-x)-\cos(\frac{x}{2}+x)}{2} + \frac{\cos(\frac{x}{2}-2x)-\cos(\frac{x}{2}+2x)}{2} + \cdots + \frac{\cos(\frac{x}{2}-nx)-\cos(\frac{x}{2}+nx)}{2} =\\
= \frac{\cos\frac{x}{2}}{2} - \frac{\cos\frac{3x}{2}}{2} + \frac{\cos\frac{3x}{2}}{2} - \frac{\cos\frac{5x}{2}}{2} + \cdots + \frac{\cos\frac{(2n-1)x}{2}}{2} - \frac{\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2}.
\end{gathered}$$

Po teleskopickém sečtení dostaneme

$$\begin{gathered}
\sin\frac{x}{2}\cdot S_n = \frac{\cos\frac{x}{2}}{2} - \frac{\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right) =\\
= \frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{\frac{x}{2}+\frac{(2n+1)x}{2}}{2}\sin\frac{\frac{x}{2}-\frac{(2n+1)x}{2}}{2}\right) = \sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}.
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\sin\frac{x}{2}\cdot C_n = \sin\frac{x}{2}\cos x + \sin\frac{x}{2}\cos 2x + \cdots + \sin\frac{x}{2}\cos nx =\\
= \frac{\sin(\frac{x}{2}+x)+\sin(\frac{x}{2}-x)}{2} + \frac{\sin(\frac{x}{2}+2x)+\sin(\frac{x}{2}-2x)}{2} + \cdots + \frac{\sin(\frac{x}{2}+nx)+\sin(\frac{x}{2}-nx)}{2} =\\
= \frac{\sin\frac{3x}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{x}{2}}{2} + \frac{\sin\frac{5x}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{3x}{2}}{2} + \frac{\sin\frac{7x}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{5x}{2}}{2} + \cdots + \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{(2n-1)x}{2}}{2}.
\end{gathered}$$

Podobně po úpravě a teleskopickém sečtení druhého výrazu dostaneme

$$\begin{gathered}
\sin\frac{x}{2}\cdot C_n = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2} - \frac{\sin\frac{x}{2}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) =\\
\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\frac{(2n+1)x+x}{2}}{2}\sin\frac{\frac{(2n+1)x-x}{2}}{2}\right) = \cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}.
\end{gathered}$$

[29] V případě, kdy $\sin\frac{x}{2} = 0$ neboli $x = 2k\pi$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$, zřejmě platí $S_n = 0$ a $C_n = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka: Vzorce z předchozího příkladu se často uvádějí v obecnější podobě

$$\sin a + \sin(a+x) + \cdots + \sin(a+nx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\left(a+\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$
$$\cos a + \cos(a+x) + \cdots + \cos(a+nx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\left(a+\frac{nx}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

s libovolným parametrem $a \in \mathbb{R}$. My je můžeme získat z dokázaných vzorců pro $a = 0$ díky zřejmým rovnostem

$$\sin a + \sin(a+x) + \cdots + \sin(a+nx) = \sin a \cdot (1 + C_n) + \cos a \cdot S_n,$$
$$\cos a + \cos(a+x) + \cdots + \cos(a+nx) = \cos a \cdot (1 + C_n) - \sin a \cdot S_n,$$

do nichž stačí dosadit za S_n a C_n.

■ **Příklad 4.6.12.** Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ dokažte rovnost

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \cdots + \frac{\sin nx}{\cos^n x} = \operatorname{cotg} x - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$$

za předpokladu, že platí $\sin 2x \neq 0$.[30]
Řešení: Úvodem si všimněme, že podmínka $\sin 2x \neq 0$ znamená, že obě hodnoty $\sin x, \cos x$ jsou nenulové. Ze součtového vzorce pro kosinus plyne

$$\sin kx \sin x = \cos kx \cos x - \cos(k+1)x,$$

kde $k \in \mathbb{N}$ je libovolné. Když vydělíme obě strany rovnosti výrazem $\sin x \cos^k x$, obdržíme

$$\frac{\sin kx}{\cos^k x} = \frac{\cos kx}{\sin x \cos^{k-1} x} - \frac{\cos(k+1)x}{\sin x \cos^k x}.$$

Nyní již teleskopickým sečtením odvodíme zadanou rovnost:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \cdots + \frac{\sin nx}{\cos^n x} =$$
$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} - \frac{\cos 3x}{\sin x \cos^2 x} + \cdots + \frac{\cos nx}{\sin x \cos^{n-1} x} - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x} =$$
$$= \operatorname{cotg} x - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}.$$

■ **Příklad 4.6.13.** Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ dokažte rovnost

$$\frac{1}{\cos x - \cos 3x} + \frac{1}{\cos x - \cos 5x} + \cdots + \frac{1}{\cos x - \cos(2n+1)x} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(n+1)x}{2\sin x}$$

za předpokladu, že $\frac{x}{\pi}$ není celé číslo.[31]
Řešení: Budeme upravovat levou stranu rovnosti, a to tak, že jmenovatele zlomků nejdříve přepíšeme

[30] [31], str. 28.
[31] [31], str. 28.

podle vzorce pro rozdíl kosinů a následně každého sčítance vynásobíme zlomkem $\frac{\sin x}{\sin x}$ rovným 1:

$$\frac{1}{2\sin 2x\sin x}+\frac{1}{2\sin 3x\sin 2x}+\cdots+\frac{1}{2\sin(n+1)x\sin nx}=$$
$$=\frac{1}{2\sin 2x\sin x}\cdot\frac{\sin(2x-x)}{\sin(2x-x)}+\frac{1}{2\sin 3x\sin 2x}\cdot\frac{\sin(3x-2x)}{\sin(3x-2x)}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{2\sin(n+1)x\sin nx}\cdot\frac{\sin((n+1)x-nx)}{\sin((n+1)x-nx)}=$$
$$=\frac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{2\sin 2x\sin x\sin x}+\frac{\sin 3x\cos 2x-\cos 3x\sin 2x}{2\sin 3x\sin 2x\sin x}+\cdots+$$
$$+\frac{\sin(n+1)x\cos nx-\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin(n+1)x\sin nx\sin x}=$$
$$=\frac{\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg} 2x+\operatorname{cotg} 2x-\operatorname{cotg} 3x+\cdots+\operatorname{cotg} nx-\operatorname{cotg}(n+1)x}{2\sin x}=\frac{\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg}(n+1)x}{2\sin x}.$$

Podmínka $\frac{x}{\pi}\notin\mathbb{Z}$ neboli $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ zaručuje, že všechny uvažované zlomky mají nenulové jmenovatele a náš výpočet tak je korektní.

■ **Příklad 4.6.14.** Dokažte, že pro libovolné $x\in\mathbb{R}$ a každé $n\in\mathbb{N}$ platí rovnost

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg} 2^n x$$

za předpokladu, že všechny sčítance na levé straně mají smysl.[32]
Řešení: Jednotlivé sčítance nejdříve upravíme na vhodné rozdíly:

$$\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2 x-(2\cos^2 x-1)}{\sin 2x}=\frac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}-\frac{2\cos^2 x-1}{\sin 2x}=\operatorname{cotg} x-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=$$
$$=\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg} 2x,$$
$$\frac{1}{\sin 4x}=\frac{2\cos^2 2x-(2\cos^2 2x-1)}{\sin 4x}=\frac{2\cos^2 2x}{2\sin 2x\cos 2x}-\frac{2\cos^2 2x-1}{\sin 4x}=\operatorname{cotg} 2x-\frac{\cos 4x}{\sin 4x}=$$
$$=\operatorname{cotg} 2x-\operatorname{cotg} 4x,$$
$$\frac{1}{\sin 8x}=\cdots=\operatorname{cotg} 4x-\operatorname{cotg} 8x,$$
$$\vdots$$

Nyní již teleskopickým sečtením dostaneme:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=$$
$$=\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg} 2x+\operatorname{cotg} 2x-\operatorname{cotg} 4x+\cdots+\operatorname{cotg} 2^{n-1}x-\operatorname{cotg} 2^n x=\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg} 2^n x.$$

■ **Příklad 4.6.15.** Dokažte, že pro libovolné $x\in\mathbb{R}$ a každé $n\in\mathbb{N}$ platí rovnost

$$\left(1-2\cos\frac{x}{2}\right)\left(1-2\cos\frac{x}{4}\right)\cdots\left(1-2\cos\frac{x}{2^n}\right)=(-1)^n\cdot\frac{1+2\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2^n}}$$

za předpokladu, že žádný činitel na levé straně není roven číslu 2.[33]
Řešení: Každý z činitelů $1-2\cos a$ upravíme na podíl rozšířením číslem $1+2\cos a$:

$$1-2\cos a=\frac{1-4\cos^2 a}{1+2\cos a}=\frac{1-2(1+\cos 2a)}{1+2\cos a}=-\frac{1+2\cos 2a}{1+2\cos a}.$$

[32] [31], str. 28.
[33] [31], str. 29.

Takové rozšíření je korektní úprava, pokud $1+2\cos a \neq 0$ neboli $1-2\cos a \neq 2$. Díky předpokladu uvedenému v zadání úlohy můžeme tuto úpravu využít pro každý činitel:

$$\left(-\frac{1+2\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2}}\right)\left(-\frac{1+2\cos\frac{x}{2}}{1+2\cos\frac{x}{4}}\right)\cdots\left(-\frac{1+2\cos\frac{x}{2^{n-2}}}{1+2\cos\frac{x}{2^{n-1}}}\right)\left(-\frac{1+2\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{1+2\cos\frac{x}{2^{n}}}\right)=(-1)^n\cdot\frac{1+2\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2^n}}.$$

■

V následujících třinácti příkladech dokážeme rozmanité číselné rovnosti, které splňují hodnoty goniometrických funkcí v některých daných význačných úhlech. Výjimkou bude první příklad o číselné rovnosti, kterou naopak splňují čtyři úhly s význačnými hodnotami tangens.

■ **Příklad 4.6.16.** Dokažte rovnost[34]

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

Řešení: Protože $\operatorname{tg}0=0$ a $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ a funkce tangens je na $(0,\frac{\pi}{2})$ rostoucí, každé z čísel

$$a=\operatorname{arctg}\frac{1}{3},\quad b=\operatorname{arctg}\frac{1}{5},\quad c=\operatorname{arctg}\frac{1}{7},\quad d=\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$$

leží v intervalu $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, takže platí

$$0<a+b+c+d<4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi.$$

Proto stačí dokázat rovnost $\operatorname{tg}(a+b+c+d)=1$. Podle součtového vzorce pro tangens postupně dostáváme

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{4}{7},\qquad \operatorname{tg}(c+d)=\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}=\frac{3}{11},$$
$$\operatorname{tg}[(a+b)+(c+d)]=\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}=1.$$

■ **Příklad 4.6.17.** Dokažte rovnost[35]

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

Řešení: Dokazovanou rovnost vynásobíme nenulovým číslem $\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}$:

$$\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right).$$

Jelikož $\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$, platí $\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{4\pi}{7}$. Máme tudíž dokázat rovnost

$$\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}\right).$$

Výraz na pravé straně upravíme s využitím vzorce pro součet sinů a následně vzorce pro sinus dvojnásobného argumentu, až dostaneme výraz na levé straně:

$$\sin\frac{\pi}{7}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7}\cdot2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}.$$

[34] [34], str. 32.
[35] [29], str. 22.

■ **Příklad 4.6.18.** Dokažte rovnost[36]

$$(\operatorname{tg} 67^\circ - 1) \cdot (\operatorname{tg} 68^\circ - 1) = 2.$$

Řešení: Levou stranu rovnosti nejdříve přepíšeme pomocí funkcí sinus a kosinus, následně v úpravách využijeme vztah $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ)$ a konečně od sinů přejdeme ke kosinům:

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} 67^\circ - 1) \cdot (\operatorname{tg} 68^\circ - 1) &= \left(\frac{\sin 67^\circ}{\cos 67^\circ} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sin 68^\circ}{\cos 68^\circ} - 1\right) = \\ &= \left(\frac{\sin 67^\circ - \cos 67^\circ}{\cos 67^\circ}\right) \cdot \left(\frac{\sin 68^\circ - \cos 68^\circ}{\cos 68^\circ}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}\sin 22^\circ}{\cos 67^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}\sin 23^\circ}{\cos 68^\circ} = \\ &= \frac{\sqrt{2}\cos 68^\circ}{\cos 67^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}\cos 67^\circ}{\cos 68^\circ} = 2.\end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.19.** Dokažte rovnost[37]

$$(2\cos 18^\circ - 1) \cdot (2\cos 54^\circ - 1) = \operatorname{tg} 9^\circ.$$

Řešení: Díky vzorci $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, který použijeme pro $x = 9^\circ$ a pro $x = 27^\circ$, přepíšeme dokazovanou rovnost do tvaru

$$(4\cos^2 9^\circ - 3) \cdot (4\cos^2 27^\circ - 3) = \operatorname{tg} 9^\circ$$

a následně při úpravách levé strany rovnosti využijeme vzorec $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ z příkladu 4.6.1 ve tvaru $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos^2 x - 3$, opět s hodnotami $x = 9^\circ$ a $x = 27^\circ$:

$$(4\cos^2 9^\circ - 3) \cdot (4\cos^2 27^\circ - 3) = \frac{\cos 27^\circ}{\cos 9^\circ} \cdot \frac{\cos 81^\circ}{\cos 27^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} = \operatorname{tg} 9^\circ.$$

■ **Příklad 4.6.20.** Dokažte rovnost[38]

$$\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \cos\frac{3\pi}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \cos\frac{9\pi}{7}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Řešení: Vyjdeme ze vzorce $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ dokázaného v příkladu 4.6.1, který po vydělení výrazem $-\cos x$ (za podmínky $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$) ještě dále upravíme do tvaru:

$$-\frac{\cos 3x}{\cos x} = 3 - 4\cos^2 x = 1 - 2(2\cos^2 x - 1) = 1 - 2\cos 2x.$$

Jeho trojím užitím pro přípustné hodnoty $x = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}$ dostaneme

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \cos\frac{3\pi}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \cos\frac{9\pi}{7}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{7}\right) \cdot \left(1 - 2\cos\frac{3\pi}{7}\right) \cdot \left(1 - 2\cos\frac{9\pi}{7}\right) = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{\cos\frac{3\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}} \cdot \frac{\cos\frac{9\pi}{14}}{\cos\frac{3\pi}{14}} \cdot \frac{\cos\frac{27\pi}{14}}{\cos\frac{9\pi}{14}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\cos\frac{27\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{\cos\frac{\pi}{14}} = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

[36] [29], str. 87.
[37] [29], str. 95.
[38] [30], str. 244.

■ **Příklad 4.6.21.** Dokažte rovnost[39]

$$\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} 5^\circ.$$

Řešení: V důkazu použijeme vzorce pro tangens součtu a rozdílu dvou úhlů a identitu pro tangens trojnásobného argumentu, dokázanou v příkladu 4.6.1:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ &= 1 \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + 5^\circ) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - 5^\circ) \cdot \operatorname{tg}(3 \cdot 5^\circ) = \\
&= \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ}{1 + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ} \cdot \frac{3\operatorname{tg} 5^\circ - \operatorname{tg}^3 5^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\
&= \frac{\operatorname{tg}^2 30^\circ - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{3\operatorname{tg} 5^\circ - \operatorname{tg}^3 5^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\
&= \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ (3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \\
&= \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ}{3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 5^\circ (3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \operatorname{tg} 5^\circ.
\end{aligned}$$

■ **Příklad 4.6.22.** Dokažte rovnost[40]

$$27 \sin^3 9^\circ + 9 \sin^3 27^\circ + 3 \sin^3 81^\circ + \sin^3 243^\circ = 20 \sin 9^\circ.$$

Řešení: Použijeme vzorec pro sinus trojnásobného argumentu $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ z příkladu 4.6.1, který přepíšeme do tvaru $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$:

$$\begin{gathered}
27 \sin^3 9^\circ + 9 \sin^3 27^\circ + 3 \sin^3 81^\circ + \sin^3 243^\circ = \\
= 27 \cdot \frac{3 \sin 9^\circ - \sin 27^\circ}{4} + 9 \cdot \frac{3 \sin 27^\circ - \sin 81^\circ}{4} + 3 \cdot \frac{3 \sin 81^\circ - \sin 243^\circ}{4} + \frac{3 \sin 243^\circ - \sin 729^\circ}{4} = \\
= \frac{81 \sin 9^\circ - \sin 729^\circ}{4} = \frac{81 \sin 9^\circ - \sin 9^\circ}{4} = 20 \sin 9^\circ.
\end{gathered}$$

■ **Příklad 4.6.23.** Dokažte rovnost[41]

$$\frac{1}{\operatorname{cotg} 9^\circ - 3 \operatorname{tg} 9^\circ} + \frac{3}{\operatorname{cotg} 27^\circ - 3 \operatorname{tg} 27^\circ} + \frac{9}{\operatorname{cotg} 81^\circ - 3 \operatorname{tg} 81^\circ} + \frac{27}{\operatorname{cotg} 243^\circ - 3 \operatorname{tg} 243^\circ} = 10 \operatorname{tg} 9^\circ.$$

Řešení: Použijeme vzorec pro tangens trojnásobného argumentu $\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}$ z příkladu 4.6.1, který nejdříve vynásobíme třemi a ještě upravíme na rozdíl:

$$3 \cdot \operatorname{tg} 3x = 3 \cdot \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg}^3 x - 9 \operatorname{tg} x}{3 \operatorname{tg}^2 x - 1} = \operatorname{tg} x - \frac{8 \operatorname{tg} x}{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}.$$

Odtud dostaneme identitu

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x} = \frac{3\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x}{8},$$

[39] [40], str. 8.
[40] [30], str. 243.
[41] [30], str. 243.

kterou využijeme na rozhodujícím místě následujících úprav levé strany dokazované rovnosti:

$$\frac{1}{\operatorname{cotg} 9^\circ - 3\operatorname{tg} 9^\circ} + \frac{3}{\operatorname{cotg} 27^\circ - 3\operatorname{tg} 27^\circ} + \frac{9}{\operatorname{cotg} 81^\circ - 3\operatorname{tg} 81^\circ} + \frac{27}{\operatorname{cotg} 243^\circ - 3\operatorname{tg} 243^\circ} =$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} 9^\circ} - 3\operatorname{tg} 9^\circ} + \frac{3}{\frac{1}{\operatorname{tg} 27^\circ} - 3\operatorname{tg} 27^\circ} + \frac{9}{\frac{1}{\operatorname{tg} 81^\circ} - 3\operatorname{tg} 81^\circ} + \frac{27}{\frac{1}{\operatorname{tg} 243^\circ} - 3\operatorname{tg} 243^\circ} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg} 9^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 9^\circ} + \frac{3\operatorname{tg} 27^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 27^\circ} + \frac{9\operatorname{tg} 81^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 81^\circ} + \frac{27\operatorname{tg} 243^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 243^\circ} =$$
$$= \frac{3\operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 9^\circ}{8} + 3 \cdot \frac{3\operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ}{8} + 9 \cdot \frac{3\operatorname{tg} 243^\circ - \operatorname{tg} 81^\circ}{8} + 27 \cdot \frac{3\operatorname{tg} 729^\circ - \operatorname{tg} 243^\circ}{8} =$$
$$= \frac{81\operatorname{tg} 729^\circ - \operatorname{tg} 9^\circ}{8} = \frac{81\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 9^\circ}{8} = 10\operatorname{tg} 9^\circ.$$

■ **Příklad 4.6.24.** Dokažte rovnost[42]

$$\left(1 - \frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1 - \frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\cdots\left(1 - \frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right) = 1.$$

Řešení: V řešení využijeme vzorec pro rozdíl dvou kosinů $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$, rovnost $2\sin 30^\circ = 1$ a identitu $\sin x = \cos(90^\circ - x)$ pro hodnoty $x = 31^\circ, 32^\circ, \ldots, 89^\circ$:

$$\left(1 - \frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1 - \frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\cdots\left(1 - \frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right) =$$
$$= \frac{\cos 1^\circ - \cos 61^\circ}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{\cos 2^\circ - \cos 62^\circ}{\cos 2^\circ} \cdots \frac{\cos 59^\circ - \cos 119^\circ}{\cos 59^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin 31^\circ \sin 30^\circ}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{2\sin 32^\circ \sin 30^\circ}{\cos 2^\circ} \cdots \frac{2\sin 89^\circ \sin 30^\circ}{\cos 59^\circ} =$$
$$= \frac{\cos(90^\circ - 31^\circ)}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{\cos(90^\circ - 32^\circ)}{\cos 2^\circ} \cdots \frac{\cos(90^\circ - 89^\circ)}{\cos 59^\circ} = \frac{\cos 59^\circ \cos 58^\circ \cdots \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ \cdots \cos 59^\circ} = 1.$$

■ **Příklad 4.6.25.** Dokažte rovnost[43]

$$(\operatorname{tg} 89^\circ - 1)(\operatorname{tg} 88^\circ - 1)\cdots(\operatorname{tg} 46^\circ - 1) = 2^{22}.$$

Řešení: Po úpravě každého činitele na jeden zlomek použijeme pro rozdíly v čitatelích zřejmou identitu $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ)$ a pak od hodnot kosinu přejdeme k hodnotám sinu:

$$(\operatorname{tg} 89^\circ - 1)(\operatorname{tg} 88^\circ - 1)\cdots(\operatorname{tg} 46^\circ - 1) =$$
$$= \frac{\sin 89^\circ - \cos 89^\circ}{\cos 89^\circ} \cdot \frac{\sin 88^\circ - \cos 88^\circ}{\cos 88^\circ} \cdots \frac{\sin 46^\circ - \cos 46^\circ}{\cos 46^\circ} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sin(89^\circ - 45^\circ)}{\cos 89^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}\sin(88^\circ - 45^\circ)}{\cos 88^\circ} \cdots \frac{\sqrt{2}\sin(46^\circ - 45^\circ)}{\cos 46^\circ} =$$
$$= \left(\sqrt{2}\right)^{44} \cdot \frac{\sin 44^\circ \sin 43^\circ \cdots \sin 1^\circ}{\cos 89^\circ \cos 88^\circ \cdots \cos 46^\circ} = 2^{22} \cdot \frac{\sin 44^\circ \sin 43^\circ \cdots \sin 1^\circ}{\sin(90^\circ - 89^\circ)\sin(90^\circ - 88^\circ)\cdots\sin(90^\circ - 46^\circ)} = 2^{22}.$$

■ **Příklad 4.6.26.** Dokažte rovnost[44]

$$(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 1^\circ)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2^\circ)\cdots(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 29^\circ) = 2^{29}.$$

[42] [30], str. 244.
[43] [30], str. 244.
[44] [30], str. 244.

Řešení: Při úpravě levé strany nejprve čísla $\sqrt{3}$ nahradíme $\operatorname{tg} 60^\circ$, pak použijeme vzorec pro sinus součtu, rovnost $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ a nakonec hodnoty sinu zaměníme hodnotami kosinu:

$$
\begin{gathered}
(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 1^\circ)(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdots (\sqrt{3} + \operatorname{tg} 29^\circ) = \\
= (\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 1^\circ)(\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdots (\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 29^\circ) = \\
= \left(\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}\right) \cdots \left(\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + \frac{\sin 29^\circ}{\cos 29^\circ}\right) = \\
= \frac{\sin(60^\circ + 1^\circ)}{\cos 60^\circ \cos 1^\circ} \cdot \frac{\sin(60^\circ + 2^\circ)}{\cos 60^\circ \cos 2^\circ} \cdots \frac{\sin(60^\circ + 29^\circ)}{\cos 60^\circ \cos 29^\circ} = 2 \cdot \frac{\sin 61^\circ}{\cos 1^\circ} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 62^\circ}{\cos 2^\circ} \cdots 2 \cdot \frac{\sin 89^\circ}{\cos 29^\circ} = \\
= 2^{29} \cdot \frac{\cos 29^\circ \cos 28^\circ \cdots \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ \cdots \cos 29^\circ} = 2^{29}.
\end{gathered}
$$

■ **Příklad 4.6.27.** Dokažte rovnost[45]

$$
\frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ} = \frac{1}{\sin 1^\circ}.
$$

Řešení: Po vynásobení obou stran dokazované rovnosti nenulovým číslem $\sin 1^\circ$ přejdeme k úkolu dokázat, že součet

$$
S = \frac{\sin 1^\circ}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \cdots + \frac{\sin 1^\circ}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ}
$$

má hodnotu rovnou 1. K úpravě každého zlomku použijeme identitu

$$
\frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\sin x \sin y} = \frac{\sin x \cos y}{\sin x \sin y} - \frac{\cos x \sin y}{\sin x \sin y} = \operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x
$$

a v získaném součtu změníme pořadí členů

$$
\begin{gathered}
S = (\operatorname{cotg} 45^\circ - \operatorname{cotg} 46^\circ) + (\operatorname{cotg} 47^\circ - \operatorname{cotg} 48^\circ) + \cdots + (\operatorname{cotg} 133^\circ - \operatorname{cotg} 134^\circ) = \\
= \operatorname{cotg} 45^\circ - (\operatorname{cotg} 46^\circ + \operatorname{cotg} 134^\circ) + (\operatorname{cotg} 47^\circ + \operatorname{cotg} 133^\circ) - \cdots \\
-(\operatorname{cotg} 88^\circ + \operatorname{cotg} 92^\circ) + (\operatorname{cotg} 89^\circ + \operatorname{cotg} 91^\circ) - \operatorname{cotg} 90^\circ.
\end{gathered}
$$

Protože každá ze závorek je podle identity $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}(\pi - x) = 0$ rovná nule, celý součet má hodnotu $S = \operatorname{cotg} 45^\circ - \operatorname{cotg} 90^\circ = 1 - 0 = 1$ a důkaz je hotov.

■ **Příklad 4.6.28.** Dokažte rovnosti[46]

$$
\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = \sin 70^\circ, \tag{4.46}
$$

$$
\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}, \tag{4.47}
$$

$$
\frac{1}{\sin 10^\circ} + \frac{1}{\sin 50^\circ} = \frac{1}{\sin 70^\circ} + 6. \tag{4.48}
$$

Řešení: Je vhodné si uvědomit, že platí $\sin(3 \cdot 10^\circ) = \sin(3 \cdot 50^\circ) = -\sin(3 \cdot 70^\circ) = \frac{1}{2}$. Využijeme vzorec pro sinus trojnásobného argumentu $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ (příklad 4.6.1) ve tvaru $\sin^3 x - \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x = 0$. Pro hodnotu $\sin 3x = \frac{1}{2}$ tak podle první věty řešení dostáváme, že reálná čísla $\sin 10^\circ, \sin 50^\circ, -\sin 70^\circ$ jsou kořeny kubické rovnice

$$
t^3 - \frac{3}{4} t + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0.
$$

[45] [30], str. 243.
[46] [40], str. 11–12.

Podle Viètových vztahů pro kořeny kubické rovnice platí

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0, \tag{4.49}$$

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ - \sin 50^\circ \sin 70^\circ - \sin 70^\circ \sin 10^\circ = -\frac{3}{4}, \tag{4.50}$$

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}. \tag{4.51}$$

Ze vztahů (4.49) a (4.51) ihned plynou rovnosti (4.46) a (4.47). Vztah (4.50) upravíme na ekvivalentní tvar

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} + \frac{1}{\sin 50^\circ} = \frac{1}{\sin 70^\circ} + \frac{3}{4 \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ}$$

a dosadíme sem z (4.51), čímž získáme i třetí dokazovanou rovnost (4.48).

4.7 Příklady

Poznatky o goniometrických funkcích v oboru reálných čísel, kterými jsme se podrobně v této kapitole zabývali, nyní uplatníme při řešení rozmanitých příkladů, které ilustrují metody, jakými s těmito funkcemi pracujeme. Vybrané příklady nejsou rutinní a vyžadují od řešitelů často nemalé úsilí při hledání způsobu, jakým danou situaci „uchopit“, zejména jak se pustit do úprav sestavených výrazů pomocí vhodně zvolených goniometrických vzorců, když zpočátku není příliš vidět ke kýženému cíli.

Úvodní příklad se liší od všech následujících tím, že má formu výkladu o důležitých funkcích, které nacházejí uplatnění jak v mnoha vědních i technických oborech, tak třeba i v současné sociologii, biologii a lékařství, všude tam, kde popisujeme periodické procesy, jako jsou nejrůznější vlnové jevy (např. světlo, zvuk či pohyb mořské hladiny), ekonomické, klimatologické a biologicko-populační cykly, biorytmy v tělech organismů apod.

■ **Příklad 4.7.1.** Každou periodickou závislost mezi dvěma skalárními veličinami y a x, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$y = A \sin(Bx + C) + D, \tag{4.52}$$

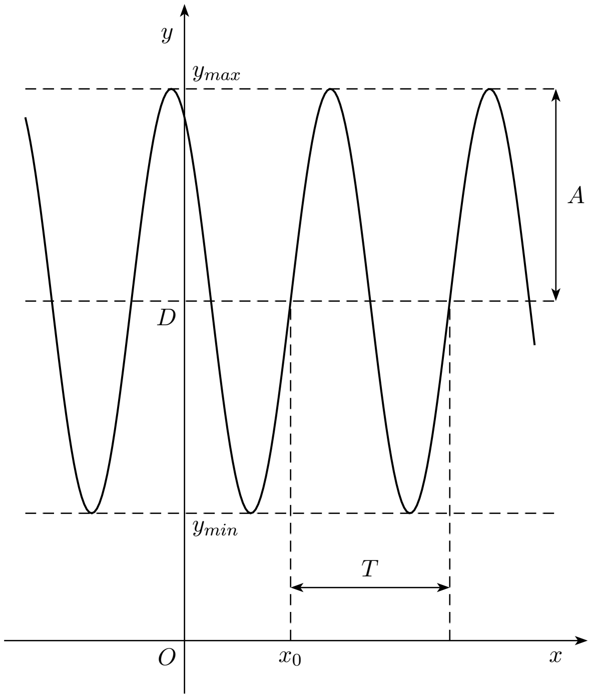
kde $A > 0, B > 0$ a C, D jsou reálná čísla, nazýváme *sinusoidální* funkcí $y = f(x)$. Parametr B určuje nejmenší periodu[47] T takové funkce f, jež je zřejmě dána vzorcem $T = \frac{2\pi}{B}$. Značí-li y_{min} a y_{max} nejmenší, resp. největší hodnotu dané funkce f na intervalu délky T, pak z rovností $y_{min} = -A + D$ a $y_{max} = A + D$ vyplývá, že parametry A, D zvané po řadě *amplituda* a *střední hodnota* funkce f jsou určeny vzorci

$$A = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} \qquad \text{a} \qquad D = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}.$$

Zbývající parametr C ve vyjádření (4.52) je určen až na aditivní konstantu $2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Upřesníme ho, když úpravou argumentu sinu přepíšeme formuli (4.52) do tvaru

$$y = A \sin \frac{2\pi(x - x_0)}{T} + D \tag{4.53}$$

a pro nový parametr x_0 zvaný *fázový posun* funkce f stanovíme podmínku $0 \le x_0 < T$. Výhoda zápisu (4.53) spočívá v tom, že v něm zastoupené parametry T, A, D, x_0 jsou dobře patrné na grafu takové sinusoidální funkce f, kterým je tzv. sinusoidální křivka (obr. 4.24). Dostaneme ji ze (základní) sinusoidy $y = \sin x$ roztaženími či smrštěními ve směru os x a y s koeficienty $\frac{2\pi}{T}$, resp. A



Obrázek 4.24: Sinusoidální funkce $y = A \sin \frac{2\pi(x-x_0)}{T} + D$

a následnými posunutími ve směru os x a y o hodnoty x_0, resp. D.

Zdůrazněme, že sinusiodální funkce mohou být zadány předpisy, které se tvarově od vzorců (4.52) či (4.53) odlišují, přesto však popisují stejnou závislost, což obvykle ověříme užitím vhodných goniometrických identit. Čtyři příklady takových úprav sinusoidálních funkcí na „kanonický“ tvar (4.52) teď uvedeme:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\
y_2 &= \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}, \\
y_3 &= \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}, \\
y_4 &= \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.
\end{aligned}
$$

Pokud chceme získat kanonický tvar pro sinusoidální funkce zadané předpisem (4.52), ve kterém

[47] Dále už namísto „nejmenší perioda“ budeme stručně psát „perioda“.

jsou jeden či oba parametry A, B záporné, postupujeme např. takto:

$$\begin{aligned}
y_5 &= -2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{5}\right) = 2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{5} - \pi\right) = 2\sin\left(3x - \frac{2\pi}{5}\right),\\
y_6 &= 2\sin\left(-3x + \frac{3\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\pi - \left(-3x + \frac{3\pi}{5}\right)\right) = 2\sin\left(3x + \frac{2\pi}{5}\right),\\
y_7 &= -2\sin\left(-3x - \frac{3\pi}{5}\right) = 2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{5}\right).
\end{aligned}$$

Ještě jedno vyjádření zkoumaných funkcí je významné: ukažme, že *každou sinusoidální funkci* $y = f(x)$ *s periodou* $T > 0$ *a střední hodnotou* D *lze zapsat ve tvaru*

$$y = a\cos\frac{2\pi x}{T} + b\sin\frac{2\pi x}{T} + D, \tag{4.54}$$

kde a, b *jsou vhodná reálná čísla, a že naopak pro libovolná čísla* a, b *za podmínky* $(a, b) \neq (0, 0)$ *určuje předpis* (4.54) *sinusoidální funkci* $y = f(x)$ *s periodou* T *a střední hodnotou* D. Skutečně, podle vzorce pro sinus rozdílu platí

$$A\sin\frac{2\pi(x - x_0)}{T} = A\sin\frac{2\pi x}{T}\cos\frac{2\pi x_0}{T} - A\cos\frac{2\pi x}{T}\sin\frac{2\pi x_0}{T},$$

takže předpisy (4.53) a (4.54) zadávají stejnou funkci $y = f(x)$, je-li splněna dvojice rovností

$$a = -A\sin\frac{2\pi x_0}{T} \qquad \text{a} \qquad b = A\cos\frac{2\pi x_0}{t}. \tag{4.55}$$

Tím je první část tvrzení dokázána, zbývá ověřit, že v případě $(a, b) \neq (0, 0)$ jsou poslední dvě rovnosti splněny pro vhodná čísla $A > 0$ a $x_0 \in \langle 0, T)$.[48] Je zřejmé, že amplituda A je ze soustavy (4.55) určena vzorcem $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ a vyhovující fázový posun x_0 dvojicí rovností

$$\cos\frac{2\pi x_0}{T} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{a} \qquad \sin\frac{2\pi x_0}{T} = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(hodnoty na pravých stranách jsou skutečně souřadnicemi některého bodu na jednotkové kružnici).

Z dokázané možnosti zapisovat zkoumané funkce předpisy (4.54) vyplývá, že *součet dvou sinusoidálních funkcí se stejnou periodou* T *je buď opět sinusoidální funkce s periodou* T, *nebo funkce, která je konstantní*. Od tohoto poměrně jednoduchého poznatku je ještě hodně daleko ke geniální myšlence, se kterou přišel r. 1822 francouzský matematik Joseph Fourier, když navrhl *vyjadřovat jakékoliv periodické funkce, řekněme s periodou* T, *jako součty vhodně volených sinusoidálních funkcí s periodami* $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots$ O této konstrukci pro limitní případ, kdy počet sčítaných funkcí roste do nekonečna, dokázal sám Fourier důležité výsledky a položil tak základy obsáhlé teorie *Fourierových řad*, významného odvětví matematické analýzy, v němž goniometrické funkce nalezly nepochybně svého největšího uplatnění nad rámec elementární matematiky. ■

V další čtveřici příkladů vyřešíme několik úloh o rovinných trojúhelnících. Vrátíme se tak k tématu kapitoly 3, v níž jsme byli ve výběru nestandartních příkladů dosti omezeni, protože nám pro mnohé výpočty chyběl bohatší aparát goniometrických vzorců. K soustavnějšímu výkladu některých trigonometrických výsledků se ještě vrátíme v kapitole 5.

[48] Podobnou otázku jsme posuzovali už dříve v podkapitole 4.4 při výkladu druhé metody řešení goniometrické rovnice $a\cos x + b\sin x = c$, jejíž levou stranu jsme vlastně převáděli na kanonický tvar (4.52) sinusoidální funkce.

■ **Příklad 4.7.2.** Určete všechny trojúhelníky ABC, jejichž vnitřní úhly splňují rovnost[49]

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1.$$

Řešení: Ze zřejmých nerovností $\sin\gamma \le 1$, $\sin\alpha\sin\beta \ge 0$ a zadané rovnosti plyne

$$1 \ge \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 1 + \sin\alpha\sin\beta(1-\sin\gamma) \ge 1.$$

Tudíž $\cos(\alpha-\beta) = 1$ a $\sin\gamma = 1$, odkud plyne $\gamma = 90°$ a $\alpha = \beta = 45°$. Pro takové vnitřní úhly je zadaná rovnost splněna jako $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Hledané trojúhelníky ABC, pro které platí zadaná rovnost, jsou tedy pravoúhlé rovnoramenné s hlavním vrcholem C.

■ **Příklad 4.7.3.** Dokažte, že trojúhelník ABC je rovnoramenný, právě když platí[50]

$$a\cos\beta + b\cos\gamma + c\cos\alpha = \frac{a+b+c}{2}.$$

Řešení: Díky rozšířené sinové větě $a = 2r\sin\alpha, b = 2r\sin\beta$ a $c = 2r\sin\gamma$, kde r je poloměr kružnice opsané, je zkoumaná rovnost ekvivalentní s rovností

$$2\sin\alpha\cos\beta + 2\sin\beta\cos\gamma + 2\sin\gamma\cos\alpha = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma,$$

která se dá ještě přepsat na tvar

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) + \sin(\gamma-\alpha) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Jelikož $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, platí $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$, $\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha$ a $\sin(\gamma+\alpha) = \sin\beta$. Tudíž upravenou rovnost lze zjednodušit do podoby

$$\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) = 0,$$

a následně, po uplatnění výsledku z příkladu 4.6.9 o rozkladu součtu $\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)$, na součinový tvar

$$4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2} = 0.$$

Součin je roven nule právě tehdy, když jeden z činitelů se rovná nule. Zkoumaná rovnost je tedy ekvivalentní podmínce, že platí $\alpha = \beta$ nebo $\beta = \gamma$ nebo $\gamma = \alpha$, čímž je důkaz hotov.

■ **Příklad 4.7.4.** Pro libovolný trojúhelník ABC dokažte nerovnosti[51]

$$\sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{a}{b+c}, \qquad \sin\frac{\beta}{2} \le \frac{b}{a+c}, \qquad \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{c}{a+b}.$$

Řešení: S ohledem na symetrii stačí dokázat jen např. první nerovnost. Použijeme opět rozšířenou sinovou větu a následně vzorec pro dvojnásobný argument (v čitateli) a vzorec pro součet dvou sinů (ve jmenovateli):

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Poslední úpravu jsme provedli na základě toho, že funkce sinus má svoji kofunkci kosinus a že hodnoty $\frac{\alpha}{2}$ a $\frac{\beta+\gamma}{2}$ se doplňují do $90°$. Jelikož $0 \le |\beta-\gamma| < 180°$, platí $0 < \cos\frac{\beta-\gamma}{2} \le 1$. Tudíž

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \ge \sin\frac{\alpha}{2}$$

a důkaz je hotov. Zároveň jsme zjistili, že v první nerovnosti nastane rovnost, právě když $\beta = \gamma$.

[49] [32], str. 20.
[50] [29], str. 112.
[51] [29], str. 66.

■ **Příklad 4.7.5.** Dokažte, že pro libovolný trojúhelník ABC platí

$$\alpha = 2\beta \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc \qquad \text{a} \qquad \alpha = 3\beta \Rightarrow (a^2 - b^2)(a - b) = bc^2.$$

Rozhodněte rovněž, zda obecně platí i implikace opačná k druhé implikaci.[52]
Řešení:

$\boxed{\alpha = 2\beta \Leftrightarrow a^2 = b^2 + bc}$

Je-li $\alpha = 2\beta$, je $\gamma = \pi - 3\beta$, takže podle rozšířené sinové věty platí

$$a = 2r \sin 2\beta, b = 2r \sin \beta, c = 2r \sin 3\beta,$$

kde r je poloměr kružnice opsané. K důkazu rovnosti $a^2 = b^2 + bc$ proto stačí ověřit identitu

$$\sin^2 2\beta = \sin^2 \beta + \sin \beta \sin 3\beta.$$

Její pravá strana je podle známých goniometrických vzorců rovna

$$\sin \beta(\sin \beta + \sin 3\beta) = \sin \beta \cdot 2 \sin 2\beta \cos \beta = \sin^2 2\beta,$$

takže se skutečně rovná levé straně.

Předpokládejme nyní, že naopak platí $a^2 = b^2 + bc$. Porovnáním s rovností z kosinové věty

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

dostaneme

$$\begin{aligned} b^2 + bc &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ bc(1 + 2 \cos \alpha) &= c^2, \\ b(1 + 2 \cos \alpha) &= c. \end{aligned}$$

Dosaďme sem $b = 2r \sin \beta, c = 2r \sin \gamma = 2r \sin(\alpha + \beta)$ a postupně upravujme:

$$\begin{aligned} 2r \sin \beta(1 + 2 \cos \alpha) &= 2r \sin(\alpha + \beta), \\ \sin \beta + 2 \sin \beta \cos \alpha &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin \beta &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \\ \sin \beta &= \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Odtud plyne $\alpha - \beta > 0$, takže oba úhly $\beta, \alpha - \beta$ leží v intervalu $(0, \pi)$. Jak víme, odvozená rovnost jejich sinů je tehdy možná, jen když buď $\beta = \alpha - \beta$ nebo $\beta + (\alpha - \beta) = \pi$. Druhá možnost ($\alpha = \pi$) je však vyloučena, takže platí $\beta = \alpha - \beta$ neboli $\alpha = 2\beta$, jak jsme chtěli dokázat.

$\boxed{\alpha = 3\beta \Rightarrow (a^2 - b^2)(a - b) = bc^2}$

Je-li $\alpha = 3\beta$, je $\gamma = \pi - 4\beta$, takže podle rozšířené sinové věty platí

$$a = 2r \sin 3\beta, b = 2r \sin \beta, c = 2r \sin 4\beta, \tag{4.56}$$

[52] 22. ročník MO (1972/1973), úloha A–P–3, a 46. ročník MO (1996/1997), úloha A–III–1.

kde r je poloměr kružnice opsané. Proto k důkazu implikace stačí ověřit identitu

$$(\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) = \sin \beta \sin^2 4\beta. \tag{4.57}$$

Podle známých goniometrických vzorců platí

$$\begin{aligned}(\sin 3\beta - \sin \beta)^2 &= (2 \cos 2\beta \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta,\\ \sin 3\beta + \sin \beta &= 2 \sin 2\beta \cos \beta\end{aligned}$$

a odtud pro levou stranu rovnosti (4.57) plyne

$$\begin{aligned}(\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) &= (4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos \beta) =\\ &= (2 \sin \beta \cos \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos 2\beta) \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta =\\ &= \sin 2\beta \cdot \sin 4\beta \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta = \sin \beta \sin^2 4\beta.\end{aligned}$$

Tak jsme dokázali, že (4.57) platí pro každé β.

Vysvětlíme nyní, proč opačná implikace neplatí. Funkce sinus má periodu 360°, takže strany trojúhelníku ABC jsou tvaru (4.56) i v případě, kdy platí $\alpha = 3\beta - 360°$ (a $\gamma = 540° - 4\beta$), např. pokud $\alpha = 15°, \beta = 125°$ a $\gamma = 40°$. Pro trojúhelník s takovými vnitřními úhly platí (jak jsme dokázali) rovnost $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$, přestože $\alpha \neq 3\beta$. ■

V další skupině úloh se vrátíme k problematice podkapitoly 4.4 věnované řešení goniometrických rovnic a jejich soustav. Standardní příklady k procvičování této dovednosti lze nalézt v četných učebnicích a sbírkách pro střední školy, které naše práce nechce suplovat. Proto se omezíme jen na několik příkladů obtížnějších rovnic, ve kterých budou často zastoupeny i parametry. Budeme přitom zkoumat otázky řešitelnosti a z tvaru zadaných rovnic odvozovat vlastnosti jejich řešení, aniž je vyjádříme v explicitním tvaru.

V prvním příkladu však přece jen uvedeme ukázky toho postupu, kterým goniometrické rovnice řešíme – od výchozích složitějších rovnic přecházíme k rovnicím jednodušším, až nakonec dospějeme k těm, které jsme v podkapitole 4.4 nazvali *základními.*

■ **Příklad 4.7.6.** Každou z jednotlivých rovnic

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = p$,
b) $\sin x \sin(a - x) = p$,
c) $\sin(x + 3a) = 3 \sin(a - x)$,
d) $\sin(x + a) + \sin a \sin x \operatorname{tg}(x + a) = p \cos a \cos x$ (kde $\cos a \neq 0$)

s neznámou x a parametry $a, p \in \mathbb{R}$ převeďte na základní rovnici pro vhodnou goniometrickou funkci s vhodným argumentem.[53]

Řešení: a) Umocníme na druhou základní vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a z výsledku vyjádříme levou stranu zadané rovnice:

$$\begin{aligned}(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 &= 1^2,\\ \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x &= 1,\\ \sin^4 x + \cos^4 x &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.\end{aligned}$$

[53][34], str. 43.

Nyní již upravíme na základní rovnici:

$$\begin{aligned}1-2\sin^2 x\cos^2 x &= p,\\ 4\sin^2 x\cos^2 x &= 2-2p,\\ \sin^2 2x &= 2(1-p),\\ \sin 2x &= \pm\sqrt{2(1-p)}.\end{aligned}$$

S přihlédnutím k oboru hodnot funkce sinus má podmínka řešitelnosti tvar $\frac{1}{2}\leq p\leq 1$.

b) Pomocí vzorce pro převod součinu dvou sinů na součet upravíme levou stranu zadané rovnice

$$\sin x\sin(a-x)=\frac{\cos(2x-a)-\cos a}{2}$$

a nyní již převedeme na požadovanou základní rovnici:

$$\begin{aligned}\cos(2x-a)-\cos a &= 2p,\\ \cos(2x-a) &= 2p+\cos a.\end{aligned}$$

Podmínka řešitelnosti je $-1\leq 2p+\cos a\leq 1$.

c) Použijeme součtové a rozdílové vzorce pro přepis levé i pravé strany zadané rovnice a následně vzorce pro $\cos 3a$ a $\sin 3a$ z př. 4.6.1:

$$\begin{aligned}\sin x\cos 3a+\cos x\sin 3a &= 3(\sin a\cos x-\cos a\sin x),\\ \sin x(4\cos^3 a-3\cos a)+\cos x(3\sin a-4\sin^3 a) &= 3\sin a\cos x-3\cos a\sin x,\\ 4\sin x\cos^3 a-4\cos x\sin^3 a &= 0,\\ \cos a=0\Rightarrow\cos x=0,\ \cos a\neq 0 &\Rightarrow \operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3 a.\end{aligned}$$

d) Z levé strany zadané rovnice nejdříve vytkneme výraz $\operatorname{tg}(x+a)$ a následně použijeme součtový vzorec pro funkci kosinus:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x+a)\cdot(\cos(x+a)+\sin a\sin x) &= p\cos a\cos x,\\ \operatorname{tg}(x+a)\cdot(\cos x\cos a-\sin x\sin a+\sin a\sin x) &= p\cos a\cos x,\\ \cos x\cos a\cdot(\operatorname{tg}(x+a)-p) &= 0.\end{aligned}$$

Jelikož podle zadání platí $\cos a\neq 0$, je množina řešení původní rovnice sjednocením množin řešení základních rovnic

$$\cos x=0 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}(x+a)=p.$$

■ **Příklad 4.7.7.** Dokažte, že goniometrická rovnice

$$\sin(\cos x)=\cos(\sin x)$$

nemá v oboru reálných čísel žádné řešení.[54]
Řešení: Protože obě funkce $\sin(\cos x)$ a $\cos(\sin x)$ mají periodu 2π, stačí ukázat, že se nikde nerovnají

[54] [30], str. 234.

na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. A protože jde o dvě funkce sudé, můžeme interval $\langle -\pi, \pi\rangle$ zúžit na interval $\langle 0, \pi\rangle$. Připusťme tedy, že pro některé $x \in \langle 0, \pi\rangle$ platí rovnost

$$\sin(\cos x) = \cos(\sin x).$$

Pro takové x ovšem $0 \le \sin x \le 1 < \frac{\pi}{2}$, takže $\cos(\sin x) > 0$. Z nerovnosti $\sin(\cos x) > 0$ pak s ohledem na $-\frac{\pi}{2} < -1 \le \cos x \le 1 < \frac{\pi}{2}$ plyne $\cos x > 0$. Rovnost $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$ je proto rovností sinu a kosinu dvou argumentů $\cos x, \sin x$ z intervalu $(0, 1)$, a tedy i intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Jak víme, taková rovnost je splněna, právě když součet obou argumentů z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je roven $\frac{\pi}{2}$, v našem případě

$$\cos x + \sin x = \frac{\pi}{2}.$$

Tato rovnost však nemůže nastat pro žádný úhel x, jelikož obor hodnot funkce

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x)$$

je interval $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$, zatímco $\frac{\pi}{2} > \sqrt{2}$.

■ **Příklad 4.7.8.** Má-li rovnice

$$p_1 \cos(x + a_1) + p_2 \cos(x + a_2) + \cdots + p_n \cos(x + a_n) = 0$$

s reálnými parametry p_i, a_i taková dvě řešení x_1 a x_2, že číslo $\frac{x_2 - x_1}{\pi}$ není celé, pak jejím řešením je každé reálné číslo x. Dokažte a uveďte příklad takové rovnice s libovolným řešením pro $n = 2$ a kladná p_1, p_2.[55]
Řešení: Pro dané parametry p_i, a_i definujme výrazy

$$\begin{aligned} c(x) &= p_1 \cos(x + a_1) + p_2 \cos(x + a_2) + \cdots + p_n \cos(x + a_n) = 0, \\ s(x) &= p_1 \sin(x + a_1) + p_2 \sin(x + a_2) + \cdots + p_n \sin(x + a_n) = 0. \end{aligned}$$

Všimněme si, že z rovností

$$\cos(y + a_i) = \cos(y - x)\cos(x + a_i) - \sin(y - x)\sin(x + a_i)$$

vyplývá, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$c(y) = \cos(y - x)c(x) - \sin(y - x)s(x). \tag{4.58}$$

Ve shodě se zadáním úlohy předpokládejme, že pro některá čísla x_1, x_2 platí $c(x_1) = c(x_2)$ a přitom $x_2 = x_1 + \pi \cdot r$, kde $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Z rovnosti (4.58) pro $x = x_1$ a $y = x_2$ vychází

$$0 = \cos \pi r \cdot 0 - \sin \pi r \cdot s(x_1) \text{ neboli } \sin \pi r \cdot s(x_1) = 0.$$

Protože však $\sin \pi r \neq 0$, musí platit $s(x_1) = 0$. Z rovnosti (4.58) pro $x = x_1$ pak pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ máme

$$c(y) = \cos(y - x) \cdot 0 - \sin(y - x_1) \cdot 0 = 0,$$

takže řešením zadané rovnice je skutečně každé reálné číslo.
Žádaným příkladem pro $n = 2$ je rovnice

$$\cos x + \cos(x + \pi) = 0,$$

jejímž řešením je skutečně každé $x \in \mathbb{R}$, neboť číslo π je antiperioda funkce kosinus.

[55] [34], str. 21.

■ **Příklad 4.7.9.** Předpokládejme, že rovnice

$$a\cos x + b\sin x = c$$

s parametry $a, b, c \in \mathbb{R}$, kde $a^2 + b^2 > 0$, má v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ dvě různá řešení x_1, x_2. Dokažte rovnost[56]

$$\cos^2 \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

Řešení: Danou rovnici $a\cos x + b\sin x = c$ upravíme goniometrickou metodou popsanou v podkapitole 4.4 do tvaru $K\sin(x + \varphi) = c$, kde $K = \sqrt{a^2 + b^2}$ a φ je vhodný úhel (jeho hodnotu nebudeme potřebovat). Podle zadání pro dvě různá čísla $x_1, x_2 \in \langle 0, 2\pi)$ platí

$$K\sin(x_1 + \varphi) = c \qquad \text{a} \qquad K\sin(x_2 + \varphi) = c. \tag{4.59}$$

Odečtením rovnic (4.59) s ohledem na $K \neq 0$ dostaneme

$$0 = \sin(x_1 + \varphi) - \sin(x_2 + \varphi) = 2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2 + 2\varphi}{2}. \tag{4.60}$$

Z nerovností $0 \le x_1, x_2 < 2\pi$ plyne $-\pi < \frac{x_1 - x_2}{2} < \pi$, odkud díky předpokladu $x_1 \neq x_2$ máme $\sin\frac{x_1 - x_2}{2} \neq 0$, takže rovnost (4.60) znamená

$$\cos\frac{x_1 + x_2 + 2\varphi}{2} = 0, \text{ a proto } \sin\frac{x_1 + x_2 + 2\varphi}{2} = \pm 1.$$

Dosadíme-li poslední hodnotu do výsledku sečtení rovností (4.59), který lze upravit do tvaru

$$2K\sin\frac{x_1 + x_2 + 2\varphi}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2} = 2c,$$

dostaneme

$$\pm 2K\cos\frac{x_1 - x_2}{2} = 2c, \text{ odkud } \cos^2\frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{c^2}{K^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2},$$

což je rovnost, kterou jsme měli dokázat.

Poznámka: K řešení předchozí úlohy lze využít i algebraickou metodu řešení goniometrické rovnice $a\cos x + b\sin x = c$, kterou jsme v podkapitole 4.4 ilustrovali obrázkem 4.17. Získáme tak dokonce obsažnější výsledek, totiž dvojici rovností

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2} = \frac{ac}{a^2 + b^2} \qquad \text{a} \qquad \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \frac{bc}{a^2 + b^2}, \tag{4.61}$$

ze kterých po umocnění na druhou, sečtení, užití dvou goniometrických jedniček a aplikací vzorce pro $\cos(x_1 - x_2)$ totiž vyplývá

$$\frac{1}{2} + \cos(x_1 - x_2) = \frac{c^2}{a^2 + b^2},$$

což je původní dokazovaná rovnost, neboť odvozená levá strana je zřejmě rovna $\cos^2\frac{x_1 - x_2}{2}$. K důkazu rovností (4.61) si povšimněme, že jejich levé strany jsou souřadnice středu úsečky s krajními body $[\cos x_1, \sin x_1]$ a $[\cos x_2, \sin x_2]$, jež jsou průsečíky přímky p s jednotkovou kružnicí k vyznačenými

[56] [34], str. 51.

na obr. 4.17. Proto stačí ověřit, že kolmý průmět počátku $[0,0]$ na přímku o rovnici $ax + by = c$ má souřadnice uvedené v pravých stranách rovností (4.61). To je triviální poznatek analytické geometrie, neboť zřejmá rovnost

$$a \cdot \frac{ac}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{bc}{a^2+b^2} = c$$

ukazuje, že bod s takovými souřadnicemi na dané přímce leží, a polohový vektor $\left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right)$ tohoto bodu je zřejmě rovnoběžný s normálovým vektorem (a,b) dané přímky $ax+by=c$.

■ **Příklad 4.7.10.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$. Dokažte, že soustava rovnic

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1, \qquad a\cos^2 y + b\sin^2 y = 1, \qquad a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y \tag{4.62}$$

s neznámými x, y a parametry a, b má v oboru $\mathbb{R}$ řešení, právě když platí $a + b = 2ab > 0$ (což znamená, že obě čísla a, b jsou kladná, jedno z intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$, druhé z intervalu $(1, \infty)$).[57]

Řešení: • V první části předpokládejme, že vypsaná soustava má řešení, kterou je dvojice (x, y). Ze třetí rovnice soustavy pak plyne $\cos x \neq 0$ a $\cos y \neq 0$ (jinak by hodnoty $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$ neměly smysl). První dvě rovnice soustavy pak po vydělení $\cos^2 x$, resp. $\cos^2 y$ a užití rovností

$$\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} = \operatorname{tg}^2 t + 1$$

pro $t = x$ a $t = y$ můžeme přepsat do podoby

$$(a-1)\operatorname{tg}^2 x = 1 - b \qquad \text{a} \qquad (b-1)\operatorname{tg}^2 y = 1 - a.$$

Odtud plyne $a = 1 \Leftrightarrow b = 1$. Protože však $a \neq b$ podle zadání úlohy, jsou $a-1, b-1$ nenulová čísla různých znamének, neboť nenulová čísla $\operatorname{tg}^2 x, \operatorname{tg}^2 y$ jsou kladná. Hodnoty $\operatorname{tg}^2 x, \operatorname{tg}^2 y$ jsou tedy dvě navzájem převrácená kladná čísla určená takto:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y} = -\frac{b-1}{a-1}. \tag{4.63}$$

Z třetí rovnice (4.62) nyní (díky nenulovosti čísel $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$) plyne $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$, takže s ohledem na $a \neq b$ jsou i obě čísla a, b nenulová a platí

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 y} = \left(\frac{b-1}{a-1}\right)^2,$$

kam jsme za $\operatorname{tg}^2 x, \operatorname{tg}^2 y$ dosadili z (4.63). Platí tedy některá z možností

$$\frac{b}{a} = \frac{b-1}{a-1} < 0 \qquad \text{nebo} \qquad \frac{b}{a} = -\frac{b-1}{a-1} > 0. \tag{4.64}$$

Díky implikacím

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} = \frac{b-1}{a-1} &\Rightarrow b(a-1) = a(b-1) \Rightarrow a = b, \\ \frac{b}{a} = -\frac{b-1}{a-1} &\Rightarrow b(a-1) = a(1-b) \Rightarrow a + b = 2ab \end{aligned} \tag{4.65}$$

a předpokladu $a \neq b$ musí nastat druhá možnost v (4.64), z níž tedy plyne kýžená rovnost $a + b = 2ab$. Protože hodnoty $2ab$ a $\frac{b}{a}$ mají zřejmě stejné znaménko a $\frac{b}{a} > 0$ podle (4.64), platí i $2ab > 0$

[57] [36], str. 91.

a první část řešení je hotova.
• Předpokládejme nyní, že různá čísla a, b splňují podmínku $a + b = 2ab > 0$. Protože z $a + b = 2ab$ zřejmě plyne $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$ a $a = 1 \Leftrightarrow b = 1$, jsou a, b dvě čísla různá od 0 a 1, takže implikace v (4.65) se dají obrátit a vedou pak k závěru, že platí druhý vztah v (4.64), přitom se využije předpoklad $2ab > 0$, podle něhož $\frac{b}{a} > 0$. Poslední výraz v (4.63) má tedy kladnou hodnotu, takže existují čísla $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ taková, že (4.63) platí; dokonce přitom máme $x + y = \frac{\pi}{2}$. Hodnoty $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$ jsou tedy kladné a platí

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \sqrt{-\frac{b-1}{a-1}} = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

(opět jsme využili druhou část (4.64)). Odtud plyne jednak

$$a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y = \sqrt{ab},$$

takže třetí rovnice soustavy (4.62) je splněna, jednak

$$\frac{1-b}{a-1} = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

odkud

$$(1-b)\cos^2 x = (a-1)\sin^2 x \qquad \text{neboli} \qquad a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1.$$

Určené x tedy splňuje i první rovnici soustavy (4.62), v důsledku čehož i určené $y = \frac{\pi}{2} - x$ splňuje její druhou rovnici. Tím je i druhá část řešení úlohy hotova.

■ **Příklad 4.7.11.** Uvažujme soustavu rovnic

$$\cos x + \cos y = a, \qquad \sin x + \sin y = b \tag{4.66}$$

s neznámými $x, y \in \langle 0, 2\pi)$ a parametry $a, b \in \mathbb{R}$. Popište grafickou metodu řešení (4.66) s využitím jednotkové kružnice, podejte diskusi o počtu řešení (4.66) v závislosti na parametrech a, b a odvoďte algebraickou soustavu dvou rovnic s neznámými c, s a parametry a, b, jejímiž řešeními jsou právě dvojice

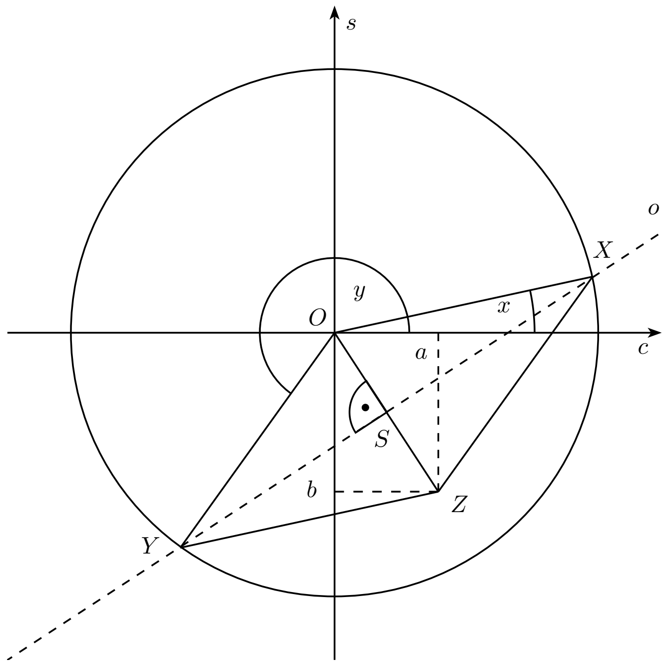
$$(c, s) = (\cos x, \sin x) \qquad \text{a} \qquad (c, s) = (\cos y, \sin y)$$

sestavené z řešení původní soustavy (4.66). Nakonec převeďte soustavu (4.66) na soustavu základních goniometrických rovnic pro vhodné výrazy sestavené z neznámých x, y.[58]
Řešení: V rovině s kartézskou soustavou souřadnic Ocs sestrojme jednotkové vektory

$$\overrightarrow{OX} = (\cos x, \sin x) \qquad \text{a} \qquad \overrightarrow{OY} = (\cos y, \sin y)$$

odpovídající polohám goniometrické ručičky pro úhly x, resp. y. Soustava (4.66) pak vyjadřuje právě to, že vektorový součet $\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$ je vektor $\overrightarrow{OZ} = (a, b)$ s danými souřadnicemi a, b. Rovnoběžník $OXZY$ je kosočtverec s jednotkovými stranami, takže ze zadaného vektoru $\overrightarrow{OZ}$ určíme koncové body X, Y neznámých vektorů $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ jako průsečíky jednotkové kružnice s osou o úsečky OZ (přitom je jedno, který z průsečíků označíme X a který Y, neboť soustava (4.66) je v neznámých x, y symetrická). To je hledaná grafická metoda řešení soustavy (4.66).
Existence a počet zmíněných průsečíků závisí na vzdálenosti osy o od počátku O, jež je rovna polovině délky $\sqrt{a^2 + b^2}$ úsečky OZ. Odtud plyne:

[58] [29], str. 60.



Obrázek 4.25

• je-li $a^2 + b^2 > 4$, soustava (4.66) nemá řešení,

• je-li $a^2 + b^2 = 4$, soustava (4.66) má jediné řešení $x = y = \varphi$, kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je úhel určený rovnostmi

$$2\cos\varphi = a, \qquad 2\sin\varphi = b,$$

• je-li $0 < a^2 + b^2 < 4$, soustava (4.66) má dvě řešení (x_0, y_0) a (y_0, x_0), kde $x_0, y_0 \in \langle 0, 2\pi)$ a $x_0 \neq y_0$ (o jejich určení pojednáme níže),

• je-li $a = b = 0$, soustava (4.66) má nekonečně mnoho řešení, jež jsou právě tvaru (x, y), kde $x, y \in \langle 0, 2\varphi)$ a $|x - y| = \pi$ (odpovídá to situaci $\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{o}$).

K určení požadované soustavy pro neznámé c, s najdeme rovnici osy o úsečky OZ. Je to přímka s normálovým vektorem $\overrightarrow{OZ} = (a, b)$, která prochází bodem $S\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right]$, takže její rovnice má tvar

$$a\left(c - \frac{a}{2}\right) + b\left(s - \frac{b}{2}\right) = 0 \qquad \text{neboli} \qquad ac + bs = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Průsečíky osy o s jednotkovou kružnicí jsou proto určeny soustavou rovnic

$$\begin{aligned} ac + bs &= \frac{a^2 + b^2}{4}, \\ c^2 + s^2 &= 1. \end{aligned}$$

To je hledaná algebraická soustava pro řešení původní soustavy (4.66).

K trigonometrickému řešení přepišme rovnice soustavy (4.66) pomocí vzorců pro součet dvou kosinů a dvou sinů do ekvivalentního tvaru

$$2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} = a, \qquad 2\sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} = b. \tag{4.67}$$

Vydělením rovnic (4.67) dostaneme

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{b}{a},\qquad \text{resp.}\qquad \operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b} \tag{4.68}$$

podle toho, zda $a \neq 0$ či $b \neq 0$ (případ $a = b = 0$ z výše uvedených důvodů již neuvažujeme). Z těchto rovností zřejmě plyne

$$\cos\frac{x+y}{2}=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\frac{x+y}{2}=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{4.69}$$

přičemž oba vztahy platí se stejným znaménkem + či −. Po dosazení do té z rovnic (4.67), jejíž pravá strana je různá od nuly, dostaneme v obou případech stejný vztah

$$\cos\frac{x-y}{2}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{4.70}$$

s týmž znaménkem jako ve (4.69). Všimněme si, že z rovnic (4.69) a (4.70) plynou naopak rovnice (4.67). Tak jsme původní soustavu (4.66) převedli na soustavu základních goniometrických rovnic (4.69) a (4.70), ve kterých vezmeme stejné znaménko. (Tímto postupem najdeme všechna řešení v oboru $x, y \in \mathbb{R}$.) ■

Přejdeme nyní k úlohám o goniometrických nerovnostech. Nebudeme však *řešit* nerovnice, nýbrž *dokazovat* nerovnosti. Proměnné v nich zastoupené tedy nebudou neznámé (které je třeba určit), nýbrž budou nabývat libovolných hodnot z předem stanovených oborů. Dokazování takových nerovností může být mnohdy tvrdým oříškem, přesto ve vybraných úlohách vždy vystačíme s elementárními prostředky, uplatňovanými však často dosti rafinovaně.

■ **Příklad 4.7.12.** Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí[59]

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}\geq 2\sqrt{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}.$$

Řešení: Protože pro uvažovaná x, y platí $0 < x + y < \pi$, máme

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}\leq\frac{1}{\cos x\cos y}, \tag{4.71}$$

takže místo nerovnosti ze zadání úlohy stačí dokázat nerovnost

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\cos x\cos y}}. \tag{4.72}$$

To je ale snadné, neboť po převedení odmocniny z pravé strany na levou dostaneme po úpravě „na čtverec" zřejmou nerovnost

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\cos x}}-\frac{1}{\sqrt{\cos y}}\right)^2\geq 0. \tag{4.73}$$

Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že nerovnost (4.72) též plyne z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (kladných) čísel $\frac{1}{\cos x}$ a $\frac{1}{\cos y}$.

Rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když nastanou rovnosti v obou nerovnostech (4.71) a (4.73). To lze zřejmě vyjádřit podmínkami

$$\sin(x+y)=1\qquad \text{a}\qquad \frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos y},$$

které jsou pro nějaká $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$ splněny, právě když $x + y = \frac{\pi}{2}$ a $x = y$, neboli $x = y = \frac{\pi}{4}$.

[59] 51. ročník MO (2001/2002), úloha A–II-1.

■ **Příklad 4.7.13.** Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí nerovnosti

$$\cos x + \cos y + \cos(x+y) \geq -\frac{3}{2}, \qquad \cos x \cos y \cos(x+y) \geq -\frac{1}{8},$$

a podmínky, kdy nastane první, resp. druhá rovnost, vyjádřete základními rovnicemi pro vhodné goniometrické funkce s vhodnými argumenty sestavenými z proměnných x a y.[60]
Řešení: Výrazy v levých stranách nerovností označíme P, resp. Q a při jejich úpravách užijeme kromě goniometrických vzorců též metodu doplnění kvadratického trojčlenu na čtverec.

- $$\begin{aligned} P &= \cos x + \cos y + \cos(x+y) = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \left(2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1\right) = \\ &= 2\cos^2\frac{x+y}{2} + 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 1 = \\ &= \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cos^2\frac{x-y}{2} - 1 = \\ &= \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{x-y}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

  V posledním výrazu jsou hodnoty prvních dvou sčítanců (díky druhým mocninám) nezáporná čísla, takže platí $P \geq -\frac{3}{2}$, jak jsme měli dokázat. Rovnost $P = -\frac{3}{2}$ nastane, právě když základy obou druhých mocnin budou rovny nule:

  $$2\cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x-y}{2} = 0 \qquad \text{a} \qquad \sin\frac{x-y}{2} = 0.$$

  Druhá rovnost je splněna, právě když $\cos\frac{x-y}{2} = \pm 1$. Po dosazení do první rovnosti tak nacházíme kritérium rovnosti $P = -\frac{3}{2}$ ve tvaru soustavy rovnic

  $$\cos\frac{x-y}{2} = \pm 1, \qquad \cos\frac{x+y}{2} = \mp\frac{1}{2}$$

  (požadujeme, aby obě rovnice platily buď s horním, nebo s dolním znaménkem).

- $$\begin{aligned} Q &= \cos x \cos y \cos(x+y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \cdot \cos(x+y) = \\ &= \frac{1}{2}\cos^2(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x+y)\cos(x-y) = \\ &= \frac{1}{8}(2\cos(x+y) + \cos(x-y))^2 - \frac{1}{8}\cos^2(x-y) = \\ &= \frac{1}{8}(2\cos(x+y) + \cos(x-y))^2 + \frac{1}{8}\sin^2(x-y) - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

  Ze stejných důvodů jako v první části řešení odtud plyne nerovnost $Q \geq -\frac{1}{8}$, přičemž rovnost nastane, právě když je splněna soustava základních rovnic

  $$\cos(x-y) = \pm 1 \qquad \text{a} \qquad \cos(x+y) = \mp\frac{1}{2}.$$

[60] [34], str. 50–51.

■ **Příklad 4.7.14.** Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ určete největší hodnotu výrazu

$$V_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_{n-1} \cos x_n + \sin x_n \cos x_1,$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou libovolná reálná čísla.[61]
Řešení: Kromě výrazu V_n uvažme ještě výraz

$$S_n = (\sin x_1 - \cos x_2)^2 + (\sin x_2 - \cos x_3)^2 + \cdots + (\sin x_n - \cos x_1)^2,$$

který je součtem n druhých mocnin, takže má pouze nezáporné hodnoty. Po provedení těchto druhých mocnin rozdílů a využití n goniometrických jedniček dostaneme vyjádření

$$S_n = n - 2V_n \qquad \text{neboli} \qquad V_n = \frac{n}{2} - \frac{S_n}{2},$$

odkud vzhledem k $S_n \geq 0$ plyne $V_n \leq \frac{n}{2}$. Zkoumaný výraz V_n proto nabývá největší hodnoty $\frac{n}{2}$, neboť, jak snadno nahlédneme, pro čísla $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{\pi}{4}$ platí $S_n = 0$, takže potom $V_n = \frac{n}{2}$, což je vidět i po přímém dosazení hodnot

$$\sin x_i = \cos x_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

■ **Příklad 4.7.15.** Dokažte, že pro každé $x \in (0, \pi)$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí[62]

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} > 0.$$

Řešení: Označme S_n levou stranu zkoumané nerovnosti. V řešení využijeme vzorec pro součin sinů

$$2 \sin x \sin(2k-1)x = \cos(2k-2)x - \cos 2kx,$$

následně v úpravách odhadneme hodnoty kosinů číslem 1 a získaný výraz teleskopicky sečteme:

$$\begin{aligned}
2\sin x \cdot S_n &= 2\sin x \sin x + \frac{2\sin x \sin 3x}{3} + \cdots + \frac{2\sin x \sin(2n-1)x}{2n-1} = \\
&= 1 - \cos 2x + \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3} + \cdots + \frac{\cos(2n-2)x - \cos 2nx}{2n-1} = \\
&= 1 - \cos 2x \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \cos 4x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \frac{\cos 2nx}{2n-1} \geq \\
&\geq 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Protože z $0 < x < \pi$ plyne $\cos 2x < 1$, je dokázaná nerovnost $2 \sin x \cdot S_n \geq 0$ ve skutečnosti ostrá, takže z ní s ohledem na $\sin x > 0$ dostáváme $S_n > 0$, což jsme chtěli dokázat.

■ **Příklad 4.7.16.** Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \cdots, x_n$ platí[63]

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \cos(x_i - x_j) \geq -\frac{n}{2}.$$

[61] 46. ročník MO (1996/1997), úloha A–III–5.
[62] [35], str. 15.
[63] [35], str. 11.

Řešení: Umocníme dva konečné součty $\sum_{i=1}^{n} \cos x_i$ a $\sum_{i=1}^{n} \sin x_i$ na druhou a následně výrazy, které jsou pro jakákoliv x_i nezáporné, sečteme:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \cos x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos^2 x_i + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \cos x_i \cos x_j,$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sin x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \sin x_i \sin x_j,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \cos x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \sin x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \cos^2 x_i + \sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i + 2 \sum_{1\le i<j\le n} (\cos x_i \cos x_j + \sin x_i \sin x_j) =$$
$$= n + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \cos(x_i - x_j) \ge 0.$$

Odtud již plyne dokazovaná nerovnost

$$\sum_{1\le i<j\le n} \cos(x_i - x_j) \ge -\frac{n}{2}.$$

■

Poslední dva příklady teoretického charakteru částečně objasňují, proč je tak málo přesně známých velikostí ostrých úhlů, u nichž známe (rovněž přesně) i příslušné hodnoty goniometrických funkcí.

■ **Příklad 4.7.17.** Dokažte, že obě hodnoty $\cos 1^\circ, \sin 1^\circ$ jsou iracionální čísla.[64]
Řešení: Nejprve indukcí vzhledem k číslu n dokážeme: je-li $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\cos x \in \mathbb{Q}$, pak $\cos nx \in \mathbb{Q}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z předpokladu $\cos x \in \mathbb{Q}$ a rovnosti $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ plyne $\cos 2x \in \mathbb{Q}$. Platí-li $\cos nx \in \mathbb{Q}$ a současně $\cos(n+1)x \in \mathbb{Q}$ pro některé n, pak z identity

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos nx \cos x$$

vzhledem k výchozímu předpokladu $\cos x \in \mathbb{Q}$ vyplývá $\cos(n+1)x \in \mathbb{Q}$ a důkaz indukcí je hotov.

Nyní už k samotné úloze: kdyby platilo $\cos 1^\circ \in \mathbb{Q}$, měli bychom podle dokázaného tvrzení $\cos n^\circ \in \mathbb{Q}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což dává pro $n = 30$ spor, neboť $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Ke stejnému sporu dojdeme i tehdy, když připustíme, že $\sin 1^\circ \in \mathbb{Q}$, neboť pak by z rovnosti $\cos 2^\circ = 1 - 2\sin^2 1^\circ$ plynulo $\cos 2^\circ \in \mathbb{Q}$, a tedy $\cos 2k^\circ \in \mathbb{Q}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, tedy i pro $k = 15$.

Poznámka: Z uvedeného postupu plyne, že $\cos k^\circ \notin \mathbb{Q}$ pro $k \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15\}$ (vypsali jsme všechny kladné dělitele čísla 30). Je známo (viz [38, str. 64]), že pro $k \in \{1, 2, 3, \cdots, 89\}$ platí $\cos k^\circ \in \mathbb{Q}$ pouze v případě $k = 60$.

■ **Příklad 4.7.18.** Je-li $\cos \pi x$ racionální číslo různé od $0, \pm\frac{1}{2}$ a ± 1, pak je reálné číslo x iracionální. Dokažte tuto větu pro případ, kdy hodnota $\cos \pi x$ je rovna zlomku $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je liché číslo větší než 1.[65]
Řešení: Položme $t = \pi x$ a předpokládejme, že platí $\cos t = \frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je liché číslo větší

[64] [29], str. 114.
[65] V [41] je na str. 58–59 uveden důkaz pro zlomek $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$.

než 1. Protože možnost $\frac{p}{q} = \pm 1$ je zadáním vyloučena, můžeme navíc předpokládat, že čísla p, q jsou nesoudělná (po krácení zlomku $\frac{p}{q}$ na základní tvar musí totiž vyjít zlomek s lichým jmenovatelem větším než 1). Indukcí vzhledem k číslu n dokážeme, že $\cos nt$ je racionální číslo tvaru

$$\cos nt = \frac{p_n}{q^n},$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je p_n celé číslo nesoudělné s číslem q. Protože $\cos t = \frac{p}{q}$, je $p_1 = p$ a z rovnosti

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 2\frac{p^2}{q^2} - 1 = \frac{2p^2 - q^2}{q^2}$$

plyne $p_2 = 2p^2 - q^2$. Proč je číslo p_2 (stejně jako číslo p) s číslem q nesoudělné? Kdyby některé prvočíslo r dělilo obě čísla $2p^2 - q^2$ a q, bylo by r liché (protože q je liché) a dělilo by i číslo $2p^2$, takže by i dělilo i číslo p. Čísla p, q by tak měla společný prvočinitel r, což je spor.
Předpokládejme nyní, že pro některé $n \geq 2$ platí

$$\cos(n-1)t = \frac{p_{n-1}}{q^{n-1}}, \qquad \cos nt = \frac{p_n}{q^n}$$

a obě čísla p_{n-1}, p_n jsou s číslem q nesoudělná (tak je tomu, jak už víme, pro $n = 2$). Pak z rovnosti

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\cos nt \cos t$$

dostáváme

$$\cos(n+1)t = 2 \cdot \frac{p_n}{q^n} \cdot \frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q^{n-1}} = \frac{2pp_n - q^2 p_{n-1}}{q^{n+1}},$$

takže platí $p_{n+1} = 2pp_n - q^2 p_{n-1}$. Kdyby nějaké prvočíslo r dělilo obě čísla p_{n+1} a q, bylo by lichým dělitelem čísla $2pp_n$, takže by dělilo aspoň jedno z čísel p, p_n, což je však ve sporu s jejich nesoudělností s číslem q. Proto je s číslem q nesoudělné i číslo p_{n+1} a důkaz indukcí je hotov.

Dokázali jsme, že z rovnosti $\cos \pi x = \frac{p}{q}$ plyne

$$\cos \pi n x = \frac{p_n}{q^n}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, přičemž p_n je číslo nesoudělné s číslem $q > 1$, což v důsledku znamená, že

$$\cos \pi n x \neq \pm 1.$$

Odtud vidíme, že číslo nx není celé pro žádné $n \in \mathbb{N}$, a tedy samo číslo x je nutně iracionální.