## Goniometrické vzorce a rovnice

**1.** Určete hodnotu $\operatorname{tg} x$, víte-li, že $\cos x = -4/5$ a $x \in (\pi, 2\pi)$.

**2.** Dokažte, že pokud $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = 0$, pak $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha$.

**3.** Dokažte, že $\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = (\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\beta-\sin\beta)$.

**4.** Dokažte, že pokud $\sin\alpha = k\sin(\alpha+\beta)$, kde $k \in (-1, 1)$, a pokud $\cos\beta \notin \{0, k\}$, pak existuje hodnota $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ a je rovna číslu $\sin\beta/(\cos\beta - k)$.

**5.** V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\sin x + \cos 2x = 1$.

**6.** V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

**7.** V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $2\sin 2x \sin x + \cos 2x = 1$.

**8.** V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $(\sqrt{3}-1)\sin x - 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

**9.** V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $\sin 2x + \cos 2x - \operatorname{tg} x = 1$.

**10.** V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \operatorname{tg} x$.

**11.** Pro které hodnoty parametru $k \in \mathbb{R}$ má rovnice

$$5\sin 2x - 6\cos x = k \cdot (5\sin x - 3)$$

v oboru $x \in \langle 0, \pi\rangle$ právě dvě řešení?

**12.** V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \cdot \operatorname{cotg} 3x + \sin(\pi + 2x) = \sqrt{2}\cos 5x.$$

**13.** V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $\operatorname{cotg} x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

**14.** V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici $2\cos^2 3x + \cos(2x + \pi) = 1$.

**15.** V oboru $\langle 0, \pi\rangle$ řešte rovnici $\sin 3x = \cos 5x$.
Návod: Rovnici nejdříve upravte do tvaru $\sin 3x = \sin(?)$.

**16.** V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici $\sin 2x - \sqrt{2} \cdot (\sin x + \cos x) + 1 = 0$.
Návod: užijte substituci $t = \sin x + \cos x$.

**17.** V oboru $\langle 0, 2\pi\rangle$ řešte rovnici

$$2\cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) - 4\cos\left(x + \frac{\pi}{10}\right) = 1.$$

**18.** Popište obecnou metodu řešení rovnice $a\cos x + b\sin x + c = 0$ s nenulovými konstantammi $a, b, c \in \mathbb{R}$ cestou úpravy výrazu $a\cos x + b\sin x$ do tvaru $K\sin(x + \omega)$, kde $K = \sqrt{a^2 + b^2}$ a $\omega$ je vhodné číslo (jak ho k daným $a$, $b$ určíme?). Rovnici interpetujte též geometricky jako hledání průsečíků jednotkové kružnice a přímky s danou obecnou rovnicí.