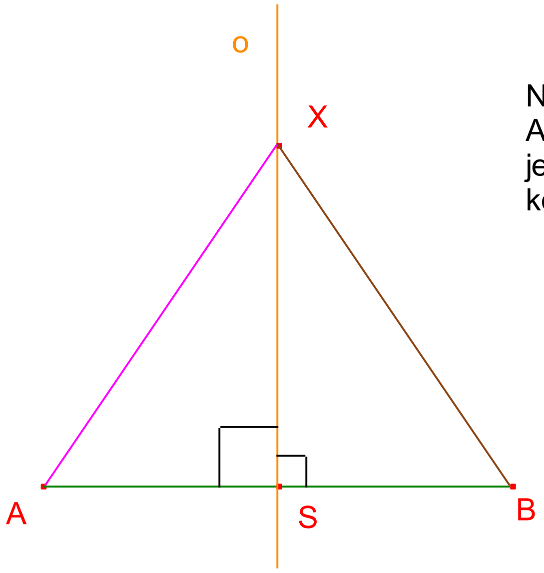
Je dána úsečka AB. Vyšetřete, co je množinou všech bodů X v rovině, pro něž platí $|AX| = |BX|$.

Vlastnost V tedy představuje podmínka $|AX| = |BX|$. Všechny body X, které tuto vlastnost mají, zařadíme do množiny, kterou v souladu s předchozím označíme rovněž V.

Máme-li hypotézu, že touto množinou M je osa o úsečky AB, musíme dokázat, že pro každý její bod platí $|AX| = |BX|$. („$X \in M \Rightarrow X \in V$“)

Pro bod X=S tvrzení platí triviálně. Dále předpokládejme, že $X \neq S$.

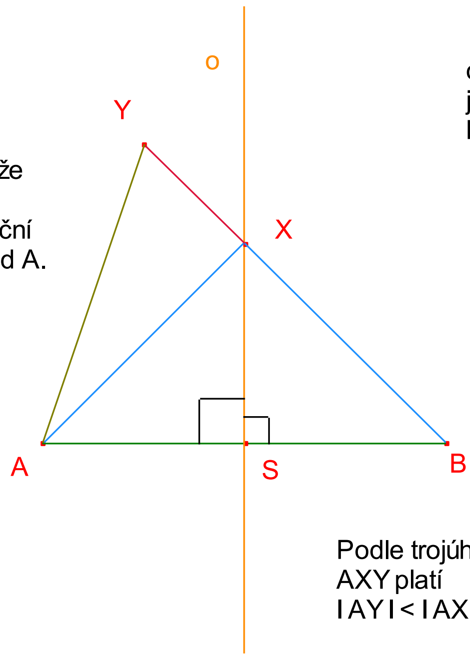


Nechť X leží na ose úsečky AB, což je přímka prochází jejím středem S, která je k ní kolmá.

Trojúhelníky XSA a XSB jsou shodné podle věty sus
=> I AX I = I BX I

Nyní zbývá ukázat, že pro libovolný bod Y, neležící na ose o úsečky AB, naopak nemůže platit $|AY| = |BY|$. („$X \notin M \Rightarrow X \notin V$“)

Uvažujme bod Y neležící na o. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou o jako bod A.



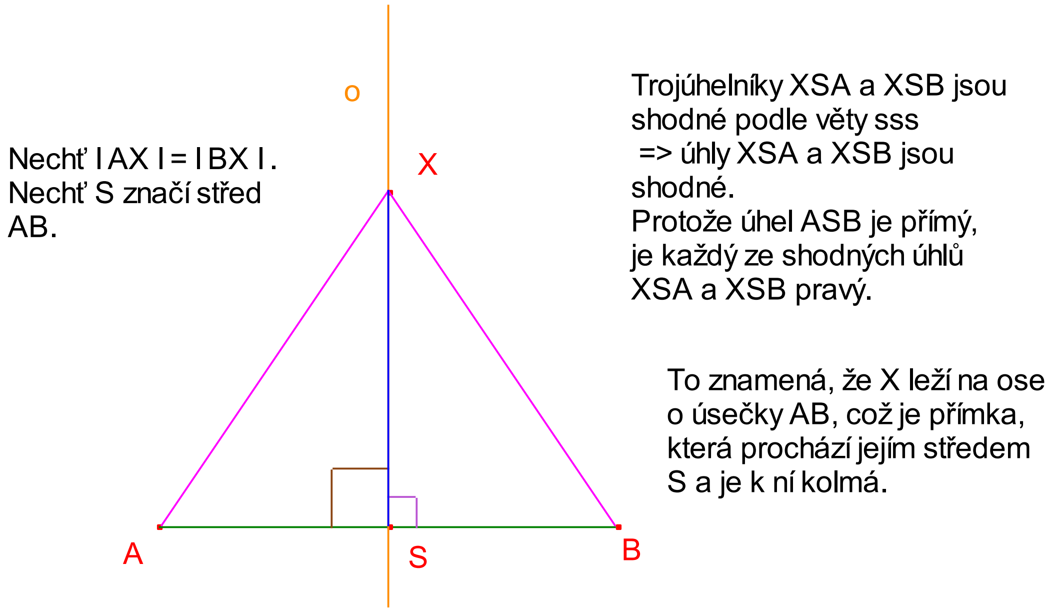
o je osa AB, tzn. prochází jejím středem S a je k ní kolmá

Označme X průsečík úsečky BY s osou o. Již víme, že I AX I = I BX I .

Podle trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku AXY platí
I AY I < I AX I + I XY I = I BX I + I XY I = I BY I.

Místo toho, abychom dokazovali druhou implikaci ve tvaru „$X \notin M \Rightarrow X \notin V$“, je možné zdůvodnit platnost implikace „$X \in V \Rightarrow X \in M$“.

V naší situaci to znamená ukázat, že libovolný bod X, pro který platí $|AX| = |BX|$, musí ležet na ose o úsečky AB.



Všimněme si, že v první i třetí části je sice dokázána shodnost stejných trojúhelníků, ale vychází se přitom z jiných předpokladů. Proto je tato shodnost pokaždé zdůvodněna jinak (užitím jiné věty) a jejím důsledkem je pokaždé také něco jiného. Je tedy vidět, že obě části důkazu nejsou obecně stejné a že nestačí jen mechanicky „obrátit implikace“.

Dodejme, že při řešení úlohy „Vyšetřete, co je množinou všech bodů X …“ zpravidla na začátku hypotézu nemáme a potřebujeme ji získat. Většinou proto takovou úlohu začínáme řešit od implikace „$X \in V \Rightarrow X \in M$“, kterou jsme tento výklad ukončili. Takto budeme postupovat při řešení úloh v následujícím materiálu.