Osová souměrnost

Vlastnosti

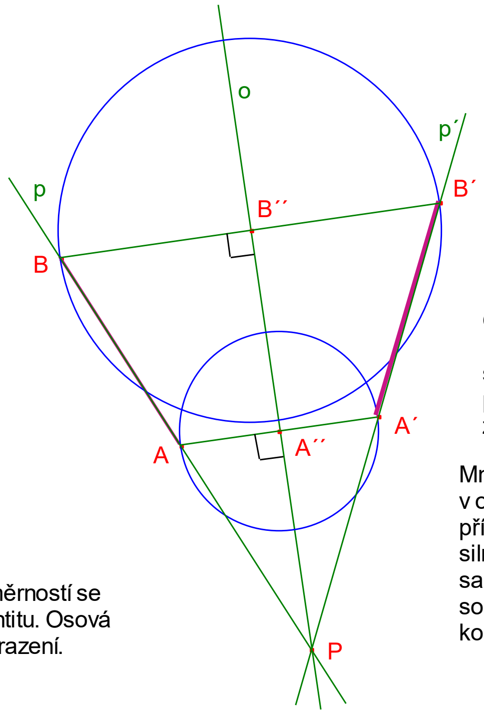
Označme P průsečík přímky AB s osou o, A´´ kolmý průmět bodu A na osu o a B´´ kolmý průmět bodu B na osu o.

Trojúhelníky APA´´ a A´PA´´ jsou shodné podle věty sus. Také trojúhelníky BPB´´ a B´PB´´ jsou shodné podle věty sus. Proto |AB| = |A´B´|.

Osová souměrnost zachovává délky, jedná se o shodné zobrazení.

Přímka p, která je různoběžná s osou o a není k ní kolmá, se se svým obrazem p´ protíná na ose o.

Složením dvou osových souměrností se stejnou osou dostaneme identitu. Osová souměrnost je involutorní zobrazení.



Osová souměrnost je jednoznačně určena svou osou o. Obrazem libovolného bodu A, který neleží na ose o, je takový bod A´, pro který platí, že úsečka AA´ je kolmá k ose o a její střed na ose o leží. Bod, který leží na ose o se zobrazí sám na sebe.

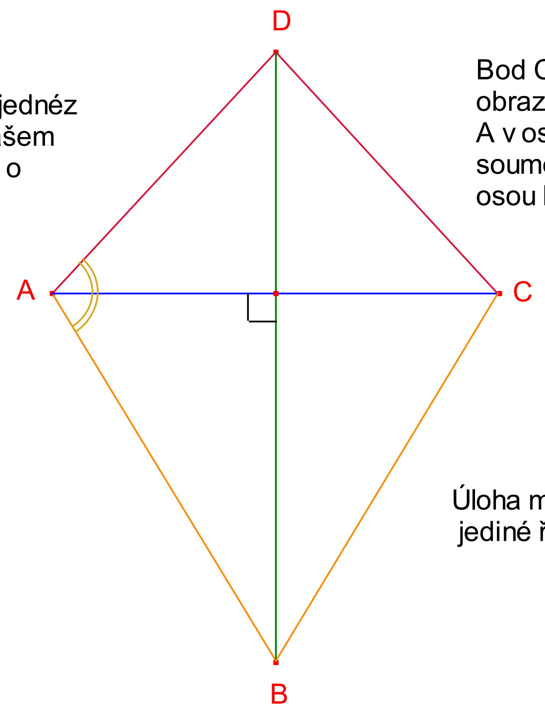
Osová souměrnost je základním shodným zobrazením v tom smyslu, že každé jiné lze složit pomocí nejvýše tří vhodně zvolených osových souměrností.

Množinou všech samodružných bodů v osové souměrnosti tvoří osa o. Tato přímka je v tomto zobrazení jedinou silně samodružnou přímkou. Slabě samodružná přímka v osové souměrnosti je každá přímka, která je kolmá na osu o.

Užití osové souměrnosti v úlohách

1. Sestrojte deltoid ABCD, jsou-li dány délky jeho stran a, d (a $\neq$ d) a úhel, který svírají.

Deltoid je osově souměrný podle jednéz úhlopříček, při našem značení se jedná o úhlopříčku BD.



Bod C je pak obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou BD.

Trojúhelník ABD je dle zadání jednoznačně určen podle věty sus.

Úloha má vždy jediné řešení.

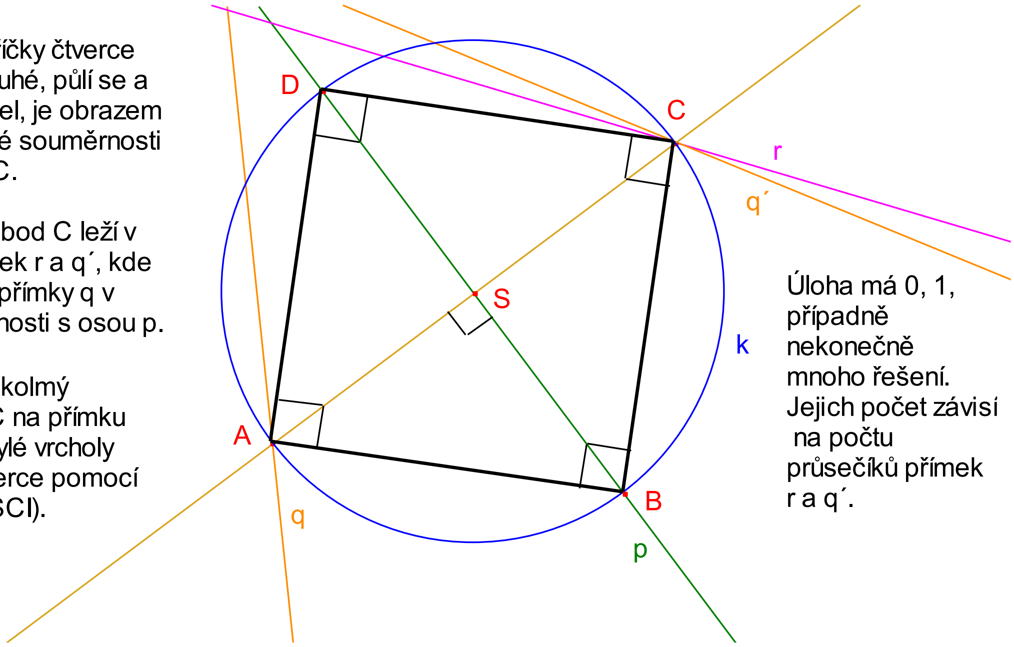
Aleš Kobza

2. Nechť jsou dány přímky p, q a r. Sestrojte čtverec ABCD, pro který platí, že úsečka BD leží na přímce p, bod A na přímce q a bod C na přímce r.

Protože úhlopříčky čtverce jsou stejně dlouhé, půlí se a svírají pravý úhel, je obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou p bod C.

Z toho důvodu bod C leží v průsečíku přímek r a q´, kde q´ je obrazem přímky q v osové souměrnosti s osou p.

Označíme-li S kolmý průmět bodu C na přímku p, najdeme zbylé vrcholy hledaného čtverce pomocí kružnice k(S;ISCI).



Úloha má 0, 1, případně nekonečně mnoho řešení. Jejich počet závisí na počtu průsečíků přímek r a q´.

3. Nechť je dána přímka p a ve stejné otevřené polorovině, jejíž hranici přímka p tvoří, dva různé body A a B. Na přímce p sestrojte bod X tak, aby lomená čára AXB měla nejkratší možnou délku.

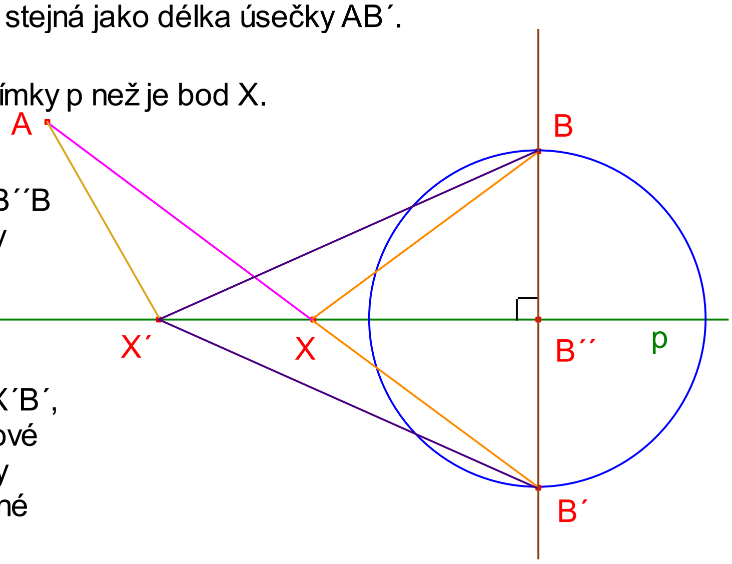
Označme B´´ kolmý průmět bodu B na přímku p, B´ obraz bodu B v osové souměrnosti, jejíž osou je přímka p a X průsečík přímky p s úsečkou AB´.

Trojúhelníky XB´´B a XB´´B´ jsou shodné podle věty sus, proto IXBI = IXB´I.

Délka lomené čáry AXB je proto stejná jako délka úsečky AB´.

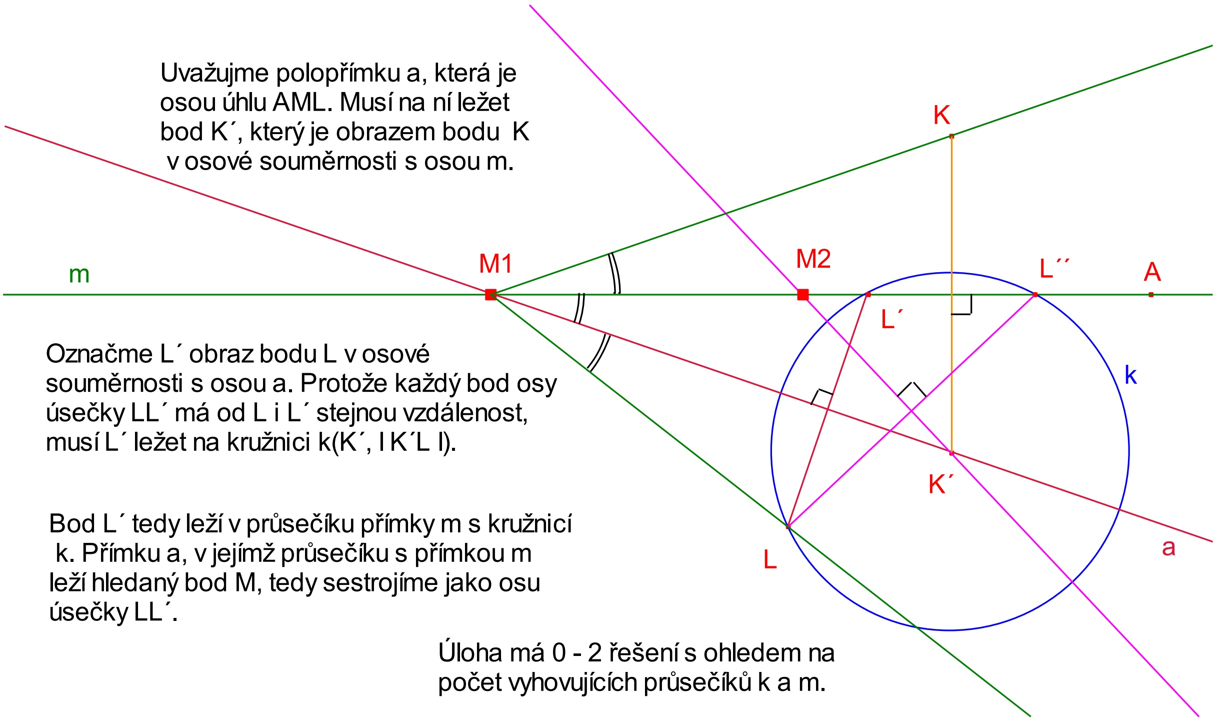
Označme X´ libovolný jiný bod přímky p než je bod X.

Podobně platí, že trojúhelníky X´B´´B a X´B´´B´ jsou shodné podle věty sus, proto IX´BI = IX´B´I.



Délka lomené čáry AX´B je tedy stejná jako délka lomené čáry AX´B´, která je ovšem podle trojúhelníkové nerovnosti delší než délka úsečky AB´. To dokazuje, že délka lomené čáry AXB je nejkratší možná.

4. Je dána přímka m, na ní bod A a dále body K a L v opačných polorovinách vyťatých přímkou m. Na přímce m sestrojte bod M tak, aby úhel AMK byl poloviční než úhel AML.



Aleš Kobza