Hesla k otázkám kurzu DM 2, podzim 2021

01. Goniometrické funkce
Goniometrické funkce ostrého úhlu definované užitím podobných pravoúhlých trojúhelníků. Hodnoty funkcí pro významné úhly 30°, 45° a 60° a pro dvojice úhlů, které se doplňují do 90°.
Funkce sinus a kosinus reálného argumentu definované užitím jednotkové kružnice a pojmu orientovaného úhlu s obloukovou mírou.
Které vlastnosti funkcí sinus a kosinus plynou z geometrie jednotkové kružnice?
Převod sinu na kosinus a naopak.
Definice funkcí tangens a kotangens, odečítání jejich hodnot na tečně k jednotkové kružnici. Definiční obory a obory hodnot obou funkcí, jejich periodicita, znaménka a monotonie v jednotlivých kvadrantech.
Grafy goniometrických funkcí v oboru reálných čísel. Problematika inverzních funkcí: arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens, jejich definiční obory, obory hodnot a grafy.

02. Goniometrické vzorce
Triviální vzorce: goniometrická jednička, vztah mezi $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$.
Z platnosti jednoho součtového vzorce pro $\sin(x \pm y)$ a $\cos(x \pm y)$ odvoďte platnost ostatních tří vzorců.
Vzorce pro $\operatorname{tg}(x \pm y)$.
Vzorce pro dvojnásobný argument s trojím vyjádřením $\cos 2x$.
Vzorce pro poloviční úhel, jejich nejednoznačnost.
Odvození vzorců pro $\sin x \pm \sin y$ a $\cos x \pm \cos y$ ze součtových vzorců.
Univerzální substituce $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Pomůcka pro odvození s ní souvisejících vzorců.

03. Goniometrické rovnice
Základní goniometrická rovnice, etapy jejího řešení.
Rovnice typu $g(U) = g(V)$ a možné postupy jejího řešení.
Substituce $y = \sin x$, $y = \cos x$ a $y = \sin x + \cos x$.
Rovnice $F(\sin x, \cos x) = 0$ a možné postupy jejího řešení.
Rovnice $a \sin x + b \cos x + c = 0$ a dvě metody jejího řešení.
Metoda řešení goniometrických rovnic převodem na součinový tvar.

04. Sinová věta
Sinová věta, její důkaz přes výšky trojúhelníku.
Rozšířená sinová věta a její obrázkový důkaz.
Typické situace pro užití sinové věty při „řešeních trojúhelníků“. Případná dvojznačnost řešení a její souvislost s větou Ssu.
Různé vzorce pro obsah trojúhelníku.
Aplikace: Určení šířky řeky měřením z věže.

05. Kosinová věta
Kosinová věta, její důkaz přes výšky trojúhelníku a Pythagorovu větu, kterou zobecňuje.
Typické situace pro užití kosinové věty při „řešeních trojúhelníků“.
Odvození Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku metodou užití kosinové věty.
Aplikace: Určení vzdálenosti dvou bodů na druhém břehu řeky měřením ze dvou bodů na prvním břehu.

06. Geometrie, její historie a výuka
Předmět geometrie. Milníky její historie od starověku po práci D. Hilberta.
Výuka G na ZŠ, její obsah a charakter.
Výuka G na SŠ, její odlišnosti od výuky na ZŠ. Odborný cíl výuky G na SŠ.
Neprofesní význam výuky G.

07. Základní planimetrické pojmy a poznatky
Axiomatické pojetí, pět skupin axiomů v Hilbertově systému.

I. stupeň ZŠ
Bod a přímka. Přímka AB, značení $\leftrightarrow AB$. Úsečka AB, jak říkáme bodům A a B, jak jejím ostatním bodům.
Porovnání a sčítání úseček. Délka $|AB|$ úsečky AB. Shodné úsečky AB a CD, zápis $AB \cong CD$.
Polopřímka AB (značení $\mapsto AB$), jak říkáme bodu A, jak ostatním jejím bodům. Navzájem opačné polopřímky.
Co je střed dané úsečky a jak ho sestrojíme. Co je osa úsečky a jak ji sestrojíme.
Polorovina, zápis $\mapsto pX$ nebo $\mapsto ABX$, pojmenování jejích bodů. Navzájem opačné poloroviny.
Kterou část roviny nazýváme úhlem. Pojmenování obou polopřímek a jejich společného počátku, jak říkáme ostatním bodům úhlu. Zápis úhlu třemi body. Dvojice úhlů se stejnými rameny, jejich vymezení pomocí průniku a sjednocení polorovin.
Obecný význam termínu konvexní a nekonvexní rovinný útvar.
Shodné úhly, velikost úhlů. Jak třídíme úhly podle jejich velikosti od $0°$ do $360°$.
Porovnání a sčítání úhlů. Jak měříme úhly (ve stupních a menších jednotkách). Co je osa úhlu a jak ji sestrojíme.
Přímky různoběžné, rovnoběžné a navzájem kolmé ($a \nparallel b$, $a \parallel b$, $a \perp b$). Jak sestrojíme rovnoběžku procházející daným bodem. Jak sestrojíme kolmici procházející daným bodem.
Jak určujeme vzdálenost bodu od přímky. Kdy a jak určujeme vzdálenost dvou přímek téže roviny.
Dvojice úhlů: co jsou vrcholové a vedlejší úhly, souhlasné a střídavé úhly, a jaké mají vlastnosti.
Kružnice, její střed, poloměr a průměr (dva významy). Tětiva kružnice a kružnicový oblouk. Kruh.
Trojúhelník a jeho základní prvky, pojmenování jeho prvků, hranice a obvod. Zápis $\triangle ABC$ – má v něm význam pořadí vrcholů? Třídění trojúhelníků podle velikostí vnitřních úhlů.
Čtyřúhelník a jeho základní prvky. Konvexní a nekonvexní čtyřúhelníky. Hranice a obvod.
II. stupeň ZŠ
Trojúhelníkové nerovnosti. Nerovnosti mezi stranami a mezi vnitřními úhly téhož trojúhelníku.Věta o součtu vnitřních úhlů trojúhelníku. Věta o vnějším úhlu trojúhelníku. Věta o součtu vnitřních úhlů čtyřúhelníku.
Trojúhelníky rovnoramenné, jejich základna a ramena. Trojúhelník rovnostranný.
Intuitivní přístup ke shodnosti dvou útvarů na ZŠ. Shodné trojúhelníky, zápis $\triangle ABC \cong \triangle KLM$ a pořadí vrcholů v něm. Co platí pro dva shodné trojúhelníky.
Věty *sss*, *sus*, *usu* a *Ssu* o shodnosti dvou trojúhelníků.
Střední příčky trojúhelníků a jejich vlastnosti.
Těžnice trojúhelníku a jejich vlastnosti. Těžiště trojúhelníku.

Kružnice opsaná a kružnice vepsaná danému trojúhelníku. Existence a konstrukce těchto kružnic.
Výšky trojúhelníku (dvojí význam) a jejich vlastnosti. Průsečík výšek (ortocentrum) daného trojúhelníku.
Vzájemná poloha přímky a kružnice, pojmenování dotyčné přímky ve třech případech. Vzdálenosti středu kružnice od dotyčné přímky ve třech případech v porovnání s poloměrem kružnice.
Vzájemná poloha dvou (nesoustředných) kružnic, rozlišení možných případů.

08. Množiny všech bodů dané vlastnosti
Dva aspekty tvrzení „Množina M v rovině ϱ je množina všech těch jejích bodů, které mají vlastnost $\mathcal{V}$“.
S důkazy uveďte vlastnost $\mathcal{V}$ charakterizující danou množinu bodů, nebo naopak tuto množinu nazvanou podle její charakteristické vlastnosti $\mathcal{V}$ explicitně popište:

(1) Osa úsečka AB,
(2) kružnice $k(S, r)$,
(3) osa úhlu AVB (při jakém omezení na jeho velikost?),
(4) osa dvou různých rovnoběžek,
(5) osa dvou různoběžek,
(6) ekvidistanta dané přímky,
(7) ekvidistanta dané kružnice,
(8) Thaletova kružnice (obecněji *ekvigonála úsečky* v otázce 11).

Významné aplikace: Existence a konstrukce kružnic opsaných a vepsaných danému trojúhelníku. Důkaz věty o výškách trojúhelníku. Konstrukce tečen z daného bodu k dané kružnici.

09. Konstrukční úlohy (polohové a nepolohové), etapy řešení
Polohové a nepolohové úlohy – jejich rozdíly v zadání a při rozlišování stejných, resp. různých výsledných řešení.
Vyjmenujte jednotlivé etapy úplného řešení konstrukční úlohy, popište náplň a zásady realizace každé z nich.

10. Úhly příslušné oblouku kružnice
Dva oblouky AB téže kružnice, jakým zápisem je rozlišujeme. Střed oblouku.
Středový úhel, jeho slovní vymezení. Shodnost dvou oblouků téže kružnice a shodnost jejich středových úhlů.
Obvodový úhel, jeho slovní vymezení. Věta o obvodovém a středovém úhlu, její důkaz. Shodnost dvou oblouků téže kružnice a shodnost jejich obvodových úhlů.
Co platí pro obvodové úhly příslušné oběma obloukům AB téže kružnice.
Úsekový úhel, jeho slovní vymezení. Věta o úsekovém a obvodovém úhlu, její důkaz.
Rozšířená sinová věta.

11. Ekvigonála úsečky a mocnost bodu ke kružnici
Nerovnosti mezi obvodovým úhlem AVB a obecným úhlem AXB, jejich důkazy.
Věta o rovnosti úhlů AVB a AXB pro případ $X \in \mapsto ABV$.
Věta o ekvigonále úsečky. Její konstrukce užitím úsekového úhlu.
Věta o tětivovém čtyřúhelníku, její důkaz.
Invariant všech sečen kružnice k procházejících daným bodem $X \notin k$, důkazy pro obě možné polohy bodu X.
Mocnost bodu ke kružnici. Povaha této skalární veličiny a její možné hodnoty.
Věta o mocnosti bodu a sečnách, které tímto bodem procházejí.
Konstrukce kružnice, která prochází danými dvěma body a dotýká se dané přímky.

12. Podobné trojúhelníky, Pythagorova a Eukleidovy věty
Intuitivní přístupy k zavedení shodných, resp. podobných útvarů.
K čemu slouží zavedení podobných trojúhelníků na základní škole.
Středoškolská definice podobných trojúhelníků, koeficient (poměr) podobnosti.
Vlastnosti podobných trojúhelníků. Věty o podobnosti dvou trojúhelníků.
Které veličiny dvou podobných trojúhelníků jsou ve stejném poměru jako jejich strany. Poměr obsahů dvou podobných trojúhelníků.
Dva způsoby zápisu poměrů stran podobných trojúhelníků.
Praktický význam podobnosti útvarů. Užití podobných trojúhelníků v geometrii.
Věty o pravoúhlém trojúhelníku a jejich odvození pomocí podobnosti. Význam těchto vět pro konstrukce délek určených vzorci z jiných délek.
Geometricky úměrné veličiny, konstrukce čtvrté geometrické úměrné. Konstrukční rozdělení dané úsečky v daném poměru.

13. Shodná zobrazení, vlastnosti a klasifikace
Intuitivní přístup k shodným zobrazením. Dvojí význam termínu shodnost.
Středoškolská definice shodného zobrazení. Symbolika a termíny spojené se zobrazením v rovině.
Obecné vlastnosti shodných zobrazení. Shodnosti přímé a nepřímé.
Kolik existuje shodností, které zobrazí dané body A, B $(A \neq B)$ po řadě na dané body A', B'?
Klasifikace shodných zobrazení na pět druhů, definice nejméně známého z nich.
Shodná zobrazení jako výsledky složení několika osových souměrností.
Konstrukce shodného zobrazení k zadané shodnosti $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

14. Osové souměrnosti, vlastnosti a užití
Definice osové souměrnosti.
Vlastnosti osové souměrnosti. Souměrně sdružené body a útvary v dané osové souměrnosti. Osově souměrné útvary.
Úlohy o nejkratších lomených čarách. Úlohy o odrazech. Konstrukce osově souměrných útvarů. Konstrukce trojúhelníků v případech vymezených typem jednoho ze tří zadaných prvků (o jaké typy se jedná?).

15. Středové souměrnosti, vlastnosti a užití
Definice středové souměrnosti.
Vlastnosti středové souměrnosti. Souměrně sdružené body a útvary v dané středové souměrnosti. Středově souměrné útvary.
Konstrukce úsečky s daným středem. Konstrukce středově souměrných útvarů. Konstrukce trojúhelníků se zadanou těžnicí.

16. Posunutí, vlastnosti a užití
Orientovaná úsečka, její délka. Orientované úsečky nulové a nenulové. Směr přímek, polopřímek a orientovaných úseček.
Definice posunutí. Vlastnosti posunutí.
Konstrukce úsečky dané délky a směru. Posunutí kopie útvaru. Konstrukce lichoběžníků. Čtyřúhelníky se zadanými úhlopříčkami a úhlem mezi nimi.

17. Otočení, vlastnosti a užití
Orientovaný úhel, jeho základní a obecná velikost.
Definice otočení. Vlastnosti otočení.
Konstrukce rovnoramenných trojúhelníků. Otočení kopie útvaru. Využití úhlu mezi přímkou a jejím obrazem.

18. Podobná zobrazení, stejnolehlosti
Definice podobného zobrazení.
Vlastnosti podobných zobrazení.
Historicky původní definice stejnolehlých trojúhelníků.
Definice stejnolehlosti jako zobrazení, její vektorová alternativa.
Vlastnosti stejnolehlosti. Vlastnost, která odlišuje stejnolehlosti od ostatních podobných zobrazení.
Praktická konstrukce obrazů ve stejnolehlosti.

19. Užití stejnolehlostí
Stejnolehlost dvou úseček. Stejnolehlost dvou kružnic.
Společné tečny dvou kružnic. Konstrukce úsečky rozdělené na dva úseky v daném poměru. Zvětšení či zmenšení podobné kopie. Využití dotyku dvou kružnic. Složení stejnolehlosti s otočením. Vpisování útvarů užitím stejnolehlé kopie.

Konec dokumentu