13. Shodná zobrazení, vlastnosti a klasifikace

Intuitivní přístup k shodným zobrazením. Dvojí význam termínu shodnost. Symbolika a termíny spojené se zobrazením v rovině.
Středoškolská definice shodného zobrazení.
Obecné vlastnosti shodných zobrazení. Shodnosti přímé a nepřímé.
Kolik existuje shodností, které zobrazí dané body A, B ($A \neq B$) po řadě na dané body A', B'?
Klasifikace shodných zobrazení na pět druhů, definice nejméně známého z nich.
Shodná zobrazení jako výsledky složení několika osových souměrností.
Konstrukce shodného zobrazení k zadané shodnosti $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Shodné zobrazení si představujeme jako výsledek určitého pohybu (přemístění) bodů i celých útvarů v rovině. Při něm se proto zachová tvar i velikost útvarů. *Termín shodnost* označuje jednak zmíněný druh zobrazení v rovině, jednak binární relaci na množině rovinných útvarů ($U \cong V$).

Symbolika a termíny. Zobrazení $\mathcal{Z}$ v rovině ϱ je zobrazení $\mathcal{Z}\colon \varrho \to \varrho$, které každému vzoru (bodu) $A \in \varrho$ přiřazuje obraz (bod) $Z(A)$, který značíme A'. Píšeme $\mathcal{Z}\colon A \to A'$. Podobně pro každý rovinný útvar $U \subset \varrho$ značíme $U' = \{A'\colon A \in U\}$ obraz útvaru U a píšeme $\mathcal{Z}\colon U \to U'$. Samodružný bod A zobrazení ($A' = A$), samodružný útvar U zobrazení ($U' = U$).

Definice. Shodné zobrazení (nebo také shodnost) je zobrazení v rovině, při kterém je obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ téže délky (tj. shodná úsečka).

Možná varianta definice. Shodné zobrazení by stačilo vymezit jen „vzdálenostně“, a to jako libovolnou *izometrii*: Pro každé dva různé body A, B a jejich obrazy A', B' platí $|AB| = |A'B'|$. Z toho už totiž lze odvodit, že obrazem každé úsečky je skutečně úsečka.

Vlastnosti shodných zobrazení.

(1) Každá shodnost $\mathcal{Z}$ je bijekce, inverzní zobrazení $\mathcal{Z}^{-1}$ je rovněž shodnost.
(2) Při shodném zobrazení je obrazem úsečky AB úsečka $A'B'$ téže délky, obrazem polopřímky AB polopřímka $A'B'$, obrazem poloroviny ABC polorovina $A'B'C'$, obrazem úhlu AVB úhel $A'V'B'$ téže velikosti, obrazem kružnice $k(S, r)$ kružnice $k'(S', r)$.
(3) Shodné zobrazení zachovává rovnoběžnost, tj. obrazem každých dvou přímek $p \parallel q$ jsou přímky $p' \parallel q'$.
(4) Každá shodnost je buď přímá, nebo nepřímá, tj. nemění, resp. mění orientaci každého úhlu.
(5) Složením shodností vznikne opět shodnost.

Věta 1. Shodné zobrazení, které převádí dva dané body $A \neq B$ na dva dané body $A' \neq B'$, existuje, právě když úsečky AB a $A'B'$ mají stejné délky. Pokud tuto podmínku $|AB| = |A'B'|$ čtyři dané body splňují, pak existují právě dvě shodnosti, při kterých $A \to A'$ a $B \to B'$. Jedna z nich je přímá, druhá nepřímá shodnost.

Klasifikace shodných zobrazení.
Existuje pět druhů shodných zobrazení: čtyři z nich – *osové souměrnosti, středové souměrnosti, posunutí a otočení* – probíráme na střední škole, pátým druhem jsou *posunuté souměrnosti* (zvaná též *posunutá zrcadlení*). Každá posunutá souměrnost je výsledkem složení některé osové souměrnosti s posunutím ve směru příslušné osy souměrnosti.

Z důkazu věty 1 plyne, že **každé shodné zobrazení je výsledkem složení nejvýše tří osových souměrností**. Složením dvou osových souměrností vznikne otočení nebo posunutí. Složením tři osových souměrností vznikne buď opět osová souměrnost, nebo posunutá souměrnost.

Jsou-li dány dva trojúhelníky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, pak tu jedinou shodnost, která převede $\triangle ABC$ na $\triangle A'B'C'$, sestrojíme složením nejvýše tří osových souměrností. První z nich zvolíme tak, aby obrazem bodu A byl bod A' (pokud to už rovnou neplatí), druhou osovou souměrnost pak vybereme tak, aby obrazem bodu B byl bod B' (pokud už to neplatí), a nakonec, pokud bod C' ještě není obrazem bodu C, uplatníme třetí osovou měrnost (podle přímky $A'B'$).