

C1480: ÚVOD DO MATEMATIKY - SEMINÁŘ
TÉMA 0: OPAKOVÁNÍ ZÁKLADŮ MATEMATIKY

SKUPINA: 0V

VERONIKA HORSKÁ
PODZIMNÍ SEMESTR, 2022

1.1 Obory hodnot, množinový zápis

Příklad 1.1. Obory hodnot, množinový zápis

Určete, zda jsou následující tvrzení pravdivá.

- | | |
|---|----------|
| 1. $4.6 \in \mathbb{R}$ | pravda |
| 2. $-10 \in \mathbb{N}$ | nepravda |
| 3. $6 \in \mathbb{Z}$ | pravda |
| 4. $1 \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4\}$ | pravda |
| 5. $3 \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4\}$ | nepravda |
| 6. $6.4 \in \mathbb{N}$ | nepravda |
| 7. $\{14, 3, 0, 1, 12\} \in \mathbb{Z}_0^-$ | nepravda |
| 8. $\{\frac{1}{4}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -0.524, -50, 10^2, 0.666\} \in \mathbb{R}$ | pravda |
| 9. $\{-\infty, -6, -1, 0, 2, 5\} \in \mathbb{Z}$ | nepravda |
| 10. $\{-10, -2, -\infty, -1, 0\} \in \mathbb{R}_0^-$ | nepravda |
| 11. $\{6, 7, \infty, 2, 0\} \in \mathbb{N}_0$ | nepravda |
| 12. $\{14, 3, 0, 1, 12\} \in \mathbb{N}_0$ | pravda |
| 13. $\{-2, 0, 4.0, -\frac{9}{3}\} \in \mathbb{Z}$ | pravda |
| 14. $\{4, -5, 3, \infty, -15\} \in \mathbb{N}$ | nepravda |
| 15. $\{4.0, 2.5, -3.7, -6.0, 4.3\} \in \mathbb{Z}$ | nepravda |
| 16. $\{6, 1, 8, 0, 15\} \in \mathbb{N}_0$ | pravda |
| 17. $\{4, 2, 0, 6, 4, \infty\} \in \mathbb{Z}_0^+$ | nepravda |
| 18. $\{4, 2, 0, 6, 4, 16\} \in \mathbb{Z}_0^+$ | pravda |
| 19. $\{-5.3, 17.0, 6.2, \infty, -1.1\} \in \mathbb{R}$ | nepravda |
| 20. $\{4, 6, 8, 15\} \in \mathbb{N}_0$ | pravda |

Příklad 1.2. Obory hodnot, množinový zápis

Určete, které z vypsanych čísel porušují uvedená tvrzení.

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. $\{4, -5, 3, 0, -15\} \in \mathbb{N}$ | $\{-5, -15\}$ |
| 2. $\{4.0, 2.5, -3.7, -6.0, 4.3\} \in \mathbb{Z}$ | $\{2.5, -3.7, 4.3\}$ |
| 3. $\{4.6, \sqrt[3]{5}, 0, -1.2, \frac{1}{5}, 0.845\} \in \mathbb{R}$ | žádné |
| 4. $\{1, 4, 7, 8\} \in \mathbb{R}$ | žádné |
| 5. $\{\frac{3}{2}, 2, -2, \sqrt{2}, 0.2, \frac{4}{2}\} \in \mathbb{Z}$ | $\{\frac{3}{2}, \sqrt{2}, 0.2\}$ |

Příklad 1.3. Intervalový zápis

Určete, zda krajní hodnoty náleží nebo nenáleží do uvedeného intervalu.

- | | |
|---|------------------------|
| 1. $\langle 4; 5 \rangle$ | 4 náleží, 5 nenáleží |
| 2. $(-\infty; -3) \cup \langle 6; \infty \rangle$ | -3 nenáleží, 6 náleží |
| 3. $(0; 1)$ | 0 nenáleží, 1 nenáleží |

Příklad 1.4. Intervalový zápis

Zapište

- | | |
|---|--|
| 1. interval v rozsahu 8–10 obsahující 8 i 10 | $\langle 8; 10 \rangle$ |
| 2. interval obsahující všechna reálná čísla vyjma -2 | $(-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$ |
| 3. interval od $\frac{1}{2}$ (včetně) do 2 (vyjma) | $[\frac{1}{2}; 2)$ |
| 4. interval obsahující všechna reálná čísla vyjma intervalu $\langle -3; 6 \rangle$ | $(-\infty; -3) \cup \langle 6; \infty \rangle$ |

Příklad 1.5. Zlomky

Vypočítejte, výsledky krácením upravte na pravý zlomek a následně převed'te na smíšená čísla (je-li to možné).

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $\frac{10}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$ | $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ |
| 2. $\frac{8}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ | $\frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$ |
| 3. $\frac{10}{3} - \frac{18}{8}$ | $\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$ |
| 4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ | $\frac{x+1}{x^2}$ |
| 5. $\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{x+1}$ | $\frac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{2(x+1)}$ |
| 6. $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2}$ | $-\frac{x-4}{(x-1)(x+2)}$ |
| 7. $\frac{\frac{16}{3}}{\frac{8}{6}}$ | 4 |
| 8. $\frac{\frac{7}{3} - 1}{\frac{4}{5}}$ | $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ |
| 9. $\frac{\frac{6}{4} - 2}{\frac{5}{3} - 1}$ | $-\frac{3}{4}$ |
| 10. $\frac{\frac{8}{7} + 1}{3 - \frac{4}{3}}$ | $\frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$ |

Příklad 1.6. Zlomky

Doplňte chybějící znaménka, resp. čísla, aby platila rovnost.

- | | |
|---------------------------------|---------------|
| 1. $\frac{\oplus}{?} = \oplus$ | \oplus |
| 2. $\frac{\oplus}{\ominus} = ?$ | \ominus |
| 3. $\frac{?}{\ominus} = \oplus$ | \ominus |
| 4. $\frac{-4}{?} = -2$ | 2 |
| 5. $\frac{3}{?} = -\frac{1}{2}$ | -6 |
| 6. $\frac{-6}{-12} = ?$ | $\frac{1}{2}$ |

Příklad 1.7. Algebraické výrazy

Roznásobte podle vzorce.

1. $(9x - 2)^2$ $81x^2 - 36x + 4$
2. $(3x^2 - 1)^2$ $9x^4 - 6x^2 + 1$
3. $(6x + 1)^2$ $36x^2 + 12x + 1$
4. $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ $x^2 - 2$
5. $(2x + \frac{1}{2})^2$ $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$
6. $(x^2 + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2})$ $x^4 - \frac{1}{4}$

Příklad 1.8. Algebraické výrazy

Roznásobte.

1. $(2x - 1)(x + 3)$ $2x^2 + 5x - 3$
2. $(-2x + 1)(x^2 - 1)$ $-2x^3 + x^2 + 2x - 1$
3. $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{2}{4})$ $x^2 - \frac{1}{4}$

Příklad 1.9. Algebraické výrazy

Rozložte na součin pomocí vzorců a je-li to možné, zkrátte.

1. $\frac{9x^2+12x+4}{-3x-2}$ $-(3x + 2)$
2. $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$ $x - \sqrt{3}$
3. $\frac{x^2-6x+9}{2x-6}$ $\frac{x-3}{2}$
4. $\frac{x^2+1}{x+1}$ nejde zkrátit; $\frac{x^2+1}{x+1}$
5. $\frac{x^2-10x+25}{x^2-5x}$ $\frac{x-5}{x}$
6. $\frac{x^4-\frac{1}{4}}{x^3-\frac{x}{2}}$ $\frac{(x^2+\frac{1}{2})}{x}$

Příklad 1.10. Mocniny a odmocninyPřeveďte jednotlivé prvky následujících výrazů na mocninné tvary se základem x (resp. y), tj. na tvary typu $x^{\frac{b}{a}}$.

1. $\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{1}{y}$ $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - y^{-1}$
2. $-\sqrt[4]{y} + \frac{2}{-x^6}$ $-y^{\frac{1}{4}} - 2x^{-6}$
3. $\frac{2}{(-x)^6} + \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$ $2x^{-6} + y^{-\frac{2}{3}}$
4. $\sqrt[5]{x^5} - \sqrt[5]{x} - \sqrt{x^5} - \frac{1}{\sqrt{x^5}} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ $x - x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{5}{2}} - x^{-\frac{5}{2}} - x^{-\frac{2}{5}}$

Příklad 1.11. Mocniny a odmocninyPřeveďte jednotlivé prvky následujících výrazů na odmocninnové tvary, tj. na tvary typu $\sqrt[a]{x^b}$.

1. $4x^{-\frac{4}{1}} + y^{-2}$ $\frac{4}{x^4} + \frac{1}{y^2}$
2. $3y^{\frac{2}{5}} - x^{\frac{4}{2}}$ $3\sqrt[5]{y^2} - x^2$
3. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{2}{3}} + y^{-\frac{3}{2}}$ $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{y^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^3}}$
4. $x^{-2} + x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}} + x^0 + x^{\frac{1}{2}} + x^1 + x^2$ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 + \sqrt{x} + x + x^2$

3. • $f(x) = x$
• $f(x) = \frac{1}{x}$

4. • $f(x) = x^2$
• $f(x) = \sqrt{x}$

5. • $f(x) = e^x$
• $f(x) = \ln(x)$

6. • $f(x) = \sin(x)$
• $f(x) = \cos(x)$

Příklad 1.16. Goniometrické funkce

Vypočítejte následující příklady.

1. $\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{2} - 1$ $-\frac{1}{2}$
2. $\tan(x) \cot(x) - 1$ 0
3. $\tan(x) + \sin(x)$ $\frac{\sin(x)(1 + \cos(x))}{\cos(x)}$
4. $\sin(0) + \cos(\pi) + 1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}) + \cos(0)$ 0
5. $-\sin(\frac{3\pi}{2}) + 3 \cos(\pi) - \cos^2(0) + \sin(\frac{\pi}{2}) + 4 \sin(0)$ -2

Příklad 1.17. Řešení rovnic

Vyřešte následující rovnice.

1. $\frac{(2x-1)}{7} = \frac{4x-5}{2}$ $x = \frac{11}{8}$
2. $\frac{(3x-2)}{5} = \frac{2x-1}{4}$ $x = \frac{3}{2}$
3. $x^2 = 2x + 8$ $x = -2, x = 4$
4. $3x^2 - 10 = 13x$ $x = -\frac{2}{3}, x = 5$
5. $9x - x^2 = 20$ $x = 4, x = 5$

Příklad 1.18. Řešení nerovnic

Vyřešte následující nerovnice. Výsledek převedte do intervalového zápisu a následně zakreslete na reálnou osu.

1. $\frac{3x-7}{6} > \frac{12}{9}$ $x \in (5; \infty)$
2. $\frac{5x-6}{2} \geq 4x - 3$ $x \in (-\infty; 0)$
3. $x^2 - x - 6 \leq 0$ $x \in \langle -2; 3 \rangle$
4. $-7x + 2 \geq -5x^2$ $x \in (-\infty; \frac{2}{5}) \cup \langle 1; \infty \rangle$
5. $8x^2 < 6x + 5$ $x \in (-\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$