

C1480: Úvod do matematiky - seminář

Téma 2: Limity a derivace 2/2

Veronika Bendová

bendova.veroonika@gmail.com

Derivace funkcí

- **derivace** . . . derivace není nic jiného, než **limita**;
(konkrétně $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$)

- derivace prvního řádu
- derivace druhého řádu
- derivace k -tého řádu

Pravidla pro určení derivací

- derivace součinu konstanty c a funkce je součin konstanty c a derivace funkce
- derivace součtu = součet derivací
- derivace součinu dvou funkcí = první derivovaná \times druhá nederivovaná + první nederivovaná \times druhá derivovaná
- derivace podílu dvou funkcí = (první derivovaná \times druhá nederivovaná – první nederivovaná \times druhá derivovaná) / druhá funkce na druhou
- derivace složené funkce $f(g(x)) =$ derivace funkce $f(g(x)) \times$ derivace funkce $g(x)$,

Derivace konkrétních funkcí (nutné minimum)

- $a' = 0$, kde a je konstanta ... derivace konstanty je 0
- $(x^a)' = ax^{a-1}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

l'Hospitalovo pravidlo

- pravidlo, které za splnění určité podmínky umožňuje převedení **limity podílu dvou funkcí** na **limitu podílu derivací** těchto funkcí.
- Nechť je splněna jedna z podmínek
 1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
 2. $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, pak existuje také limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a tyto limity se rovnají, tj.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Výpočty derivací

Příklad 2.4. Derivace prvního řádu funkce

Vypočítejte následující derivace

1. $(3x^4 + x - 1 + \frac{1}{x} - x^{-5})'$

2. $(q \sin(q))'$

3. $(e^u \tan(u) + \ln(u) \cos(u))'$

4. $\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)'$

$$5. (e^{t^2-2t})'$$

$$6. (2\pi \sin^3(d))'$$

Příklad 2.5. Derivace druhého řádu funkce

Vypočítejte následující druhé derivace

$$1. (3x^4 + x - 1 + \frac{1}{x} - x^{-5})''$$

$$2. (q \sin(q))''$$

$$3. (e^{t^2-2t})''$$

Příklad 2.6. l'Hospitalovo pravidlo

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

1. $\lim_{m \rightarrow -1} \frac{m^3 + 6m^2 + 9m + 4}{m^4 - 1}$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{x^4 - 1}$$