

C1480: ÚVOD DO MATEMATIKY - SEMINÁŘ  
TÉMA 2: LIMITY A DERIVACE

SKUPINA: 0V

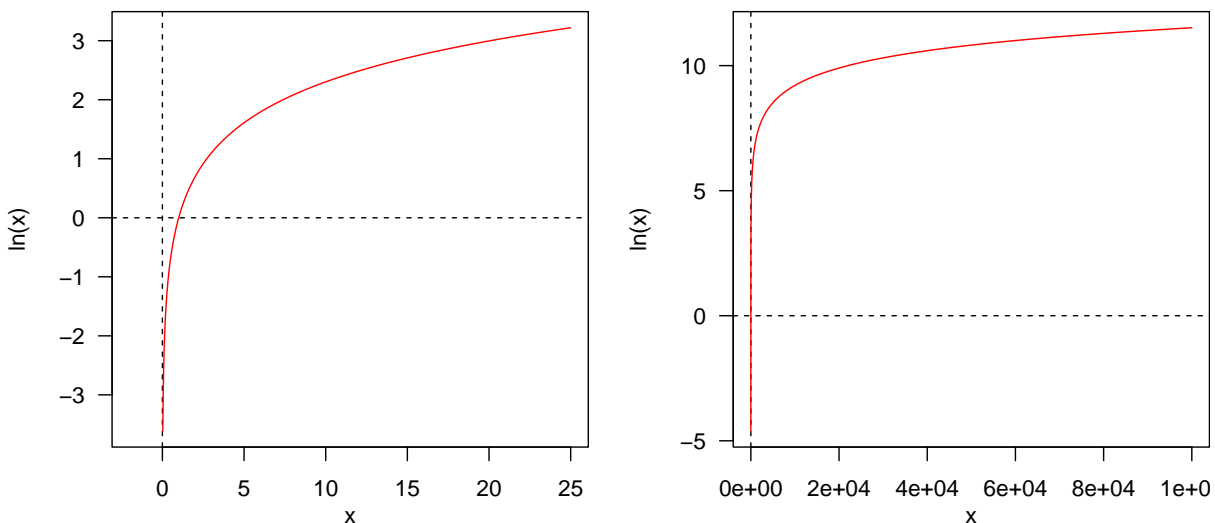
VERONIKA HORSKÁ  
PODZIMNÍ SEMESTR, 2022

## 2.1 Vlastnosti základních funkcí

### Příklad 2.1. Základní vlastnosti funkce $\ln(x)$

Na obrázku 1 je zobrazený graf funkce  $f(x) = \ln(x)$ . Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce  $f(x)$ ;
2. obor hodnot funkce  $f(x)$ ;
3. spojitost funkce  $f(x)$  na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce  $f(x)$  (horní / dolní / globální ohraničenost funkce  $f(x)$ );
5. periodicitu funkce  $f(x)$ , případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.



Obrázek 1: Graf funkce  $\ln(x)$

## 2.2 Výpočty limit

### Příklad 2.2. Hornerovo schéma: Rozklad polynomu na kořenové činitele

Rozložte na kořenové činitele následující polynomy

1.  $x^2 - 3x - 10$   $(x + 2) \times (x - 5)$
2.  $s^3 + 6s^2 + 9s + 4$   $(s + 1) \times (s + 1) \times (s + 4)$

**Příklad 2.3. Limity funkcí ve vlastním bodě**

Vypočítejte následující limity

1.  $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{3^a - 5^a}{2^a} - 2$  -3
2.  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{6v^4 - 21v^2 - v + 3}{v^2 - 3v + 1}$  3
3.  $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^3 + 6z^2 + 9z + 4}{z^4 - 1}$  0

**Příklad 2.4. Limity funkcí v nevlastním bodě**

Vypočítejte následující limity

1.  $\lim_{b \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{b}$  1
2.  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{5r^5 - 2r^3 + 6}{3 + r^2 + r^7}$  0
3.  $\lim_{h \rightarrow -\infty} \frac{21h^3 + 5h - 1}{4 + h^2 + 3h^3}$  7
4.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5^k + 3^k}{4^k}$   $\infty$
5.  $\lim_{w \rightarrow -\infty} \frac{4^w + 3^w}{3^w}$  1

**Příklad 2.5. Derivace prvního řádu funkce**

Vypočítejte následující derivace

1.  $(3x^4 + x - 1 + \frac{1}{x} - x^{-5})'$   $12x^3 + 1 - 0 - \frac{1}{x^2} + 5x^{-6}$
2.  $(q \sin(q))'$   $\sin(q) + q \cos(q)$
3.  $(e^u \tan(u) + \ln(u) \cos(u))'$   $e^u \tan(u) + \frac{e^u}{\cos^2(u)} + \frac{\cos(u)}{u} - \ln(u) \sin(u)$
4.  $\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)'$   $\frac{2(y^2+1)}{(1-y^2)^2}$
5.  $(e^{t^2-2t})'$   $2(t-1)e^{t^2-2t}$
6.  $(2\pi \sin^3(d))'$   $6\pi \sin^2(d) \cos(d)$

**Příklad 2.6. Derivace druhého řádu funkce**

Vypočítejte následující druhé derivace

1.  $(3x^4 + x - 1 + \frac{1}{x} - x^{-5})''$   $36x^2 + \frac{2}{x^3} - 30x^{-7}$
2.  $(q \sin(q))''$   $2 \cos(q) - q \sin(q)$
3.  $(e^{t^2-2t})''$   $(4t^2 - 8t + 6)e^{t^2-2t}$

**Příklad 2.7. l'Hospitalovo pravidlo**

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

1.  $\lim_{m \rightarrow -1} \frac{m^3 + 6m^2 + 9m + 4}{m^4 - 1}$  0
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}{x^4 - 1}$

*l'Hospitalovo pravidlo nelze použít.**navíc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1}$  neexistuje.*