

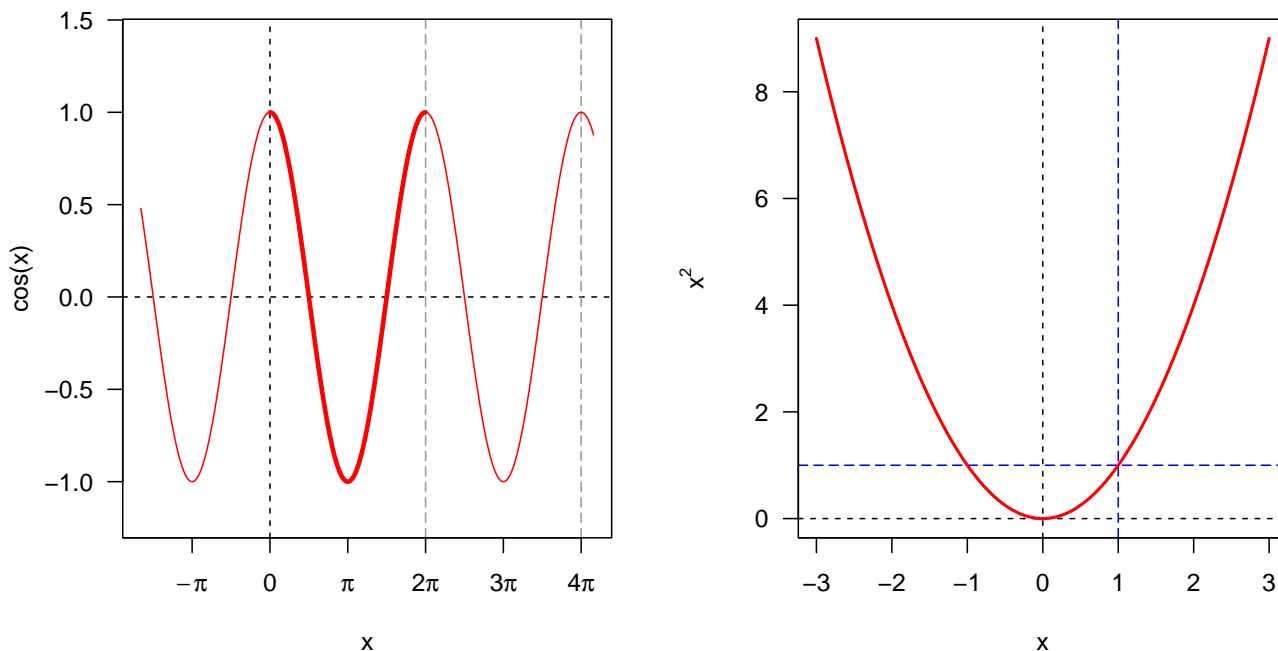
C1480: ÚVOD DO MATEMATIKY - SEMINÁŘ  
TÉMA 2: LIMITY A DERIVACE

SKUPINA: C

VERONIKA HORSKÁ  
PODZIMNÍ SEMESTR, 2022**2.1 Vlastnosti základních funkcí****Příklad 2.1. Základní vlastnosti funkce  $\cos(x)$** Na obrázku 1 vlevo je zobrazený graf funkce  $f(x) = \cos(x)$ . Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce  $f(x)$ ;
2. obor hodnot funkce  $f(x)$ ;
3. spojitost funkce  $f(x)$  na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce  $f(x)$  (horní / dolní / globální ohraničenost funkce  $f(x)$ );
5. periodicitu funkce  $f(x)$ , případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

Obrázek 1: Graf funkce  $\cos(x)$  (vlevo); graf funkce  $x^2$  (vpravo)

**Příklad 2.2. Základní vlastnosti funkce  $x^2$** 

Na obrázku 1 vpravo je zobrazený graf funkce  $f(x) = x^2$ . Na základě grafu stanovte

1. definiční obor funkce  $f(x)$ ;
2. obor hodnot funkce  $f(x)$ ;
3. spojitost funkce  $f(x)$  na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
4. ohraničenost funkce  $f(x)$  (horní / dolní / globální ohraničenost funkce  $f(x)$ );
5. periodicitu funkce  $f(x)$ , případně její periodu;
6. paritu funkce;
7. monotónnost funkce na celém definičním oboru, případně na vybraných subintervalech, má-li to smysl;
8. + uveďte limity funkce v zajímavých bodech, jsou-li nějaké.

Své závěry stručně zdůvodněte.

**2.2 Výpočty limit****Příklad 2.3. Hornerovo schéma: Rozklad polynomu na kořenové činitele**

Rozložte na kořenové činitele následující polynomy

1.  $c^2 + c - 6$   $(c - 2) \times (c + 3)$
2.  $w^3 + 7w^2 + 11w + 5$   $(w + 1) \times (w + 1) \times (w + 5)$

**Příklad 2.4. Limity funkcí ve vlastním bodě**

Vypočítejte následující limity

1.  $\lim_{z \rightarrow 5} \frac{z^2 - 5z + 4}{z - 1}$  1
2.  $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{3^h + 3}{2^h - 4^h}$  -1
3.  $\lim_{d \rightarrow 3} \frac{d^3 - d^2 - 5d - 3}{d^2 - 9}$   $\frac{8}{3}$
4.  $\lim_{n \rightarrow 3} 3n^2 - 7$  20

**Příklad 2.5. Limity funkcí v nevlastním bodě**

Vypočítejte následující limity

1.  $\lim_{f \rightarrow -\infty} \frac{2f^2 - f}{f}$   $-\infty$
2.  $\lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{4p + 2 - 3p^2 - 2p^7}{2p^3 + p^5 - 3}$   $\infty$
3.  $\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{3 + g^3 + g}{3g^5 - 2g^3 - 6g + 2}$  0
4.  $\lim_{l \rightarrow -\infty} \frac{7^l - 5^l}{5^l}$  -1
5.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{4^m}}{2 - \frac{1}{5^m}}$  1
6.  $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{6^y - 2^y}{3^y}$   $-\infty$
7.  $\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1 + 2q - q^3 + 4q^5}{q^4 + 2q^5 - q^3}$  2
8.  $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{4^b - 3^b}{5^b}$  0

## 2.3 Výpočty derivací

### Příklad 2.6. Derivace prvního řádu funkce

Vypočítejte následující derivace

1.  $(d^4 + d^{-4} + d^0 - \tan(d) + e^d)'$   $4d^3 - 4d^{-5} + 0 - \frac{1}{\cos^2(d)} + e^d$
2.  $\left(\frac{e^u + u^2 - 4u}{\ln(u)}\right)'$   $\frac{e^u + 2u - 4}{\ln(u)} - \frac{e^u + u^2 - 4u}{u \ln^2(u)}$
3.  $((s + s^4) \ln(s) - 4s \sin(s))'$   $(1 + 4s^3) \ln(s) + s^3 + 1 - 4 \sin(s) - 4s \cos(s)$
4.  $(\ln(\cos(t)) + \ln(\ln(t)))'$   $-\tan(t) + \frac{1}{t \ln(t)}$
5.  $(3 \ln(a) \tan(a) + \sin(a) \cos(a))'$   $\frac{3 \tan(a)}{a} + \frac{3 \ln(a)}{\cos^2(a)} + \cos^2(a) - \sin^2(a)$
6.  $(2n^6 - n^4 + 3n^3 + 5n)'$   $12n^5 - 4n^3 + 9n^2 + 5$
7.  $\left(\frac{k}{(1-k)^2}\right)'$   $\frac{1+k}{(1-k)^3}$
8.  $\left(\frac{-2}{\sin(2r+3)}\right)'$   $\frac{4 \cos(2r+3)}{\sin^2(2r+3)}$

### Příklad 2.7. Derivace druhého řádu funkce

Vypočítejte následující druhé derivace

1.  $(p^{-1} \ln(p))''$   $\frac{2 \ln(p) - 3}{p^3}$
2.  $(\cos(v^2) + \sin(2v))''$   $-2 \sin(v^2) - 4v^2 \cos(v^2) - 4 \sin(2v)$
3.  $(\sin(j) \ln(j))''$   $\frac{2 \cos(j)}{j} - \sin(j) \left(\ln(j) + \frac{1}{j^2}\right)$
4.  $(2g^6 - g^4 + 3g^3 + 4g^2 - 5)''$   $2(30g^4 - 6g^2 + 9g + 4)$

## 2.4 l'Hospitalovo pravidlo

### Příklad 2.8. l'Hospitalovo pravidlo

Zjistěte, zda je následující limity možné vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla. Pokud ano, vypočítejte je.

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9}$  *l'Hospitalovo pravidlo nelze použít.*  
navíc  $\lim_{x \rightarrow 3^+} = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^-} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3}$  neexistuje.
2.  $\lim_{d \rightarrow 3} \frac{d^3 - d^2 - 5d - 3}{d^2 - 9}$   $\frac{8}{3}$
3.  $\lim_{o \rightarrow -1} \frac{3o^3 - 7o^2 - 2o + 8}{4o^2 + o - 3}$   $-3$