C1480: Úvod do matematiky - seminář
Téma 2: Limity a derivace

Teorie

Veronika Horská
podzimní semestr, 2022

2 Limity a derivace - Přehled pojmů

2.1 Základní vlastnosti funkcí

- **funkce** $f(x)$ ... něco, do čeho vložím (dosadím) číslo x a vypadne mi nové číslo y
- **definiční obor funkce** $f(x)$ ... množina čísel x, které můžu vložit do funkce $f(x)$
- **obor funkce** ... množina čísel y, které mi mohou vyjít jako výsledek funkce $f(x)$
- **spojitost funkce** ... když dokážu funkci $f(x)$ zakreslit pomocí jedné čáry bez přerušení, tak je spojitá
- **shora ohraničená funkce** ... pokud můžu nakreslit čáru vodorovnou s osou x, nad kterou se funkce $f(x)$ nikdy nedostane, pak je funkce $f(x)$ shora ohraničená
- **zdola ohraničená funkce** ... pokud můžu nakreslit čáru vodorovnou s osou x, pod kterou se funkce $f(x)$ nikdy nedostane, pak je funkce $f(x)$ zdola ohraničená
- **ohraničenost funkce** ... pokud je funkce ohraničená shora i zdola, říkáme o ní, že je ohraničená
- **periodická funkce** ... pokud lze funkci $f(x)$ vnímat jako jeden úsek, který se neustále opakuje, pak je funkce $f(x)$ periodická. Délka jednoho úseku se nazývá **perioda**.
- **parita funkce** ... funkce může být buď sudá nebo lichá
  - **sudá funkce** ... funkce symetrická podle osy y
  - **lichá funkce** ... funkce symetrická podle počátku
- **monotónnost funkce**
  - **rostoucí funkce** ... funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu roste
  - **neklesající funkce** ... funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu roste nebo stagnuje
  - **klesající funkce** ... funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu klesá
  - **nerostoucí funkce** ... funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I, pokud v celém tomto intervalu klesá nebo stagnuje

  Pokud je funkce na celém intervalu I (a) pouze rostoucí; (b) pouze neklesající; (c) pouze klesající; (d) pouze nerostoucí; říkáme, že je **monotónní**. Naopak funkce **není monotónní** na intervalu I, pokud na části intervalu roste a na části intervalu klesá, nebo pokud na části intervalu neroste a na část intervalu roste, apod.
- **sin(x), cos(x), tan(x), log(x), $\mathbf{e^x}$** ... mít v hlavě představu, jak tyto funkce přibližně vypadají

2.2 Limity funkcí

- **limita** ... nějaké číslo **y**, ke kterému se blíží funkce $f(x)$
- **limita v bodě a** ... nějaké číslo **y**, ke kterému se blíží funkce $f(x)$, když s x jdeme do a; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$
- **limita zprava** ... nějaké číslo **y**, ke kterému se blíží funkce $f(x)$, když s x jdeme do a ze směru od +nekonečna (tj. z pravé strany); $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = y$
- **limita zleva** ... nějaké číslo **y**, ke kterému se blíží funkce $f(x)$, když s x jdeme do a ze směru od −nekonečna (tj. z levé strany); $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = y$
- **neurčité výrazy** ... $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, $\infty \times 0$, 0^0, ∞^0, $\infty - \infty$
- **Pravidla pro určení limity**
  - $\frac{1}{\pm\infty} = 0$; $\qquad \frac{1}{+0} = +\infty$, $\frac{1}{-0} = -\infty$
  - výraz $a^0 = 1$ (kromě 0^0)
  - libovolné kladné číslo $a^\infty = \infty$ (kromě 1^∞)
  - libovolné číslo mezi $(-1; 1)^\infty = 0$ (vyjma -1^∞ a 1^∞)

2.3 Derivace funkcí

- **derivace** ... derivace není nic jiného, než **limita**; $\left(\text{konkrétně } f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$
- **Pravidla pro určení derivací**
  - derivace součinu konstanty c a funkce je součin konstanty c a derivace funkce ... $(cf(x))' = cf'(x)$
  - derivace součtu = součet derivací ... $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
  - derivace součinu dvou funkcí = první derivovaná × druhá nederivovaná + první nederinovovaná × druhá derivovaná ... $(f(x)\times g(x))' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$
  - derivace podílu dvou funkcí = (první derivovaná × druhá nederivovaná − první nederinovovaná × druhá derivovaná) / druhá funkce na druhou ... $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
  - derivace složené funkce $f(g(x))$ = derivace funkce $f(g(x))$ × derivace funkce $g(x)$, ... $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$
- **Derivace konkrétních funkcí (nutné minimum)**
  - $a' = 0$, kde a je konstanta ... derivace konstanty je 0
  - $(x^a)' = ax^{a-1}$
  - $(\sin(x))' = \cos(x)$
  - $(\cos(x))' = -\sin(x)$
  - $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
  - $(e^x)' = e^x$
  - $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
- **l'Hospitalovo pravidlo** ... Pravidlo, které, za splnění určité podmínky (viz níže), umožňuje **převedení limity podílu dvou funkcí** na **limitu podílu derivací** těchto funkcí. Limita podílu derivací může být snáze vypočitatelná, než limita původního podílu, takže tento převod částokrát usnadňuje výpočet původní limity.

  Znění l'Hospitalova pravidla
  Nechť je splněna jedna z podmínek

  1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
  2. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$

  Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) limita $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje také limita $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a tyto limity se rovnají, tj.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$